Calcul de valeurs et de vecteurs propres

4.1 Localisation des valeurs propres

- Calcul analytique.
- Théorème de Gershgorin
- Améliorations du théorème de Gershgorin

4.2 Méthode de la puissance

- Méthode de la puissance inversée
- Méthode de déflation

Introduction :

Nous abordons dans ce chapitre le problème du calcul de valeurs propres (et, éventuellement, de vecteur propres d'une matrice d'ordre n. C'est un problème beaucoup plus difficile que celui de la résolution d'un système linéaire. En effet, les valeurs propres d'une matrice étant les racines de son polynôme caractéristique, on pourrait naïvement penser qu'il suffit de factoriser ce dernier pour les obtenir. On sait cependant (par le théorème d'Abel-Ruffini) qu'il n'est pas toujours possible d'exprimer les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à 5 à partir des coefficients du polynôme et d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines). Par conséquent, il ne peut exister de méthode directe, c'est-à-dire fournissant le résultat en un nombre _ni d'opérations, de calcul de valeurs propres d'une matrice et on a donc recours à des méthodes itératives.

Parmi ces méthodes, il convient distinguer les méthodes qui permettent le calcul d'une valeur propre (en général celle de plus grand ou de plus petit module, mais pas seulement) de celles qui conduisent à une approximation de l'ensemble du spectre d'une matrice. D'autre part, certaines méthodes permettent le calcul de vecteurs propres associés aux valeurs propres obtenues, alors que d'autres non. C'est le cas par exemple de la méthode de la puissance, qui fournit une approximation d'un couple particulier de valeur et vecteurs propres et dont nous étudierons les propriétés de convergence. Dans le cas de la détermination du spectre d'une matrice réelle symétrique A, nous présentons ensuite une technique de construction d'une suite de matrices, orthogonalement semblables à A, convergeant vers une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A, la méthode de Jacobi.

I. Définition :

Soit A une matrice d'ordre n (éléments réels ou complexes). S'il existe un vecteur X de n éléments (X non nul) et un nombre λ (réel ou complexe) tel que : AX = λX, ainsi on appelle λ valeur propre de la matrice A et X le vecteur propre de cette matrice associé à λ.

Exemple :

Soit A une matrice de 2x2 éléments tels que :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \qquad \lambda = 3$$

$$Ax = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix} \qquad \lambda x = 3\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$$

On remarque bien que AX = λX, ainsi λ est une valeur propre de la matrice A et X est le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur λ.

Les valeurs propres jouent un rôle très important dans le calcul matriciel, à savoir le calcul de la puissance d'une matrice.

Rappel sur les matrices réductibles et irréductibles :

Une matrice $M=(a_{ij})$ une matrice d'ordre n est réductible :

- Si et seulement s'il existe une matrice de permutation P tel que $P^{-1}MP=\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ où A est une matrice carrée.
- Si et seulement s'il existe une partition (I, J) non triviale de [1, n] telle que $\forall(i, j) \in I \times J$, $a_{ij}=0$.
- Si et seulement s'il existe une partie J non triviale de [1, n] telle que le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_j \setminus j \in J\}$ soit stable par M (où les e_i forment la base canonique de K^n).

Une matrice $M = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n est irréductible :

- Si et seulement si M n'est pas réductible.
- Si et seulement si le graphe orienté associé à M est fortement connexe.
- Si et seulement si $(I_n + M)^{n-1}$ est strictement positive.
- Une matrice ayant une ligne ou une colonne nulle est irréductible.
- Une matrice ayant tous ses coefficients non nuls est irréductible.

II. Calcul analytique des valeurs propres et des vecteurs propres :

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n, si λ est une valeur propre de A ainsi il existe une vecteur X d'ordre n (non nul) tel que :

$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$ ceci peut être traduit par le système linéaire :

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \end{cases}$$

On remarque bien que ce système est homogène. à l'exclusion de la solution triviale X = 0, admettra des solutions si $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le polynôme issu du calcul de ce déterminant est appelé **polynôme caractéristique** de A.

