

Ch 05: Développement limité

5.1 Formule de Taylor

Théorème 5.1:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable $(n+1)$ fois sur $]a, b[$ alors $\exists c \in]a, b[$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Rappel: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Théorème 5.2: (Formule Taylor - Lagrange)

(F.T-L)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable $(n+1)$ fois sur I , $a \in I$, alors $\forall x \in I$ ($x \neq a$), $\exists c \in I$
 $\left(\begin{array}{l} c \in]a, x[\vee c \in]x, a[\\ \text{on prend } c \in]a, x[\end{array} \right)$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$T_n(x)$

$R_n(x)$

- $R_n(x)$ est appelée reste de Lagrange sur la fonction f
- $T_n(x)$ est appelée la partie régulière (ou principale ou polynôme)

Remarque:

La formule F.T-L signifie qu'on peut approcher une fonction f au voisinage d'un point a par un polynôme (P_n) d'ordre $\leq n$.

Remarque: (Formule de Maclaurin)

Quand $a = 0$ la F.T-L est appelée la formule de Maclaurin avec rest Lagrange (F.M-L)

$$\forall x \in I, \exists \theta \in]0, \pi$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}}_{R_n(0)} x^{n+1}$$

Exemple :

$$1/ f(x) = e^x, \quad I = \mathbb{R}, \quad a = 0$$

En utilisant la formule de Maclaurin pour f à l'ordre n .

$$\underline{R_1} \quad \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \underbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}}_{R_n(0)} x^{n+1}$$

$$R_n(0) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ (le reste de Lagrange)}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$2/ f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad I =]-1, +\infty[, \quad a = 0$$

En utilisant la F.T-L pour f à l'ordre n

$$\underline{R_2} \quad \text{On a } \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$$

$$\forall x \in I :$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1}$$

Remarque:

La F.T.L d'une fonction f en un point a se ramène à la F.M.L d'une fonction g définie par :

$$g(h) = f(h+a) \quad \left(\begin{array}{l} \text{avec } x = h+a \Leftrightarrow h = x-a \\ x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

Exemple:

1/ $f(x) = e^x$, $I = \mathbb{R}$, $a = 1$ (à l'ordre $n=3$)

Réponse:

$$f(x) = e^x = e \cdot e^{x-1} = e e^h \quad \left(\begin{array}{l} h = x-1 \Leftrightarrow x = h+1 \\ x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

$$\text{On a } e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \frac{e^{eh}}{4!} h^4$$

$$\Rightarrow e^x = e + eh + e \frac{h^2}{2} + e \frac{h^3}{6} + e \frac{e^{eh}}{4!} h^4$$

$$\Rightarrow e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \frac{e^{e(x-1)+1}}{24}(x-1)^4$$

2/ $f(x) = \text{sh } x$ / $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

En utilisant la formule de M-L à l'ordre $3=n$

$$f'(x) = \text{ch } x \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \text{sh } x \longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \text{ch } x \longrightarrow f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sh } x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$Sh x = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + R_4(x)$$

$$Sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^{0x}}{4!} x^4$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{e^{0x}}{24} x^4$$

3/ $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^* / f \in C^\infty(]-1, +\infty[)$$

$\alpha = 0$

$$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) (1+x)^{\alpha-n}$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)$$

Pour $x > -1$ et $n \geq 1$, on obtient

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \text{ avec reste de Lagrange}$$

4/ $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^* / f \in C^\infty(]0, +\infty[)$$

$\alpha = 1$

$$x = h+1 \quad (\Leftrightarrow) \quad h = x-1$$

$$x \rightarrow 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad h \rightarrow 0$$

$$g(h) = (h+1)^\alpha = f(h+1)$$

5.2 Développements limités

Les développements limités ont de nombreuses applications en analyse mathématique. Ils servent en particulier à lever des indéterminations dans le calcul des limites, en remplaçant des fonctions plus ou moins complexes par leurs parties polynômiales. Ils peuvent également servir à étudier la position d'une courbe par rapport à sa tangente. Ils peuvent également servir à étudier les branches infinies d'une courbe.

Définition 5.1 (Développement limité au voisinage de a)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit I un voisinage de a (exemple: $a = 1$ pour $I =]0, 2]$, $a \in I$ ou $I =]0, 1[\cup]1, 2]$ $a \notin I$). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a , en abrégé $DL_n(a)$, s'il existe un polynôme P_n ($d(P_n) \leq n$) et une fonction $\varepsilon(n)$ tels que

$$\forall x \in I: f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Le polynôme $P_n(x)$ est appelé la partie régulière.

Définition 5.2 (D.L. au voisinage de 0)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un voisinage de 0. On dit que f admet un $DL_n(0)$ s'il existe un polynôme P_n ($d(P_n) \leq n$) et une fonction $\varepsilon(x)$ tels que

$$f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Propriétés 5.1.

