الفصل الرابع: ديناميك الموائع

$Dynamique\ des\ fluides$

تقديم: ديناميك الموائع هو دراسة حركة الموائع. في هذا الفصل سوف نهتم بدراسة حركة الموائع المثالية (الموائع غير اللزجة) و التي تتميز بالخصائص التالية :

- المائع غير لزج، أي أنّ الاحتكاك بين طبقات المائع مهملة.
- المائغ غير انضغاطي اين تكون كتلته الحجمية ثابتة.
- سرعة المائع في نقطة معينة من المائع لا تتغير خلال الزمن و هو ما يُدعى بالنظام المستقر.

التدفق ($débit$):

يُعرف تدفق مائع Q عبر أنبوب على أنه كمية المائع الذي يعبر مساحة مقطع الأنبوب في وحدة الزمن.

التدفق الحجمي ($débit\ volumique$):

هو حجم المائع الذي يعبر مساحة مقطع الأنبوب في وحدة الزمن.

$$Q_V = \frac{dV}{dt}$$

حجم المائع dV الذي يعبر المساحة العنصرية dS خلال فاصل زمني dt هو:

$$dV = \vec{v}.\vec{n}dSdt$$

و يكون التدفق الحجمي للمائع الذي يعبر المساحة S:

$$Q_V = \iint_{(S)} \vec{v}.\vec{n}dS$$

يُعبر عن التدفق الحجمي بـ m^3/s.

التدفق الكتلي ($débit\ massique$):

هو كتلة المائع الذي يعبر مساحة مقطع الأنبوب في وحدة الزمن.

$$Q_m = \frac{dm}{dt}$$

و يكون التدفق الكتلي للمائع الذي يعبر المساحة S:

$$Q_m = \iint_{(S)} \rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

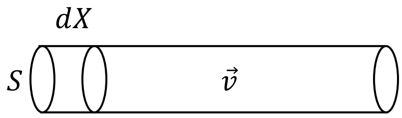
يُعبر عن التدفق الكتلي بـ kg/s.

العلاقة بين Q_V و Q_m:

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho Q_V$$

$$Q_m = \rho Q_V$$

معادلة الاستمرارية ($équation\ de\ continuité$):



ليكن مائع ينساب بسرعة منتظمة v في أنبوب مساحة مقطعه S ثابتة.

خلال فاصل زمني dt ينتقل (ينساب) مسافة $dX = vdt$ ، و يكون

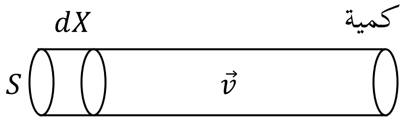
حجم المائع المنساب $dV = SdX = Svdt$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = Sv$$

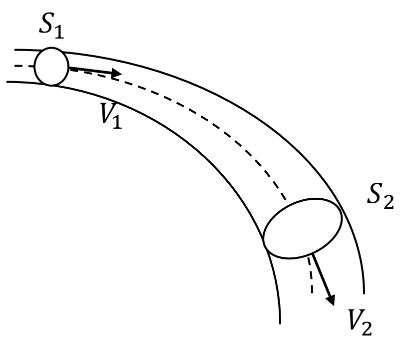
$$donc:\ Q_V = Sv$$

نتيجة: التدفق الحجمي يساوي إلى جداء سرعة انسياب المائع و مساحة مقطع الأنبوب

معادلة الاستمرارية ($équation\ de\ continuité$):



* في حالة أنبوب مساحة مقطعه ثابتة و إذا كان المائع غير انضغاطي، فإنّ كمية المائع الذي تدخل الأنبوب تساوي كمية المائع الذي تغادره، أي أنّ تدفق الدخول Q_1 يساوي تدفق الخروج Q_2 ($Q_1 = Q_2$).

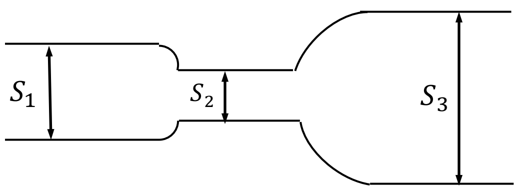


* في حالة أنبوب مساحة مقطعه متغيرة من S_1 إلى S_2 يكون:

– التدفق عبر S_1: $Q_1 = S_1 . v_1$.

– التدفق عبر S_2: $Q_2 = S_2 . v_2$.

و حيث أنّ: $Q_1 = Q_2 \Leftarrow S_1 . v_1 = S_2 . v_2$. و هي معادلة الاستمرارية و هي تعبر عن انحفاظ كتلة المائع خلال الانسياب.