Exemple1 :

Déterminer les valeurs propres de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Det $(A-\lambda I)= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -(5-\lambda)(4+\lambda)+18 =0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ou $\lambda=2$.

Donc les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1=-1$ ou $\lambda_2=2$.

Choix des vecteurs propres :

λ_1=-1 et λ_2=2 sont des valeurs propres de A donc $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

On peut trouver ainsi :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'à partir de n>3 les calculs deviennent très compliqués, et il n'y a pratiquement aucune méthode efficace pour la résolution des polynômes de degré élevé.

En fait des méthodes permettant de localiser les valeurs propres existaient depuis le début du siècle.

Exemple2 :

Calculer les valeurs propres de la matrice A suivante, tout en donnant son polynôme caractéristique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

III. Localisation des valeurs propres :

Certaines méthodes de calcul des valeurs propres permettant d'approcher une valeur propre bien spécifique, il peut être utile d'avoir une idée de la localisation des valeurs propres dans le plan complexe.

Dans ce domaine, une première estimation est donnée par le théorème qui concerne la convergence de la ***méthode de « Fausse position »***, dont on déduit que, pour toute matrice carrée A et pour toute norme matricielle consistante ||.||, on a :

$|\lambda| \leq ||A||, \forall \lambda \in \sigma(A)$.

Cette inégalité, bien que souvent grossière, montre que toutes les valeurs propres de A sont contenues dans un disque de rayon ||A|| et centrée en l'origine du plan complexe. Une autre estimation de localisation des valeurs propres a priori, plus précise mais néanmoins très simple, est fournie par le théorème « des disques de ***Gershgorin*** »

a. Disques de Gershgorin :

Soit A une matrice de $M^n(C)$. Les ***disques de Gershgorin*** D_i, i = 1,.., n sont les régions du plan complexe définies par :

$$Di = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - aii| \leq Ri\}, avec\ Ri = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |aij|$$

Définition : Cercle de Gershgorin

Par convention on nomme cercle de Gershgorin les bords des disques de Gershgorin, on a donc la définition :

$$Ci = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - aii| = Ri\}, avec\ Ri = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |aij|$$

b. Théorème des disques de Gershgorin :

Si A est une matrice d'ordre n, alors :

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Di$$

Où les Di sont les disques de Gershgorin et $\sigma(A)$ est le spectre de la matrice A.

Démonstration :

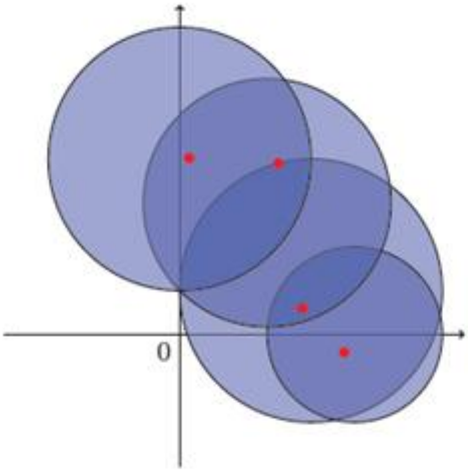
Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ soit une valeur propre de A. il existe alors un vecteur non nul v de $\mathbb{C}^n$ tel que $Av = \lambda v$, c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Soit v_k, avec k ∈ {1, .. , n}, la composante de v ayant le plus grand module (ou l'une des composantes de plus grand module s'il y en a plusieurs), on a d'une part $v_k \neq 0$, puisque v est non nul par hypothèse, et d'autre part

$$|\lambda - a_{kk}|\,|v_k| = |\lambda v_k - a_{kk} v_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j - a_{kk} v_k\right| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj} v_j\right| \leq |v_k|\, R_k,$$

Ce qui prouve après division par $|v_k|$ que la valeur propre λ est contenue dans le disque de Gershgorin D_k, d'où le résultat.



