M1 SIAD

Module : Simulation et Prototypage

Chapitre 02:

Chaînes de Markov

Sommaire

1. Introduction

→ Les systèmes que nous considérons dans ce chapitre sont des systèmes dynamiques faisant intervenir de l'aléatoire dans leurs évolutions au cours du temps.

→ Les Chaînes de Markov sont un outil permettant de modéliser les processus dans lesquels une réalisation dépend de la réalisation précédente.

2. Rappels de Probabilités

→ On fait appel aux probabilités afin de modéliser une expérience (ou un système) sans disposer de l'information nécessaire pour la décrire exactement.

Exemple : on jette un dé et on lit le numéro apparu sur la face supérieure. Pour prédire si le résultat est : $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, il faut disposer d'une modélisation complète et parfaite du dé, de l'état de l'air, du numéro sur face supérieure au moment du jet de dé, de la vitesse à laquelle il est lancé, etc.

➪ Dans ces expériences, le résultat est impossible à prévoir avec certitude, mais on connait l'ensemble des résultats possibles.

2.1 Evénement

→ On considère un ensemble S qui représente l'ensemble des issues possibles d'une expérience. Dans l'exemple du jet d'un dé, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. C'est un ensemble discret.

→ Un évènement A est un sous-ensemble de l'ensemble S des issues possibles pour l'expérience. Si le résultat de l'expérience appartient à A, on dit que l'évènement A s'est réalisé.

Exemple : on peut s'intéresser à l'évènement $A = \{2, 4, 6\} \subset S$ que le jet d'un dé donne un nombre pair.

Remarques

- Les évènements composés d'un seul élément de S sont appelés événements élémentaires.
- L'ensemble S tout entier est l'évènement certain.
- Le sous ensemble ϕ de S est appelé l'évènement impossible.
- Etant donnés deux évènements $A\ et\ B$:
  - Si le résultat de l'expérience appartient à $A \cup B$, on dira que l'évènement A ou l'évènement B s'est produit.
  - Si le résultat de l'expérience appartient à $A \cap B$, on dira que les deux évènements A et B se sont produits.
  - Si $A \cap B = \phi$, les deux évènements ne peuvent se produire simultanément : ils sont dits mutuellement exclusifs.
  - Si le résultat de l'expérience n'appartient pas à A, c'est qu'il appartient à son complémentaire $\overline{A} = \{e \in S |\ e \notin A\}$ dans S.
- Un ensemble d'évènements $A1, A2, \ldots$ forment une partition de S s'ils sont mutuellement exclusifs ($Ai \cap Aj = \phi\, si\ i \neq j$) et couvent l'ensemble des issues possibles de l'expérience ($\cup i\ Ai = S$).

2.2 Probabilité d'un Evènement

→ La probabilité $P[A]$ de l'évènement A est la fréquence relative à laquelle se produit cet évènement au cours d'une expérience répété un nombre infini de fois :

$$P[A] = \lim_{N\to\infty} N(A)/N$$

Quelques Propriétés

- $0 \le P[A] \le 1$
- $P[S] = 1$
- $P[\phi] = 0$
- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
- $P[A \cup B] = P[A] + P[B]\ si\ A \cap B = \phi$
- $P[\bar{A}] = 1 - P[A]$
- $si\ A \subset B\ alors, P[A] \le P[B]$

2.3 Probabilité Conditionnelle

→ L'occurrence d'un évènement A peut dépendre du fait que l'évènement B s'est produit. La probabilité de l'évènement A sachant que B s'est produit est donnée par :

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \text{ On a donc : } P[A \cap B] = P[A/B].P[B]$$

Exemple : Soit trois cartes, la première carte a ses deux faces rouges (RR). La deuxième carte a ses deux faces bleues (BB). Finalement, la troisième carte a une face rouge et l'autre bleu (RB). On tire une carte et on ne regarde que la face dessus, elle est rouge. Quelle est la probabilité que l'autre face soit bleue ?

Réponse: $P[RB/R] = 1/3$

2.4 Indépendance

→ Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si $P[A \cap B] = P[A].P[B]$. Dans ce cas, on a :

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = P[A]$$

C'est-à-dire, Savoir que B s'est produit n'apporte aucune information sur la probabilité que A se produit.