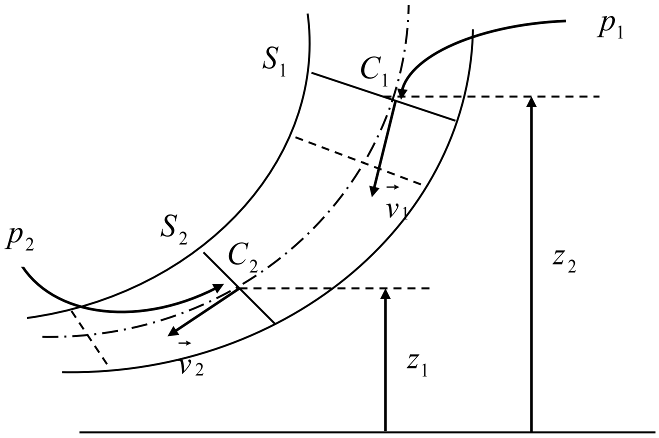


$$Q_V = S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_3 v_3$$

معادلة $Bernoulli$:

يتغير الضغط داخل أنبوب مقطعه متغير و كذلك ارتفاعه من نقطة إلى أخرى، و لقد وجد $Bernoulli$ العلاقة التي تجمع بين السرعة، الضغط و الارتفاع.

يمكن الحصول على معادلة $Bernoulli$ بتطبيق نظرية الطاقة الحركية على جملة مائع موجودة داخل أنبوب تيار و محدودة بمقطعين مساحتهما S_1 و S_2 حيث السرعة و الضغط ثابتين و مقدارهما (P_1, v_1) و (P_2, v_2) على التوالي.



P_1 مقدار الضغط عند المركز C_1 و على ارتفاع z_1.

P_2 مقدار الضغط عند المركز C_2 و على ارتفاع z_2.

خلال الزمن dt تنتقل S_1 مسافة dx_1 و تكون كتلة المائع المنسابة $dm_1 = \rho S_1 dx_1$.

نفس الشيء بالنسبة للمقطع S_2 الذي يقطع مسافة dx_2 و تكون الكتلة المنسابة $dm_2 = \rho S_2 dx_2$.

بما أنّ المائع غير انضغاطي فان $dm_1 = dm_2 = dm$، و بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين C_1 و C_2 :

$$E_{C_2} - E_{C_1} = \sum W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

$$\frac{1}{2}dmv_2{}^2 - \frac{1}{2}dmv_1{}^2 = W(\vec{p}) + W\left(\overrightarrow{F_1}\right) + W\left(\overrightarrow{F_2}\right)$$

$W(\vec{p})$: عمل تقل جملة المائع.

$W\left(\overrightarrow{F_1}\right)$: عمل القوة الضاغطة عند C_1.

$W\left(\overrightarrow{F_2}\right)$: عمل القوة الضاغطة عند C_2.

$$\frac{1}{2}dmv_2{}^2 - \frac{1}{2}dmv_1{}^2 = dmg\,(z_2 - z_1) + F_1.\,dx_1 - F_2.\,dx_2$$

$$\frac{1}{2}dm{v_2}^2-\frac{1}{2}dm{v_1}^2=dmgz_2-dmg\,z_1+P_1S_1\left(\frac{dm}{\rho S_1}\right)-P_2S_2\left(\frac{dm}{\rho S_2}\right)$$

$$\frac{1}{2}{v_2}^2-\frac{1}{2}{v_1}^2=gz_2-gz_1+\frac{P_1}{\rho}-\frac{P_2}{\rho}$$

$$\frac{\rho}{2}{v_2}^2-\frac{\rho}{2}{v_1}^2=\rho gz_2-\rho gz_1+P_1-P_2$$

$$\Rightarrow P_1+\rho gz_1+\frac{\rho}{2}{v_1}^2=P_2+\rho gz_2+\frac{\rho}{2}{v_2}^2$$

$$donc\ :P+\rho gz+\frac{\rho}{2}v^2=C^{te}$$

و هي معادلة $Bernoulli$. بمعنى أنّ المقدار $P+\rho gz+\rho/2v^2$ ثابت على طول خط التيار.