Représentation dans le plan complexe des valeurs propres (en rouge) et des disques de Gershgorin en bleu de la matrice complexe.

Ce théorème assure que toute valeur propre de la matrice A se trouve dans la réunion des disques de Gershgorin de A.

Définitions :

Soit A=(a_{ij}) une matrice d'ordre n.

- *A est dite à diagonale dominante si et seulement si :*

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

- *A est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si :*

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

- *A est dite à diagonale fortement dominante si et seulement si A est à diagonale dominante et*

$$\exists i \in [\![1;n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Théorème de Hadamard :

Soit A=(aij) une matrice d'ordre n.

Si A est à diagonale strictement dominante alors A est inversible.

c. Améliorations du théorème de Gershgorin :

La transposée A^T de A possédant le même spectre que A, on obtient de manière immédiate une première amélioration du résultat.

Proposition (1ère amélioration) :

Si A est une matrice d'ordre n, alors :

$$\sigma(A) \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} Di) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} D'j)$$

Où les ensembles D'j, j=1,..,n sont tels que

$$D'j = \{z \in \mathbb{C} \; tel \; que \; |z - ajj| \leq Cj\}, avec \; Cj = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |aij|, \qquad et \; le \; Di \; sont \; définis \; précedemment$$

Proposition2 (2ème amélioration) : Taussky

Si A est une matrice d'ordre n irréductible.

Si une valeur propre de A est sur l'extrémité de la réunion des disques alors elle est forcément sur tous les cercles de Gershgorin.

Corollaire1 : généralisation du théorème de Hadamard :

Si A est une matrice d'ordre n, alors :

Si A est irréductible et à diagonale fortement dominante alors A est inversible.

Second théorème de Gershgorin (3ème amélioration) :

Soit A une matrice d'ordre n, avec n ≥ 2.

On suppose qu'il existe un entier ***p*** compris entre 1 et n-1 tel que l'on puisse diviser la réunion des disques de Gershgorin en deux sous-ensembles disjoints de p et n - p disques. Alors, le premier sous-ensemble contient exactement p valeurs propres, chacune étant comptée avec sa multiplicité algébrique, les valeurs propres restantes étant dans le second sous-ensemble.

Corollaire2 :

Si A est une matrice d'ordre n, alors :

Si un disque de Gershgorin de A est isolé alors il contient une unique valeur propre de A.

Corollaire3 :

Si A est une matrice d'ordre n, alors :

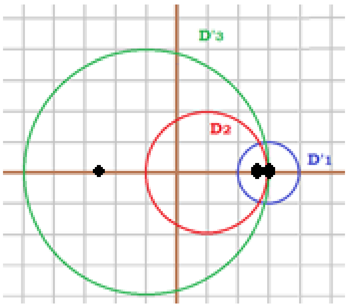
Si les disques de Gershgorin de A sont deux à deux isolés alors ils contiennent chacun une unique valeur propre de A.

Exercice corrigé :

Soit la matrice A suivante, localiser les valeurs propres de A en utilisant les théorèmes de Gershgorin. Vérifier les résultats en calculant ces valeurs en utilisant le déterminant. Puis en déduire les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

D_i	D'_j	$(D_i) \cap (D'_j)$	$(\cup D_i) \cap (\cup D'_j)$
$D_1(3,\ 4)$	$D'_1(3,\ 1)$	$D'_1(3,\ 1)$	$D'_1 \cup D_2 \cup D'_3 = D'_1 \cup D'_3$
$D_2(1,\ 2)$	$D'_2(1,\ 6)$	$D_2(1,\ 2)$	
$D_3(-1,\ 5)$	$D'_3(-1,\ 4)$	$D'_3(-1,\ 4)$	



Det(A-λI) = $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda - 21 = (3-\lambda)(\lambda^2-7) = (3-\lambda)(\lambda-\sqrt{7})(\lambda+\sqrt{7})$

Donc les valeurs propres de cette matrice sont :

$\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = \sqrt{7} = 2{,}646$; $\lambda_3 = -\sqrt{7} = -2{,}646$

