# M1 SIAD

# Module : Simulation et Prototypage

## Chapitre 03:

Réseaux de Petri

# Sommaire

# 1. Introduction

→ Un outil de modélisation **graphique** et **mathématique** permettant la modélisation, la simulation et l'analyse des systèmes dynamiques à événements discrets :

- En tant qu'outil graphique, les réseaux de Petri permettent la visualisation du comportement dynamique du système.
- En tant qu'outil mathématique, ils permettent la simulation et l'analyse des propriétés du système.

→ Ce formalisme bénéficie d'une riche panoplie de techniques d'analyse et d'outils de simulation. Les résultats de cette analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification ou l'amélioration.

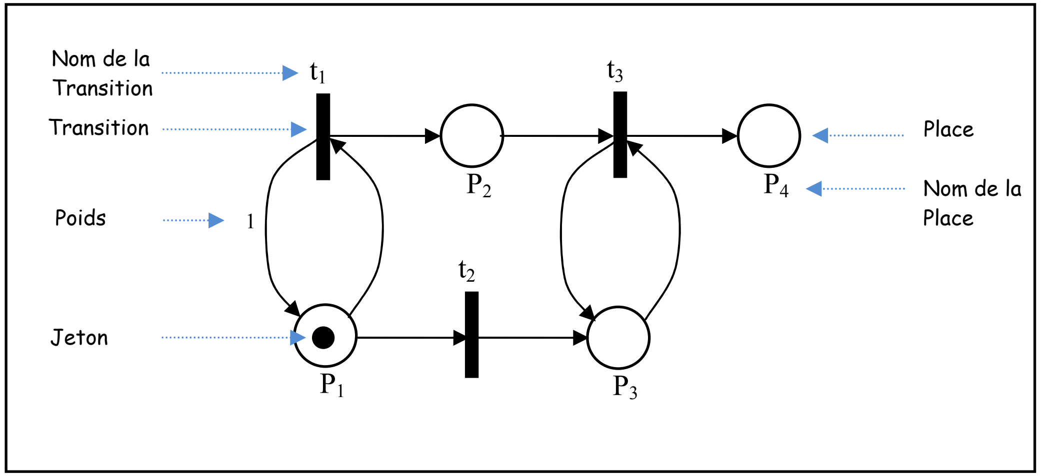
# 2. Définition

## 2.1 Définition Informelle

→ Un réseau de Petri est un graphe biparti orienté ayant deux types de nœuds: des *places* représentées par des cercles et des *transitions* représentées par des rectangles.

→ Les arcs du graphe ne peuvent relier que des places vers des transitions, ou des transitions vers des places.

→ Les places permettent la description des états possibles du système et les transitions permettent la description des événements ou les actions qui causent le changement de l'état; Pour cela un troisième élément est ajouté aux places et aux transitions: les jetons.




→ Une répartition des jetons dans les places à un instant donné est appelée marquage du réseau de Petri.

→ Un marquage donne l'état du système. Le nombre de jetons contenus dans une place est un entier positif ou nul.

→ Chaque arc possède un entier positif qui représente son poids. Par convention, lorsque le poids n'est pas précisé sur un arc, alors ce poids vaut 1.

→ Pour un marquage donné, une transition est franchissable si chacune de ses places d'entrée contient au moins un nombre de jetons supérieur ou égale au poids de l'arc reliant la place à la transition.

→ L'ensemble des transitions franchissables pour un marquage donné défini l'ensemble des changements d'états possibles du système depuis l'état correspondant à ce marquage. C'est un moyen de définir l'ensemble des événements auxquels ce système est réceptif dans cet état.

## 2.2 Définition Formelle

→ Un réseau de Petri est défini par le quintuplet $\mathrm{RdP} = (\mathrm{P}, \mathrm{T}, \mathrm{Pré}, \mathrm{Post}, \mathrm{M}_0)$

Où :

- $P$ = ensemble fini de places du réseau. Il contient des éléments $(p_i)$ qui vont modéliser les ressources utilisées dans le système.
- $T$ = ensemble fini de transitions du réseau. Il contient des éléments $(t_i)$ qui vont modéliser les actions sur les ressources.
- $Pré$ = une application de $P \, x \, T \rightarrow \mathbb{N}$ appelée application d'incidence avant. $Pré(p, t)$ est une valeur (un poids ≥ 0) associée à l'arc allant de la place $p$ à la transition $t$.
- $Post$ = une application de $T \, x \, P \rightarrow \mathbb{N}$ appelée application d'incidence arrière. $Post\ (t, p)$ est une valeur un poids ≥ 0) associée à l'arc allant de la transition $t$ à la place $p$.
- $M_0$ = une application de $P \rightarrow \mathbb{N}$ appelée application du marquage initial. $M_0(p)$ est une valeur ( ≥ 0) représente le nombre initial de jetons dans la place $p$.