2.5 Variable Aléatoires

→ Si on lance 10 fois une pièce de monnaie à pile ou face. $S = \{pppppppppp, pppppppppf, \dots, ffffffffff\}$, $|S| = 2^{10}$.

→ Généralement, on s'intéresse au nombre de fois où la pièce est tombée sur face que la séquence de piles et de faces obtenue.

Exemple : si on obtient le résultat $pppfppffpf$, ce qui nous intéresse c'est que la pièce est tombée 4 fois sur face. De manière générale, on est intéressé par une mesure (un nombre) associé à l'expérience que par le résultat proprement dit. Cette mesure est appelée ***variable aléatoire***.

→ Une variable aléatoire est une fonction :

$$\begin{aligned} X : \; S &\longrightarrow E \\ e &\longrightarrow X(e) \end{aligned}$$

qui associée à chaque issue e possible un élément de E (espace d'état).

→ L'image d'une variable aléatoire est l'ensemble : $S_x = \{x \in E \;/\; \exists e \in S, X(e) = x\}$

→ L'image d'une variable aléatoire est donc l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Si cet ensemble est fini ou dénombrable, on dit que cette variable aléatoire est *discrète*. Sinon, elle est *continue*.

Exemple : on peut définir l'évènement $[X = x] = \{e \in S / X(e) = x\}$.

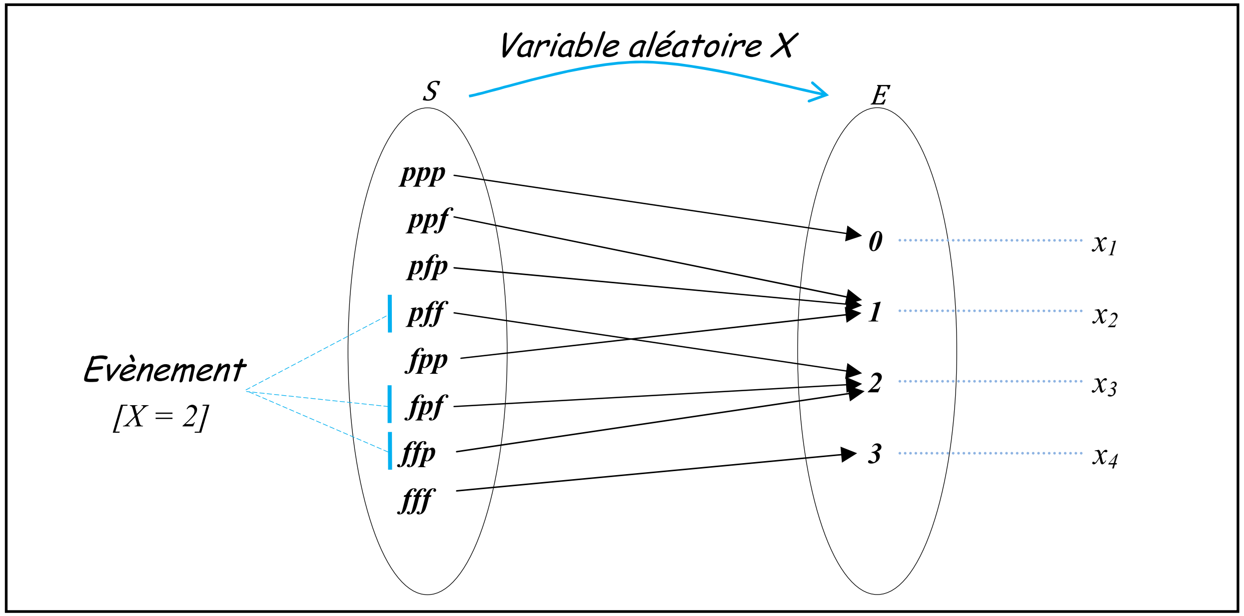
Exemple : On lance une pièce de monnaie trois fois. L'ensemble $S = \{ppp, ppf, pfp, pff, fpp, fpf, ffp, fff\}, |S| = 8$

Si on suppose la pièce équilibrées, on peut considérer que ces huit issues sont équiprobables.

Notions X le nombre de cotés face obtenus. X est une variable aléatoire qui prend les valeurs : $0, 1, 2$ ou 3.

$X_S = E = \{0, 1, 2, 3\}$.