Les vecteurs propres :

$AX = \lambda_1 X = 3X$:

$$\begin{cases} 3x1 + 2x2 - 2x3 = 3x1 & \rightarrow \quad 2x2 - 2x3 = 0 \quad \rightarrow \quad x2 = x3 \\ x2 + 2x3 = 3x2 & \rightarrow \quad x2 = x3 \\ x1 + 4x2 - x3 = 3x3 & \rightarrow \quad x1 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = \lambda_2 X = \sqrt{7}X$:

$$\begin{cases} 3x1 + 2x2 - 2x3 = \sqrt{7}x1 & \rightarrow \quad (3-\sqrt{7})x1 + 2x2 - 2x3 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + 2 \; x1 = -x2 \\ x2 + 2x3 = \sqrt{7}x2 & \rightarrow \quad (1-\sqrt{7})x2 + 2x3 = 0 \quad \rightarrow x3 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}x2 \\ x1 + 4x2 - x3 = \sqrt{7}x3 & \rightarrow \quad x1 + 4x2 - (1+\sqrt{7})x3 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dfrac{\sqrt{7}-1}{2} \end{pmatrix}$$

$AX = \lambda_3 X = -\sqrt{7}X$:

$$\begin{cases} 3x1 + 2x2 - 2x3 = -\sqrt{7}x1 & \rightarrow \quad (3+\sqrt{7})x1 + 2x2 - 2x3 = 0 \quad \rightarrow \quad x1 = -x2 \\ x2 + 2x3 = -\sqrt{7}x2 & \rightarrow \quad (1+\sqrt{7})x2 + 2x3 = 0 \quad \rightarrow x2 = \frac{-2}{1+\sqrt{7}}x3 \\ x1 + 4x2 - x3 = -\sqrt{7}x3 & \rightarrow \quad x1 + 4x2 + (\sqrt{7}-1)x3 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{1+\sqrt{7}} \\ \dfrac{-2}{1+\sqrt{7}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV. Méthode de la puissance itérée (Power method) :

La méthode de la puissance itérée ou méthode des puissances est un algorithme pour calculer la valeur propre dominante d'une matrice. Bien que cet algorithme soit simple à mettre en œuvre et populaire, il ne converge pas très vite.

Étant donné une matrice A, on cherche une valeur propre de plus grand module et un vecteur propre associé. Le calcul de valeurs propres n'est en général pas possible directement (avec une formule close) : on utilise alors des méthodes itératives, et la méthode des puissances est la plus simple d'entre elles.

a. Théorème :

Soit $A \in R^{n,n}$. on suppose que la valeur propre de plus grand module est simple et vérifie $|\lambda_1|>\max(|\lambda_i|)$ i=2,..n. et que A possède n vecteurs propres $u_1,..,u_n$ linéairement indépendants, autrement dit A est diagonalisable. Soit |.| une norme vectorielle.

On construit une suite $X^{(k)} = (X_1^{(k)},..,X_n^{(k)})^T$ d'élément de R^n par récurrence :

X(0) donné dans Rn

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \dfrac{\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si $X^{(0)}$ n'est pas orthogonal à l'espace propre à gauche associé à λ_1, alors :

- La suite $((\lambda_1/|\lambda|)^k X^{(k)}$ converge vers un vecteur propre associé à λ_1 quand $k \rightarrow +\infty$.
- $\lim_{k\to+\infty}(\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)})_j/x_j^{(k)} = \lambda_1$ pour au moins un $j \in \{1,\ldots,n\}$ où on a noté $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})^T$

Pour éviter que l'algorithme ne provoque un dépassement de capacité, on calcule souvent directement une version normalisée de X^n. Remarquons aussi que l'hypothèse sur X^0 n'est pas discriminante, si on choisit le vecteur au hasard, il n'a aucune chance d'être orthogonal à $\vec{v}1$.

De plus, elle ne permet de calculer qu'une seule des valeurs propres de A. Pour trouver les autres valeurs propres, on utilise souvent la méthode de déflation.