1/ Si f admet un $DL_n(a)$, alors ce développement limité est unique. (unicité d'un DL)

2/ Si f admet un DL à l'ordre n en a , alors pour $m \leq n$, elle admet un DL à l'ordre m en a

3/ Si f admet un DL à l'ordre n en a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et finie et est égale à a_0

$$\left(\text{ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} P_n(x) \text{ car } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 \right)$$

4/ Si une fonction f paire (respectivement impaire) admet un DL_n alors sa partie régulière est un polynôme pair (resp. impair)

Remarque:

$(x-a)^n \varepsilon_1(x)$ (ou $x^n \varepsilon_1(x)$) est appelé le reste du développement et on le note aussi par : $O(x-a)^n$ (ou $O(x^n)$)

Exemple (DL des fonctions élémentaires)

1/ $f(x) = e^x$, $a = 0$, à l'ordre n

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon_1(x) \quad \left(\varepsilon_1(x) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow 0 \right)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$$

2/ $f(x) = \sin x$, $a=0$, à l'ordre n

$$f'(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{(2k+1)} \quad f''(x) = -\sin x = \sum_{k=1}^{(2k)}$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sum_{k=1}^{(2k+1)} \quad f^{(4)}(x) = \sin x = \sum_{k=2}^{(2k)}$$

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad f^{(2k)}(0) = 0$$

alors le DL de $\sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre n est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2k+1})$$

5.3. Opérations sur les DL

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f et g admettent des DL au voisinage de 0 à l'ordre n .

$$f(x) = P_n(x) + O(x^n), \quad g(x) = Q_n(x) + O(x^n)$$

Proposition 5.1: (Somme)

La fonction $(f+g)$ admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre n qui est :

$$f(x) + g(x) = [P_n(x) + Q_n(x)] + O(x^n)$$

Exemple

$$f(x) = \cosh x, \quad a=0, \quad n=3$$

Réponse:

On a $\text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \dots (1)$$

On remplace le x par $(-x)$, on obtient :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \dots (2)$$

En sommant (1) et (2), on obtient

$$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \text{Ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Proposition 5.2: (Produit)

La fonction $f \cdot g$ admet un $DL_n(0)$ qui est :

$$f(x) \cdot g(x) = R_n(x) + o(x^n)$$

dont la partie régulière ($R_n(x)$) est obtenue en ne gardant dans le produit $P_n \cdot Q_n$ que les termes de degré $\leq n$.

Exemple:

Calculer le $DL_2(0)$ de : $\cos x \cdot \sqrt{1+x}$

Réponse:

$$\text{On sait que } \cos x = \underset{P_2(0)}{1 - \frac{1}{2}x^2} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} = \underset{Q_2(x)}{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2} + o(x^2)$$

donc

$$P_2(x) \cdot Q_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{16}x^4$$

$$(\cos x \cdot \sqrt{1+x}) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Proposition 5.3: (Quotient)

Soit $Q_n(0) \neq 0$ ($\lim_{n \rightarrow 0} g(n) = \lim_{n \rightarrow 0} Q_n(n) \neq 0$). La fonction f/g admet un $DL_n(0)$ qui est $\frac{f(n)}{g(n)} = T_n(n) + o(n^n)$ dont la partie régulière ($T_n(n)$) s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n de P_n par Q_n .

Exemple:

$$f(n) = \tan n \quad a=0, \quad n=3$$

Réponse:

$$\tan n = \frac{\sin n}{\cos n}$$

$$\sin n = n - \frac{n^3}{6} + o(n^3)$$

$$\cos n = 1 - \frac{n^2}{2} + o(n^3)$$

$$P_3(n) = \begin{array}{r} n - \frac{n^3}{6} \\ n - \frac{n^3}{2} \\ \hline \frac{n^3}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{n^2}{2} = Q_3(n) \\ \hline n + \frac{n^3}{3} \end{array}$$

Par conséquent, $\frac{\sin n}{\cos n} = n + \frac{1}{3}n^3 + o(n^3)$

Remarque:

Le critère précédent dit tout simplement que si $\lim_{n \rightarrow 0} g(n) \neq 0$, alors f/g admet un $DL_n(0)$ et il ne nous dit pas si $\lim_{n \rightarrow 0} g(n) = 0$.

alors $f \circ g$ n'admet pas un $DL_n(0)$. Il se peut que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ avec $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$.

Exemple.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ admet un DL d'ordre 3 en 0, alors que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

Proposition 5.4. (composition)

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. On suppose que $g(0) = 0$. Alors $(f \circ g)$ admet un $DL_n(0)$ qui est $(f \circ g)(x) = S_n(x) + o(x^n)$, dont la partie régulière $(S_n(x))$ est obtenue en ne gardant que les termes de $(P_n \circ Q_n)$ de degré $\leq n$.

Exemple.

$$h(x) = e^{\sin x}, \quad a=0, \quad n=3$$

Réponse.

$$\text{On pose } f(x) = e^x, \quad g(x) = \sin x$$

$$\text{on obtient } h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = e^{\sin x}$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$g(x) = \sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$Q_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

$$(P_3 \circ Q_3)(x) = P_3(Q_3(x)) = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{6^2} - 2 \frac{x^4}{6} \approx x^2$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = x^3 + 3 \frac{x^4}{6} - 3 \frac{x^6}{6^2} - \frac{x^9}{6^3} \approx x^3$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Proposition 7.7 (DL d'une dérivée)

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et admet un $DL_n(0)$

$(f(x) = P_n(x) + o(x^n))$ alors f' admet un $DL_{n-1}(0)$

obtenus en dérivant le DL de f .

$$f'(x) = P'_n(x) + o(x^{n-1})$$

Exemple:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad n=3, \quad a=0$$

Réponse:

$$\text{si on pose } f(x) = \frac{1}{1-x}, \text{ alors } g(x) = f'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)$$