On note, par exemple, $[X = 2]$ l'évènement "le coté face est sorti exactement deux": $[X = 2] = \{e \in S / X(e) = 2\}$.



Remarques

- On n'a pas besoin de probabilité pour définir une variable aléatoire.
- A chaque valeur x_i de X on associe les probabilités p_i de l'évènement$[X = x_i]$, on obtient ce qu'on appelle une *loi de probabilité* ou une *distribution de probabilité* de la variable aléatoire X.

Pour illustrer, sur l'exemple précédant à la valeur $X = 2$, on peut associer la probabilité $P = 3/8$ puisque on a 3 chances sur 8 d'obtenir exactement deux fois le coté face.

3. Processus Stochastique

→ Un processus stochastique ou aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ est une séquence de variables aléatoires fondées sur le même ensemble des issues S, et indexées par le temps t.

→ Pour t fixé, X_t est simplement une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un certain espace d'états suivant une distribution qui peut dépendre de t.

→ le temps t peut être *continu* ou *discret* (c'est-à-dire $t = 1, 2, \dots$).

→ De même, l'ensemble des états possibles pour le processus peut être *continu* ou *discret* (c'est-à-dire $X_t = 1, 2, \dots$).

→ Si on tire aléatoirement une valeur x_i de X_i pour chaque valeur de t, la séquence de valeur obtenues est appelée une trajectoire du système. Il représente une succession d'états que le système peut prendre au cours du temps.

→ Les différentes variables aléatoires ne sont en général pas indépendantes les unes des autres. Ce qui fait réellement l'intérêt des processus stochastiques est la dépendance entre les variables aléatoires.

→ Pour spécifier entièrement un processus stochastique, il suffit de spécifier :

1. la loi de probabilité de la première variable aléatoire X_1, qui spécifie donc l'état du processus lors de la première observation.
2. pour toute valeur de $t > 1$ la probabilité conditionnelle : $P[X_t = j | X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}]$.

→ Un processus stochastique représente une évolution dans le temps d'une variable aléatoire.

- On peut s'intéresser au comportement transitoire du processus, c'est-à-dire à l'évolution des fonctions de *distribution de probabilité* de la variable aléatoire X au cours du temps t.

- On s'intéresse plutôt au comportement stationnaire (c'est-à-dire à l'équilibre) qui est obtenu si la *distribution de probabilité* converge vers une distribution de probabilité unique indépendante du temps quand $t \longrightarrow \infty$.

Remarques

– Il est noter que le régime permanent peut n'exister que sous certains condition et il faut soigneusement établir ces conditions quand on étudie un processus stochastique.

4. Processus Markovien

→ Soit un processus stochastique$(X_t)_{t\geq 0}$. Considérons des instants dans le temps $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. On suppose connaître l'état du processus à l'instant $t_i, i = 1, 2, \ldots, n$. l'état x_n est l'état courant et on s'intéresse à son état future x_{n+1} à l'instant t_{n+1} . Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ a la propriété Markovienne si :

$$P\left[X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \middle| X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_1} = x_1\right] = P\left[X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \middle| X_{t_n} = x_n\right]$$

et ce quelque soit n et les instants considérés.

→ Autrement dit, cette équation signifie que le processus est Markovien si son état dans le future ne dépend que de l'état présent et pas des ses états passés. L'état courant du processus contient toute l'information permettant de caractériser son évolution.

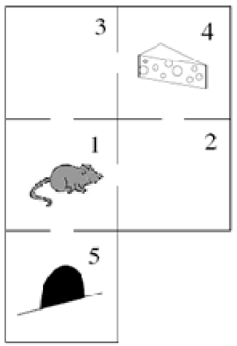
→ Un processus Markovien à espace d'état discret est appelée une **chaine de Markov**.

5. Chaine de Markov à temps discret

Les Chaînes de Markov sont un outil fondamental pour modéliser les systèmes dynamique qui évoluent dans le temps. Ces systèmes admettent un certain nombre d'états différents. L'état change au cours du temps discret. A chaque changement, le nouvel état est choisi avec une distribution de probabilité fixée au préalable, et ne dépendant que de l'état présent.