Remarques :

- La norme $X^{(0)}$ doit être normée à chaque étape pour éviter que les composantes du vecteur ne deviennent trop grandes ou trop petites.
- Le facteur de convergence vers la 1ère valeur propre est en $O(|\lambda_2/\lambda_1|)$. La convergence est donc d'autant plus rapide que $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$ sont distants l'un de l'autre.
- Il y a encore convergence vers la 1ère valeur propre et un vecteur propre correspondant lorsque la valeur propre $|\lambda_1|$ est multiple est vérifie $\lambda_1 = \lambda_2 = .. = \lambda_p$ et $|\lambda_p|>|\lambda_{p+1}|$.

Exemple :

Soit la matrice A suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a comme valeurs propres $\lambda 1=-10$ et $\lambda 2=2$ et respectivement les vecteurs propres suivants :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En partant de X(0) on calcule X(1) et ainsi de suite jusqu'à X(4) et on trouve les résultats suivants :

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X^{(1)} = \begin{pmatrix} -14 \\ -16 \end{pmatrix} \qquad X^{(4)} = \begin{pmatrix} -15008 \\ -14992 \end{pmatrix}$$

On observe que :

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{x}^{(k)}/(-10)^k = (-1{,}5, -1{,}5)^\top$$

b. Méthode de déflation

La méthode de déflation est une méthode, connaissant la valeur propre de plus grand module d'une matrice et un vecteur propre associé, de trouver la seconde valeur propre dont le module est le plus grand. Précisément, on part d'une matrice A d'ordre n dont les valeurs propres vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$. On suppose aussi dans un premier temps que la matrice A est symétrique. La méthode de la puissance nous donne la plus grande valeur propre en module, λ_1, et un vecteur propre associé, $\vec{v}_1$. On pose alors

$$B = A - \frac{\lambda_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 \, {}^t\vec{v}_1.$$

Alors B possède pour valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$... et 0. Il suffit d'appliquer à nouveau la méthode de la puissance, mais à B, pour obtenir une valeur approchée de λ_2, et un vecteur propre associé. On peut ainsi recommencer l'application du couple puissances itérées/déflation pour trouver toutes les valeurs propres de A.

Lorsque la matrice A n'est plus symétrique, la matrice B donnée ci-dessus n'a plus de raison d'avoir $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et 0 pour vecteurs propres (car les vecteurs propres de AA n'ont plus de raison d'être orthogonaux). Il faut raisonner un peu différemment, en utilisant la transposée de A.

En effet, A et A^t ont les mêmes valeurs propres, et si on applique la méthode de la puissance itérée à A^t, on trouve un vecteur propre w_1 de A^t associé à λ_1.

On pose cette fois $B = A - \dfrac{\lambda_1 \vec{v_1}\, {}^t\vec{w_1}}{{}^t\vec{w_1}\vec{v_1}}$ qui vérifie les mêmes propriétés que la matrice B précédente.

c. Méthode d'accélération et de convergence (théorème du quotient de Rayleigh):

En plus des conditions exigées pour les théorèmes précédents, si de plus A est symétrique, on définit une suite de réels R_k par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} \\ R_k = \dfrac{\mathbf{x}^{(k)\top}\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}}{\mathbf{x}^{(k)\top}\mathbf{x}^{(k)}} = \dfrac{\mathbf{x}^{(k)\top}\mathbf{x}^{(k+1)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2^2} \end{cases}$$

Si $X^{(0)}$ n'est pas orthogonal au sous-espace propre à gauche associé à u_1 alors la suite (R_k) converge et $\lim_{k \to \infty} R_k = \lambda_1$. La vitesse de convergence est $O(|\lambda_2/\lambda_1|^2)$.

d. Méthode de puissance itérée inverse :

Elle est utilisée pour déterminer la plus petite valeur propre en module d'une matrice diagonalisable lorsque cette valeur est distincte en module des autres valeurs propres. Au lieu d'appliquer la méthode de la puissance itérée à la matrice A-1, on décompose A en produit LU, puis on remplace la suite $X^{(k)}$ donnée par la suite :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Cette méthode est plus stable, elle possède plusieurs applications :

- Recherche d'un vecteur propre associé à une valeur propre connue.
- Recherche de la valeur propre λ (la plus proche) d'un nombre u donné et calcul d'un vecteur propre associé à λ.