## 2.3 Représentation Matricielle

→ Soit un réseau de Petri $RdP = (P, T, Pré, Post, M_0)$, avec $P = \{p_1, p_2, \dots\ p_m\}$ et $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

→ On appelle matrice d'incidence avant (des pré-conditions) $Pré$, la matrice $m \, x \, n$ ($m$ : nombre de places et $n$ : nombre de transitions) à coefficients dans $\mathbb{N}$ tel que $Pré(i, j)$ indique le nombre de jetons que doit contenir la place $p_i$ pour que la transition $t_j$ devienne franchissable.

→ On définit la matrice d'incidence arrière (des post-conditions) $Post$, la matrice $m \; x \; n$ tel que $Post(i,j)$ contient le nombre de jetons déposées dans $p_i$ lors du franchissement de la transition $t_j$.

→ La matrice $C = Post - Pré$ est appelée matrice d'incidence du réseau.

→ Le marquage d'un réseau de Petri est représenté par un vecteur de dimension $m$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

→ La représentation matricielle du réseau de Petri précédant est comme illustrée dans la Figure suivante

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3\}$

$$Pré = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'incidence avant

$$Post = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice d'incidence arrière

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice d'incidence

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de marquage M

# 3. Sémantique & Simulation

## 3.1 Simulation

→ La dynamique d'un réseau de Petri est déterminée par sa structure statique et par son état.

→ L'état d'un réseau de Petri se modélise à l'aide d'un marquage que l'on fait évoluer en franchissant des transitions, ce qui correspond à exécuter les actions qui lui sont associées.

→ Les règles suivantes permettent de représenter l'évolution des systèmes à modéliser:

*I.* Une transition $t$ est dite franchissable pour le marquage $M$ si pour toute place $p$ telle que $Pré(p,t) \neq 0$ est marquée d'au moins $Pré(p,t)$ jetons, C'est-à-dire, si $\forall p \in P, M(p) \geq Pré(p,t)$ *(*$M \geq Pré(.,t)$ pour la notation matriciel). On note ceci $M[t >$.

*II.* Une transition $t$ est franchie en retirant $Pré(p,t)$ jetons de chaque place $p$ telle que $Pré(p,t) \neq 0$ , et en ajoutant $Post\ (t,p')$ jetons à chaque place $p'$ telle que $Post(t,p') \neq 0$, c'est-à-dire, si $t$ est franchissable pour $M$, alors le franchissement de $t$ fait passer le marquage $M$ au marquage $M'$ de la façon suivante :

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - Pré(p,t) + Post(t,p).$$

$M' = M + C(.,t)$ pour la notation matriciel.

On note ceci $M[t > M'$, ce qui veut dire que lorsque la transition $t$ est franchie à partir d'un marquage $M$, il faut saisir $Pré(p,t)$ jetons à partir de chaque place d'entrée à la transition $t$ et déposer $Post\ (t,p)$ jetons dans chaque place de sortie de la transition $t$ ce qui permet de produire un nouveau marquage $M'$.

→ La notion de franchissement de transitions peut alors être étendue aux séquences de transitions.

→ Soit $s = t_1\, t_2\, \ldots\, t_n$ une séquence de transitions. La séquence $s$ est franchissable à partir de $M$ et conduit au marquage $M'$ ce qui sera note $M[s > M'$ si et seulement s'il existe des marquages $M = M_0\ , M_1, \ldots\ldots, M_n = M'$ $tels\ que\ \forall i :\ 0 \leq i\ \leq n-1 :\ \ M_i[t_{i+1}\rangle\, M_{i+1}$ .