التفسير الطاقوي لمعادلة $Bernoulli$:

لدينا معادلة $Bernoulli$:

$$p+\rho gz+\frac{\rho}{2}V^2=Cte$$

ليكن عنصر من مائع حجمه dV، كتلته dm، سرعته v و ارتفاعه z. طاقته الحركية dE_c و طاقته الكامنة dE_p، حيث:

- $dE_c=1/2dmv^2=1/2\rho dVv^2 \Leftarrow 1/2\rho v^2=dE_c/dV$: يمثل هذا الحد الطاقة الحركية لعنصر المائع في وحدة الحجم.

- $dE_p=dmgz=\rho dVgz \Leftarrow \rho gz=dE_p/dV$: يمثل هذا الحد الطاقة الكامنة لعنصر المائع في وحدة الحجم.

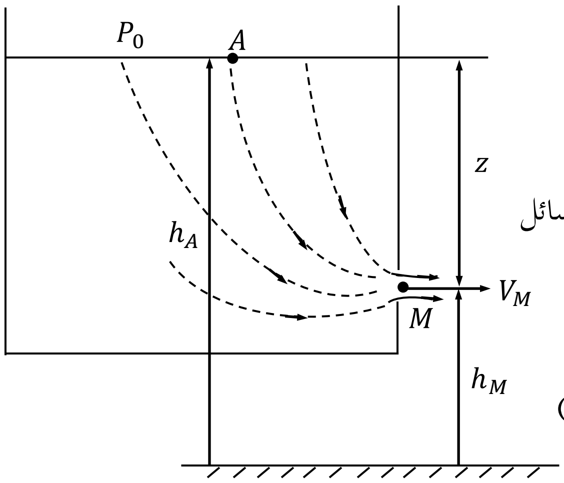
- p : الضغط السكوني.

معادلة $Bernoulli$ توافق الطاقة الميكانيكية الكلية لوحدة حجم المائع، و منه فإنّ معادلة $Bernoulli$ تترجم (تعبر عن) انحفاظ الطالة الكلية في حالة الحركة.

تطبيقات معادلة $Bernoulli$:

1) **نظرية توريشيلي** ($Théorème\ de\ Torricelli$)

تسمح لنا هذه التجربة من قياس سرعة خروج (انسياب) مائع مثالي كتلته الحجمية ρ، غير انضغاطي، من خلال فتحة (Orifice) مساحة مقطعها S_M توجد أسفل خزان مساحة مقطعه $S \gg S_M$ و على ارتفاع z من السطح الحر للسائل.



للشرح: التجربة (أو بالمعاينة التجريبية) تبين أنّ انسياب السائل يتميز بالخصائص التالية:

- كل السائل يشارك في الحركة (الانسياب).
- الانسياب في الخزان متقارب ($de\ type\ convergent$) و خطوط التيار ($lignes\ de\ courant$) تتقارب

قبل أن تصل إلى الفتحة، و هذا التقارب يستمر بعد خروج السائل من الفتحة، حيث تكون خطوط التيار متوازية و مستقيمة.

لأن كل السائل، و انطلاقا من السطح الحر، يشكل أنبوب تيار، يُمكننا تطبيق نظرية $Bernoulli$ بين مقطع السطح الحر و المقطع ($section\ contractée$).

الهدف: حساب السرعة v_M.

بتطبيق معادلة $Bernoulli$ بين النقطتين A و M نجد:

$$P_A + \rho g h_A + \frac{\rho}{2}{V_A}^2 = P_M + \rho g h_M + \frac{\rho}{2}{V_M}^2$$

و حيث أنّ: $P_A = P_M = P_a$

$$\rho g h_A + \frac{\rho}{2}{V_A}^2 = \rho g h_M + \frac{\rho}{2}{V_M}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2}\left({V_M}^2 - {V_A}^2\right) = \rho g (h_A - h_M) = \rho g z$$

إنّ سرعة السطح الحر v_A صغيرة جدا على اعتبار أن مساحة مقطع الخزان كبيرة، و بالتالي يمكن إهمال الحد $(\rho/2){V_A}^2$ أمام الحدود الأخرى.