5.1 Exemple introductif

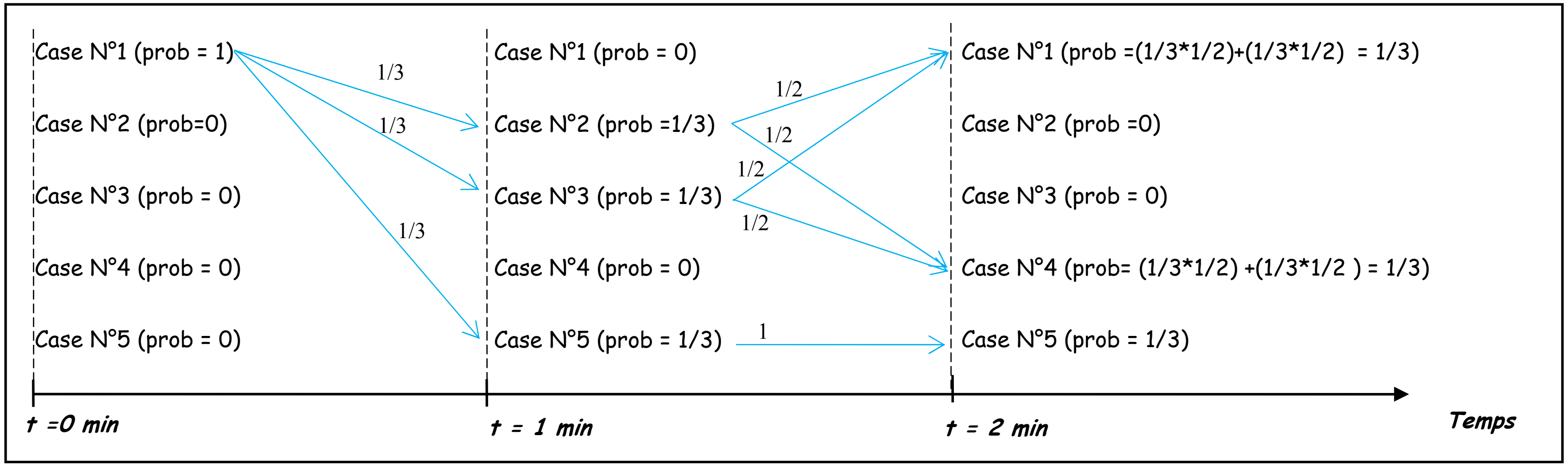
→ Une souris se déplace dans le labyrinthe qui comporte 5 cases numérotées de 1 à 5. Initialement, elle se trouve dans la case N°1. A chaque minute, elle change de case en choisissant l'une des cases adjacentes de manière équiprobable. Dès qu'elle atteint soit la nourriture (la case N°4), soit sa tanière (la case N°5), elle y reste.



→ On se pose alors les questions suivantes :

1. Avec quelle probabilité la souris atteint-elle la nourriture plutôt que sa tanière?
2. Au bout de combien de temps atteint-elle sa tanière ou la nourriture?

→ On peut essayer de répondre à ces questions en construisant un arbre décrivant les chemins pos sibles :



→ Cette manière de faire est très compliquée, et devient rapidement impossible à mettre en œuvre quand la taille du labyrinthe augmente. Dans la suite, on va développer l'outil de <u>Chaîne de Markov</u> qui permet de résoudre ces types de problèmes.

5.2 Définition

Une Chaîne de Markov à temps discret un processus Markovien $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ à temps discret ($n \in \mathbb{N}$) dont l'espace d'états est discret ($X_n \in \{0, 1, 2, \dots \}$).

Remarque

– Le nombre d'états peut être fini.

5.3 Probabilités de Transition

→ Une Chaîne de Markov peut être caractérisée par ses probabilités de transition en une seule étape.

$$p_{ij} = P[X_{n+1} = j / X_n = i]$$

p_{ij} est la probabilité de passer de i à j en un pas de temps.

→ On note que ces probabilités ne dépendent pas de l'instant n considéré. On dit dans ce cas que la Chaîne de Markov est *homogène* dans le temps.