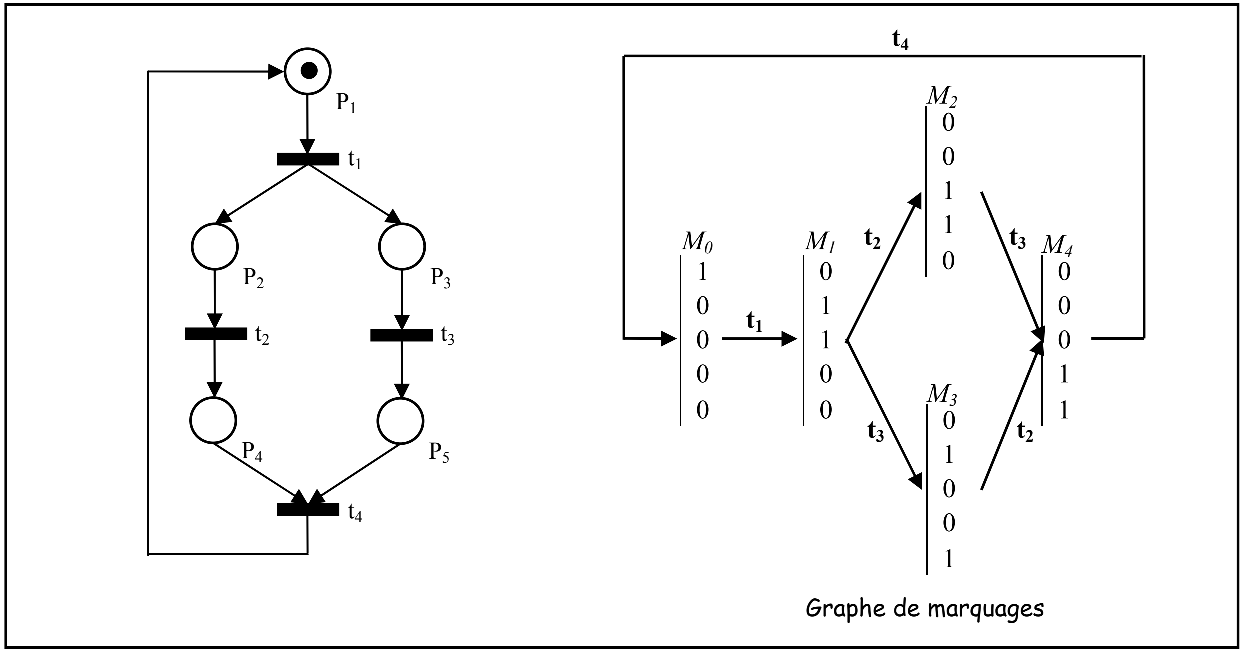
## 3.2 Graphe de Marquages

→ L'idée la plus naturelle pour étudier le comportement d'un réseau de Petri est de construire le graphe de tous ses marquages accessibles.

→ Le graphe des marquages accessibles est un graphe dont chaque sommet correspond à un marquage accessible et dont chaque arc correspond au franchissement d'une transition permettant de passer d'un marquage à l'autre.

→ On appelle $^*M$ l'ensemble des marquages accessible d'un réseau de Petri à partir d'un marquage initial.

→ La Figure suivante présente le graphe de marquage du réseau de Petri à droite de la Figure.




→ Deux situations peuvent alors se présenter :

1. ***Le graphe est fini.*** C'est la situation la plus favorable car dans ce cas toutes les propriétés peuvent être déduites simplement par inspection de ce graphe.

2. ***Le graphe est infini.*** Dans ce cas, on construit un autre graphe appelé "graphe de couverture" permettant de déduire certaines propriétés.

## 3.3 Graphe de Couverture

→ Un graphe de marquage ne peut plus être construit quand le nombre de marquages accessibles est infini. D'où le recourt au graphe dit de couverture. C'est un graphe à nombre de marquages fini. L'algorithme de construction du graphe de couverture est comme suit :

***Pas 01:*** A partir du marquage initial $M_0$, on indique toutes les transitions validées et les marquages accessibles successeurs correspondants. Si un des marquages est strictement supérieur à $M_0$, on met la variable $\omega$ pour chacune des composantes supérieures aux composantes de $M_0$. La variable $\omega$ matérialise le fait que la place peut contenir autant de jetons que souhaité.