Références bibliographiques :

- Jean-Michel Muller " Elementary Fucntions – Algorithms and implementation" 3rd Edition Birkhauser 2016.
- Vincent Lefèvre & Paul Zimmermann " Arithmétique flottante" rapport de recherche INRIA 2004.
- Guillaume Legendre "Introduction à l’analyse numérique et au calcul scientifique" Cours de Méthodes numériques - Université Paris Dauphine 2010.
- Takeo Takahashi "Analyse numérique" Cours électif CE33 Ecole des Mines de Nancy 2014.
- J-B. Campesato "localisation des valeurs propres : quelques propriétés sur les disques de gershgorin" 2009.
-

Annexe :

Voici quelques exemples corrigés :

Exemple2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \wp_A(z) = (2-z)(1-z)^2$$

$$\boxed{\lambda = 2} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 2X_1 \\ -8X_1 & - & 3X_2 & - & 4X_3 & = & 2X_2 \\ 6X_1 & + & 3X_2 & + & 4X_3 & = & 2X_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 0 \\ -8X_1 & - & 5X_2 & - & 4X_3 & = & 0 \\ 6X_1 & + & 3X_2 & + & 2X_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$v(2) = m(2) = 1$ Le calcul montre que les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

- $\boxed{\lambda = 1}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & X_1 \\ -8X_1 & - & 3X_2 & - & 4X_3 & = & X_2 \\ 6X_1 & + & 3X_2 & + & 4X_3 & = & X_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 0 \\ -8X_1 & - & 4X_2 & - & 4X_3 & = & 0 \\ 6X_1 & + & 3X_2 & + & 3X_3 & = & 0 \end{array}\right.$

$v(1) = m(1) = 2$ Le calcul montre que les vecteurs propres sont les colonnes $u\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$

Remarque : Quand $m(\lambda) = 1$, on a $v(\lambda) = 1$ puisque $1 \leqslant v(\lambda) \leqslant m(\lambda)$ et, du coup, $v(\lambda) = m(\lambda)$.

Conséquence : Une matrice qui a toutes ses valeurs propres simples, est diagonalisable.

8. **Cas des matrices réelles** : Quand A est réelle, $\wp_A(z)$ est à coefficients réels.

Théorème :
- Si λ est une valeur propre qui n'est pas réelle, $\overline{\lambda}$ aussi est une valeur propre et $m(\overline{\lambda}) = m(\lambda)$.
- Les vecteurs propres pour $\overline{\lambda}$ s'obtient en conjugant les vecteurs propres pour λ.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \wp_A(z) = (e^{+i\theta} - z)(e^{-i\theta} - z)$

- $\boxed{\lambda = e^{+i\theta}}$ $\left\{\begin{array}{rcrcl} -i\sin\theta X_1 & - & \sin\theta X_2 & = & 0 \\ \sin\theta X_1 & - & i\sin\theta X_2 & = & 0 \end{array}\right.$

les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

- $\boxed{\lambda = e^{-i\theta}}$ $\left\{\begin{array}{rcrcl} +i\sin\theta X_1 & - & \sin\theta X_2 & = & 0 \\ \sin\theta X_1 & + & i\sin\theta X_2 & = & 0 \end{array}\right.$

les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Exercice méthode de puissance itérée :

Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

- Calculer le polynôme caractéristique de cette matrice, ses valeurs propres, les vecteurs propres associés à ces valeurs.
- Appliquer la méthode de puissance puis de la puissance inversée pour trouver des valeurs approchées aux valeurs propres (erreur relative $\leq \varepsilon = 0.01$).