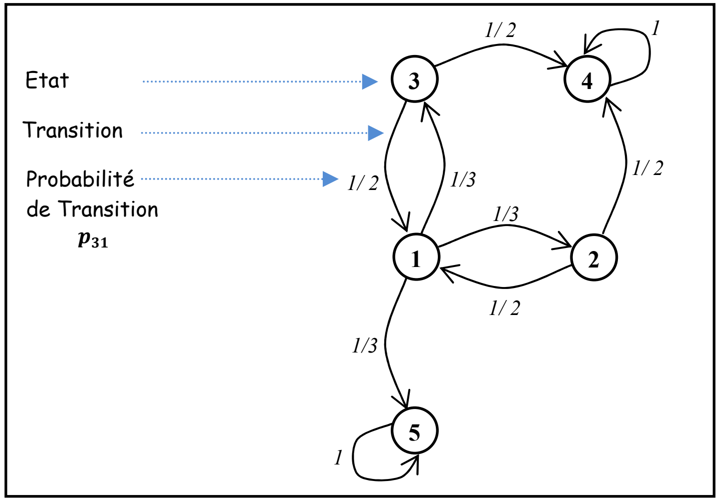
5.4 Représentation

→ Une Chaîne de Markov à temps discret peut être représentée de deux façons :

Un Graphe Orienté

– Les nœuds du graphe représentent les états que peut prendre le processus, et les arcs représentent les transitions entre états.

– Les poids des arcs correspondent aux probabilités de réaliser ces transitions.



Remarque

– La somme des poids des arcs sortant d'un nœud vaut 1.

Une Matrice des Probabilités de Transition

On appelle matrice des probabilités de transition la matrice carrée $P = [p_{ij}]$ d'ordre n (où n est le nombre d'éléments de l'espace d'états E) :

- Les éléments de la matrice correspondent aux probabilités de transition entre états.
- La ligne i de cette matrice donne la probabilité de passer de l'état i vers tout autre état j (y compris l'état i lui-même) en un pas de temps.
- La somme des éléments d'une ligne est égale à 1 ($\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$). On parle alors de matrice *stochastique*.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Reprenons l'exemple du labyrinthe, la matrice P est donnée par :

$$P = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

→ Si le processus passe de l'état i à l'état j en deux étapes, c'est qu'il est passé par un état k (qui peut être i ou j).

On a donc la probabilité $p_{ij}^{(2)}$ de passer de l'état i à l'état j en deux étapes : $p_{ij}^{(2)} = \sum_{k}^{n} p_{ik}p_{kj}$

→ Il est claire que $p_{ij}^{(2)}$ est l'élément (i, j) de la matrice $P^2 = PP$.

→ On peut ainsi établir que les probabilités de transitions $p_{ij}^{(n)}$ en n étapes s'obtiennent avec $P^{(n)}$, c'est-à-dire en mettant la matrice P à la puissance n. Puisque on a $P^n = P^m P^{n-m}$, il vient : $p_{ij}^{(n)} = \sum_k^n p_{ik}^m p_{kj}^{n-m}$, $0 \leq m \leq n$

→ Cette équation est connue sous le nom d'équation de *Chapman-Kolmogrov*. Elle exprime que pour passer de i à j en n étapes, il faut passer par un état k à l'étape m.

5.5 Probabilités d'Etats

→ On note $\pi_i^{(n)} = P[X_n = i]$ la probabilité que la Chaîne de Markov soit dans l'état i à l'instant n.

→ Pour manipuler ces probabilités d'états, on utilise le vecteur $\pi^{(n)} = [\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \dots]$ dont la somme des termes vaut 1.

→ Chaque Chaîne de Markov a un état initial. L'état initial d'une Chaîne de Markov est défini par le vecteur de probabilités : $\pi^{(0)} = [\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, \dots]$ appelé la distribution de l'état initial.

→ Puisque la matrice P donne les probabilités de transition en une étape, on a : $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P$

→ On peut déduire récursivement que : $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P = \pi^{(n-2)}P^2 = \cdots = \pi^{(0)}P^n$

6. Classification des Etats

→ Les états se classifient en fonction de la possibilité que le processus les atteindre les uns à partir des autres.

État Accessible depuis un autre état

Soient i et j deux états de E. On dit que j est *accessible* depuis i si et seulement si il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une suite d'états $k_0 = i, k_1, \ldots, k_n = j$ tels que $p_{ik_1} p_{k_1k_2} \ldots p_{k_{n-1}j} > 0$.

De façon générale, l'état j est accessible depuis i si et seulement si il existe n tel que $\exists\, n, p_{ij}^{(n)} > 0$.