***Pas 02 :*** Pour chaque nouveau marquage $M_i$, on fait soit le pas 2.1 soit le pas 2.2 suivants :

***Pas 2.1:*** S'il existe sur le chemin de $M_0$ jusqu'à $M_i$ (ce dernier exclut) un marquage

$$M_j = M_i \ (\forall p \in P, M_i(p) = M_j(p))$$

, alors $M_i$ n'a pas de successeurs.

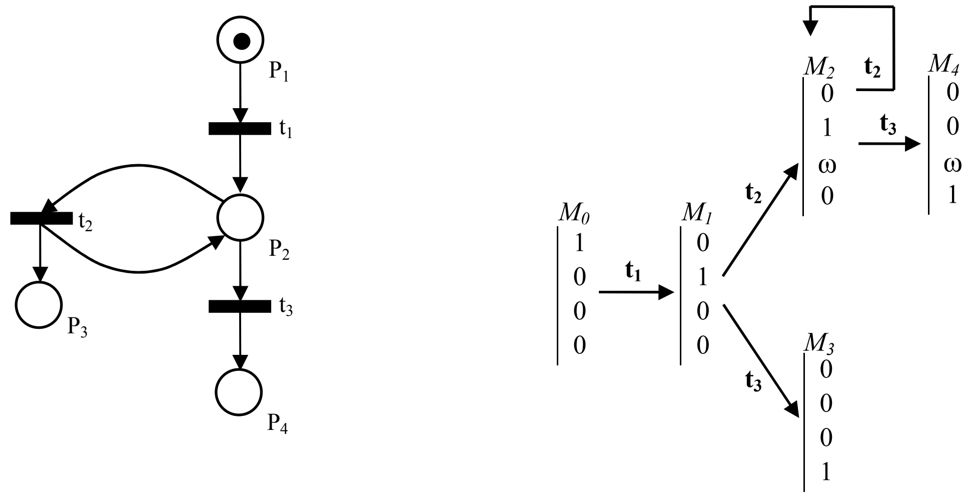
***Pas 2.2:*** s'il n'existe pas de marquage $M_j = M_i$ sur le chemin de $M_0$ à $M_i$, alors on prolonge le graphe en ajoutant tous les successeurs de $M_i$. Pour chaque successeur $M_k$ de $M_i$ :

- Une composante $\omega$ de $M_i$ reste une composante $\omega$ de $M_k$ .
- S'il existe un marquage $M_j$ sur le chemin de $M_0$ à $M_k$ tel que

$$M_k > M_j \ (\forall p \in P, M_k(p) > M_j(p))$$

, alors on met $\omega$ pour chacune des composantes supérieures aux composantes de $M_j$ .

→ La Figure suivante présente un exemple de graphe de couverture.




Graphe de couverture

**Remarque**

– Comme pour le graphe de marquages accessible, on peut déduire de l'observation du graphe de couverture un certain nombre de propriétés pour le réseau de Petri.

## 3.4 Vecteur d'Occurrence et l'Equation de Changement d'Etat

→ Soit $s = t_1 \, t_2 \, \ldots \, t_n$ une séquence de transitions ($s \in T^*$ ). $\vec{s}$ est un vecteur appelé le vecteur d'*occurrences*, où chaque élément $\vec{s}(t)$ de ce vecteur représente le nombre d'occurrence de $t$ dans $s$.

→ Par exemple, si on a un graphe contenant les transitions $t_1, t_2$, $t_3$ . si on prend la séquence de transition : $s = t_1 \, t_2 \, t_1$ le vecteur d'occurrence $\vec{s} = [\vec{s}(t_1), \vec{s}(t_2), \vec{s}(t_3)] = [2, 1, 0]$ .

→ A partir d'un marquage $M$ , on peut tirer une séquence de transitions $s$ et on trouve le marquage $M'$.

→ L'équation de changement d'état est :

$$M' = M + C.\vec{s}$$

***Remarque***

- Les résultats de l'équation, même s'ils sont toujours calculables, n'ont de sens que si la séquence *s* est effectivement franchissable. Pour le réseau de Petri de la Figure du diapo 9, calculer le marquage après la séquence de franchissement : $s = t_1 \, t_3 \, t_4 \, t_1 \, t_3 \, t_4 \, t_1 \, t_2$ ?

