Matière : Maths 1

Série de TD N°3

Limites

Exercice 1 :
Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^{x}+e^{-x}}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}-x+7}{3e^{-x}-x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x - x^2+3$

11) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\sin x}$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\cos x+\ln(2x)}{e^x+x^3}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

Continuité

Exercice 2 :

1) $f(x)=\begin{cases} 1/\ln|x| & si \quad x\notin\{-1,0,1\} \\ 0 & si \quad x=-1,0,1\end{cases}$. En quels points f est-elle continue?

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 0 & si \quad x=2\end{cases}$, Etudier la continuité de f sur$\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\begin{cases} a\cos x+b\sin x & x<\pi/2 \\ \pi-x & \pi/2<x<\pi \\ x^2-a & \pi<x\end{cases}$, Déterminer les valeurs de a et b, pour que f soit continue.

Exercice 3 :
Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $f_1(x)=\frac{x^3+5x+6}{x^3+1} \quad si \quad x\neq -1$
2. $f_2(x)=\cos(x)\cos(1/x) \quad si \quad x\neq 0$
3. $f_3(x)=\sin(x+1)\ln|x+1| \quad si \quad x\neq -1$
4. $f_4(x)=(x^2-4)\ln(|x^2-4|) \quad si \quad x\neq 2$

Dérivabilité

Exercice 4:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\frac{1}{x^2}$

1. Pour tout réel h (avec $1+h \neq 0$ et $h \neq 0$), exprimer en fonction de h le rapport
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
2. En déduire que f est dérivable en -1 et donner le nombre dérivé de f en -1.

Exercice 5 :

Etudier si les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & si \quad x \geq 0 \\ x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Exercice 6 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\frac{(x-1)^2}{1+|x-1|}$

1. Démontrer que la fonction f est dérivable en 1. Donner le nombre dérivé de f en 1.
2. Déterminer une équation de la tangente *(T)* à la courbe C au point d'abscisse 1.

Exercice 7 :

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies par :

1) $f_1(x) = x^2 + \frac{1}{x} + e^x$
2) $f_2(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$
3) $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 2}$
4) $f_4(x) = (\sin x + \cos x)e^x$
5) $f_5(x) = \ln(\sin(x+2))$
6) $f_6(x) = \frac{e^x}{3e^x + 2}$

Exercice 8 :

Déterminer la limite des fonctions suivantes par deux méthodes, en utilisant la définition du nombre dérivé et la règle de l'Hospital

1) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)}$
2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$
3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$
4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$
5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$
6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$

Othman YAKHLEF

Exercice 3 :

Exercice5→http://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/unevariable/continuite&type=fexo