من معادلة الاستمرارية $SV_A = S_M V_M \Leftarrow V_A = (S_M/S)V_M$:

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{{S_M}^2}{S^2}\right){V_M}^2 = \rho g (h_A - h_M) = \rho g z$$

$$puisque:\ S_M \ll S \Rightarrow 1 - \frac{{S_M}^2}{S^2} \simeq 1$$

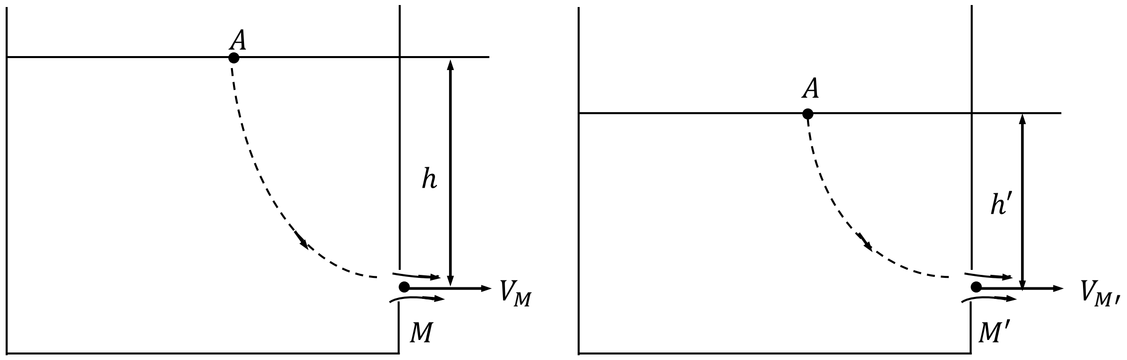
$$donc:\ \frac{\rho}{2}{V_M}^2 = \rho g z \Rightarrow \boxed{V_M = \sqrt{2gz}}$$

و هي سرعة خروج السائل عند الفتحة M.

نتائـــــج:

1) نلاحظ أنّ سرعة خروج جزيئة السائل تساوي سرعة السقوط الحر لهذه الجزيئة على ارتفاع z.

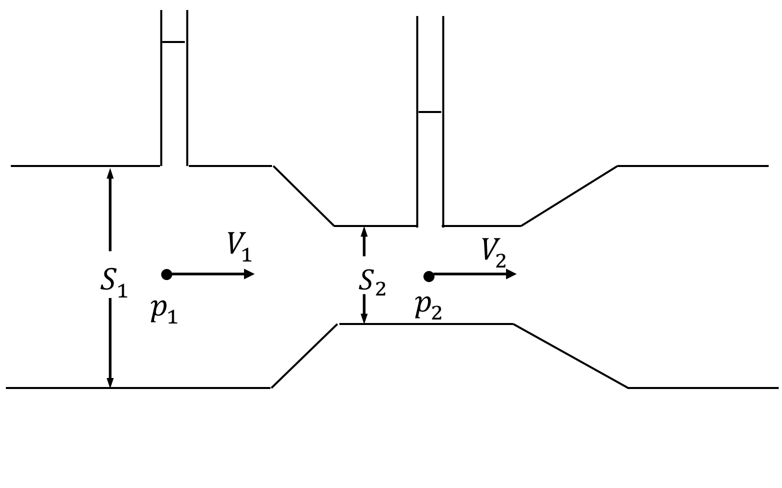
2) نلاحظ من العلاقة أن سرعة مائع ثقيل أكبر من سرعة مائع خفيف.



$$h > h' \Rightarrow V_M > V_{M'}$$

2) **أنبوب فانتوري** ($Tube\ de\ Venturi$):

لتحديد تدفق مائع في قناة، نستخدم في الغالب أنبوب (مقياس) $Venturi$. و هي عبارة عن قناة أفقية (أو شاقولية) متقاربة متباعدة، مساحة مقطعها متغيرة. القناة مزودة عند المقطعين S_1 و S_2 بأنبوبين لقياس الضغط p_1 و p_2.



الهدف : حساب سرعة السائل p_2.

بتطبيق معادلة برنولي بين النقطتين (1) و (2):

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2}{V_1}^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2}{V_2}^2$$

و حيث أنّ: $z_1 = z_2$

$$p_1 + \frac{\rho}{2}{V_1}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}{V_2}^2 \Rightarrow \frac{\rho}{2}\left({V_2}^2 - {V_1}^2\right) = p_1 - p_2$$

من معادلة الاستمرارية $S_1V_1 = S_2V_2 \Leftarrow V_1 = (S_2/S_1)V_2$:

$$\frac{\rho}{2}\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]{V_2}^2 = p_1 - p_2$$

$$donc: \boxed{V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}}$$

فرق الضغط $p_1 - p_2$ يُحدد بواسطة الأنبوبين $pi\grave{e}zom\grave{e}trique$ كما هو موضح على الشكل، أو بواسطة $manom\grave{e}tre\ diff\acute{e}rentiel$ مرتبط بمأخذين للضغط السكوني $(prises\ de\ pression\ statique)$.

مقدار التدفق $\boldsymbol{Q_V}$:

$$Q_V = S_2V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}$$