# 4. Propriétés des Réseaux de Petri

## 4.1 Les Propriétés Structurelles

Les propriétés structurelles dépendent uniquement de la topologie du réseau. Il s'agit de faire ressortir les propriétés statiques du système étudié. Ces différentes propriétés sont indépendantes du marquage.

- ***Les conflits*** dans un réseau de Petri (Figure (a) et (b)): Si une place ce trouve en amont de plusieurs transitions. On note le conflit de la place $P_i$ : $K = (P_i, \{T_1, T_2, \dots\})$ ; Où $T_1, T_2, \dots$ sont les transitions en concurrence. On parle de *conflit structurel* car cela ne dépend pas du marquage. Dans certains cas, le franchissement de l'une des transitions peut empêcher le franchissement de l'autre (la Figure (a)). Le conflit devient *conflit effectif* quand il y a effectivement conflit, cela dépend du marquage (la Figure (b)).
- ***RdP à choix libre*** (Figure(c)) : Un réseau de Petri à choix libre est un réseau dans lequel pour tout conflit ($K = (P_i, \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$) aucune des transitions $T_1, T_2, \dots, T_n$ ne possède aucune autre place d'entrée que $P_i$.
- ***RdP simple*** (Figure (d)) : Un réseau de Petri simple est un réseau de Petri dans lequel chaque transition ne peut être concernée que par un conflit au plus.
- ***RdP pur*** (Figure (e)): Un réseau de Petri pur est un réseau dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit à la fois place de sortie de cette transition.
- Un réseau de Petri est un ***graphe d'état*** (Figure (f)) si et seulement si toute transition a exactement une seule place d'entrée et une seule place de sortie.

- Un réseau de Petri est un ***graphe d'événement*** (Figure (g)) si et seulement si chaque place possède exactement une seule transition d'entrée et une seule transition de sortie.

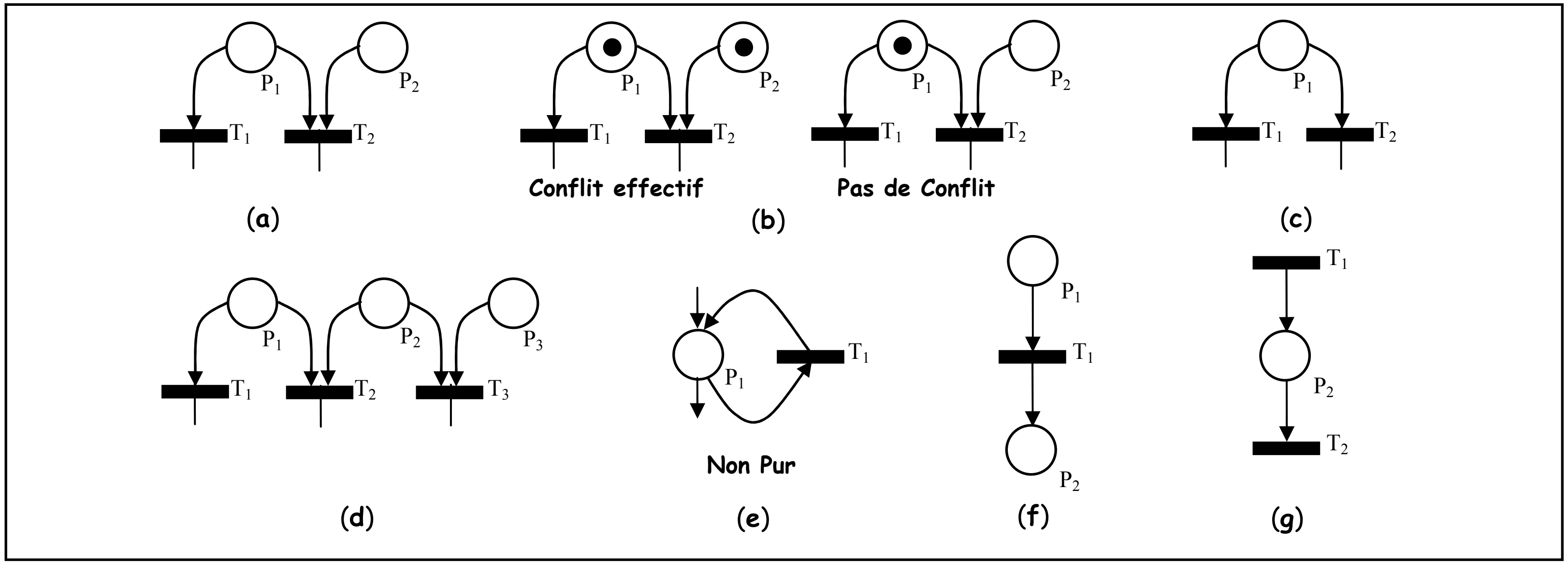



***Figure: Détails des Propriétés Structurelles des RdPs.***

## 4.2 Les Propriétés Comportementales

Ces propriétés dépendent à la fois du marquage initial $M_0$ et de la structure du réseau. Il s'agit ici de faire ressortir les propriétés dynamiques du système étudié.