Solution :

Polynôme caractéristique :

$Det(A - \lambda I) = 0.$

$$A - \lambda I = \begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{matrix} \quad Det\ (A - \lambda I) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-1] - [(2-\lambda)-1] + [1-(1-\lambda)]$$

Polynôme caractéristique : $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda$

$Det(A - \lambda I) = 0 \implies -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \implies (\lambda_1 = 0 ; \lambda_2 = 2 - \sqrt{2} ; \lambda_3 = 2 + \sqrt{2})$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2} = 0.58578$; $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2} = 3.414213$

Vecteurs propres associés :

$AX = \lambda X \implies$ pour $\lambda_1 = 0$ $\quad \begin{Bmatrix} x1 + x2 + x3 = 0 \\ x1 + x2 + x3 = 0 \\ x1 + x2 + 2x3 = 0 \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} x3 = 0 \\ x1 = -x2 \end{Bmatrix} \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2} = 0.5858$ $\begin{Bmatrix} x1 + x2 + x3 = (2 - \sqrt{2})x1 \\ x1 + x2 + x3 = (2 - \sqrt{2})x2 \\ x1 + x2 + 2x3 = (2 - \sqrt{2})x3 \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} (\sqrt{2} - 1)x1 + x2 + x3 = 0 \\ x1 + (\sqrt{2} - 1)x2 + x3 = 0 \\ x1 + x2 + \sqrt{2}x3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{Bmatrix} x3 = -\sqrt{2}x1 \\ x1 = x2 \end{Bmatrix}$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} = 3.4142$, $\quad \begin{Bmatrix} x1 + x2 + x3 = (2 + \sqrt{2})x1 \\ x1 + x2 + x3 = (2 + \sqrt{2})x2 \\ x1 + x2 + 2x3 = (2 + \sqrt{2})x3 \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} (-\sqrt{2} - 1)x1 + x2 + x3 = 0 \\ x1 + (-\sqrt{2} - 1)x2 + x3 = 0 \\ x1 + x2 - \sqrt{2}x3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{Bmatrix} x3 = \sqrt{2}x1 \\ x1 = x2 \end{Bmatrix}$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul approché

Méthode de la puissance (la plus grande valeur de λ) :

$AX = \lambda X$ on commence par le vecteur initial : $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Itération 1 :

$$AX^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^{(1)} = 1 \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Itération 2 :

$$AX^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda^{(2)} = 4 \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} = 0.75 \\ \frac{3}{4} = 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \frac{|4-1|}{|4|} = \frac{3}{4} = 0.75 > \varepsilon$$

Itération 3 :

$$AX^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \quad \lambda^{(3)} = 3.5 \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.7143 \\ 0.7143 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \frac{|3.5-4|}{|3.5|} = 0.1428 > \varepsilon$$

Itération 4 :

$$AX^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 0.7143 \\ 0.7143 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4286 \\ 2.4286 \\ 3.4286 \end{pmatrix} \quad \lambda^{(4)} = 3.4286 \quad X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.7083 \\ 0.7083 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \frac{|3.4286-3.5|}{|3.4286|} = 0.0208 > \varepsilon$$

Itération 5 :

$$AX^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 0.7083 \\ 0.7083 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4167 \\ 2.4167 \\ 3.4167 \end{pmatrix} \quad \lambda^{(4)} = 3.4167 \quad X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.7073 \\ 0.7073 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \frac{|3.4167-3.4286|}{|3.4167|} = 0.0034 < \varepsilon$$

Méthode de la puissance inversée (la plus petite valeur de λ) :

$AX = \lambda X$ ==> $A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X = \lambda A^{-1}X \Rightarrow \frac{1}{\lambda} X = A^{-1}X$

Soit $B = A^{-1}$ et $\beta = \frac{1}{\lambda}$ donc on obtient : $BX = \beta X$ (la même écriture pour les vecteurs propres).

$B = A^{-1} =$

on commence par le vecteur initial : $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.