- ***Existence d'un marquage:*** Pour toute séquence de transitions $s$, il existe un marquage $M$ tel que celle-ci soit franchissable.
- ***Monotonie:*** L'augmentation de jetons dans les places d'un marquage préserve la possibilité de franchissement d'une séquence de transitions.

- ***Séquence répétitive:*** Une séquence de transitions est dite répétitive si pour tout marquage $M$ tel que : $M[s >$ alors $M[s^* >$. La notion de séquence répétitive permet de définir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau marqué ait la possibilité d'être infiniment actif.
- ***Caractère borné:*** Cette propriété définit et caractérise la possibilité pour une place d'accumuler une quantité bornée ou pas de jetons au cours de l'évolution d'un réseau.
- ***Place k-bornée, non bornée:*** Pour un réseau de Petri et un marquage $M_0$, une place $p$ du réseau marqué $(RdP, M_0)$ est k-bornée si pour tout marquage $M$ accessible depuis $M_0, M(p) \leq k$. Dans le cas contraire la place $p$ est dite non-bornée.
- ***Réseau borné :*** Un réseau marqué est borné si toutes ses places sont bornées. Les réseaux 1-bornés sont appelés des réseaux *saufs*.
- ***Activité d'un réseau :*** La notion d'activité d'un réseau recouvre deux classes de définitions. La première concerne l'activité individuelle des transitions, la seconde concerne l'activité globale d'un réseau (Indépendamment de transitions particulières).
- ***Pseudo-vivacité:*** Un réseau de Petri $(RdP, M_0)$ est dit pseudo-vivant si pour tout marquage accessible depuis le marquage initial, il existe toujours une transition $t$ qui puisse être franchie.
- ***Quasi-vivacité d'une transition:*** La quasi-vivacité d'une transition signifie que depuis le marquage initial, cette transition peut être franchie au moins une fois. Par conséquent, une transition qui n'est pas quasi-vivante est inutile.

- ***Quasi-vivacité d'un réseau:*** Un réseau est quasi-vivant si toutes ses transitions le sont.
- ***Monotonie et quasi-vivacité:*** La propriété de monotonie présentée plus haut, implique qu'une transition quasi-vivante pour $(RdP, M)$ le reste pour $(RdP, M')$.
- ***Vivacité :*** Les deux propriétés précédentes assurent une certaine correction du système mais elles ne permettent pas d'affirmer que, dans n'importe quel état atteint, le système dispose encore de toutes ses fonctionnalités. Autrement dit, si toute transition peut toujours être ultérieurement franchie à partir d'un état quelconque du système. Par exemple, dans un réseau quasi-vivant une transition pourra être franchie une seule fois.
- ***Vivacité d'une transition:*** La vivacité d'une transition exprime le fait que quelque soit l'évolution du réseau à partir du marquage initial, le franchissement à terme de cette transition est toujours possible.
- ***Vivacité d'un réseau:*** Un réseau est vivant si toutes ses transitions le sont.
- ***État d'accueil:*** Un réseau de Petri possède un état d'accueil $M_a$ pour un marquage initial $M_0$ si pour tout marquage accessible $M_i$ il existe une séquence $s$ telle que $M_i\ [s > M_a$.
- ***RdP réversible:*** Un réseau de Petri est réversible pour un marquage initial $M_0$ si $M_0$ est un état d'accueil.
- ***Absence de blocage:*** Cette propriété est plus faible que celle de vivacité. Elle implique seulement que le réseau a toujours la possibilité d'évoluer.
- ***Marquage puit:*** Un marquage puit est un marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable. Un réseau marqué est sans blocage si aucun de ses marquages accessibles n'est un marquage puit.