États Communiquent

On dit que deux états i et j *communiquent* si l'état j est accessible de l'état i et l'état i est accessible de l'état j. La relation de communication est transitive, si l'état i communique avec l'état j et l'état j communique avec l'état k, alors l'état i communique avec l'état k.

Classe des états Communiquent

Les états peuvent être partitionnés en un ou plusieurs classes ou sous-ensemble d'états communiquent entre eux. Ces classes sont appelées les classes *irréductibles*.

Chaîne de Markov Irréductible

Si tous les états de E communiquent entre eux, E tout entier est la seule classe irréductible. On dit alors que la chaîne est *irréductible*.

État Absorbant

Un état est dit *absorbant* si le processus ne peut pas sortir de cet état. Autrement, l'état i est absorbant si et seulement si $p_{ii} = 1$.

État transitoire

On dit que i est un état *transitoire* si après y avoir accéder, le processus peut ne plus y revenir. Autrement dit, un état i est transitoire si et seulement si il existe un état $j\ (j \neq i)$ accessible de l'état i et j n'est pas accessible de l'état i. Par conséquent, un état transitoire est un état dans lequel on ne passe qu'un nombre fini de fois.

État récurent

On dit que i est un état *récurrent* si après y avoir accédé, le processus y reviendra. Autrement dit, un état i est récurrent si et seulement s'il n'est pas transitoire.

Remarque

- Tous les états d'une chaine de Markov irréductible sont récurent.

Période d'un état

On dit que l'état i est de période d_i si d_i égale au plus grand commun diviseur (P.G.C.D) de tous les n pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$. $d_i = PGCD\ (n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0)$

Si $d_i = d > 1$, on dit que i est *périodique* de période d.

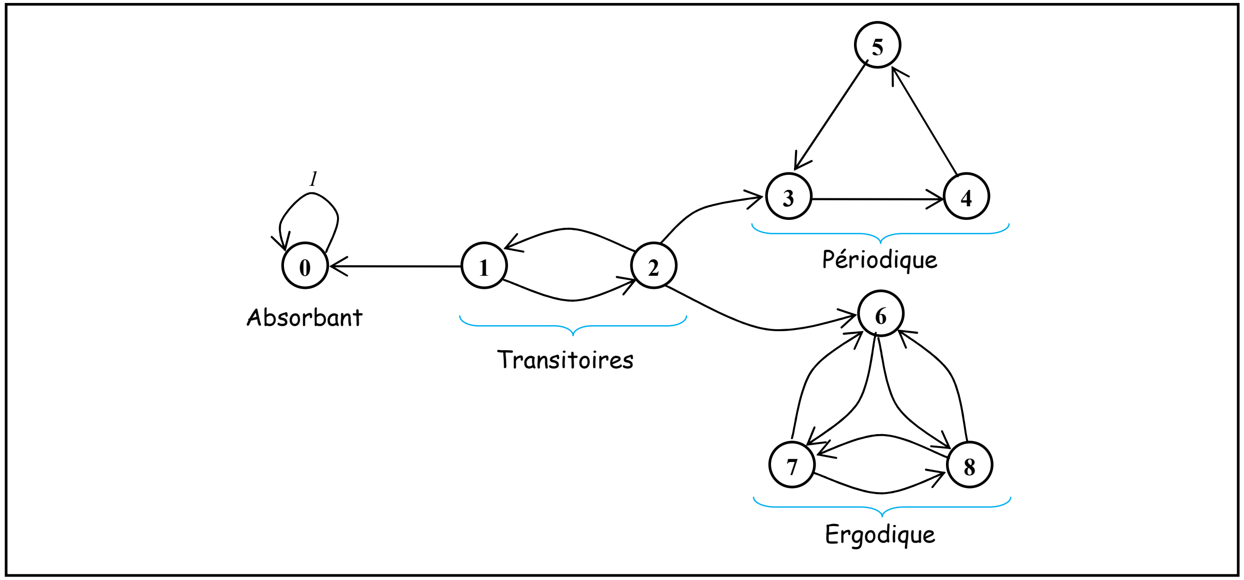
Apériodique

L'état i est *apériodique* lorsque $d_i = d = 1$.

Ergodique

Un état récurrent et apériodique est dit *ergodique*. Une Chaîne de Markov est dite *ergodique* si tous ses états sont ergodiques.

Toutes ces définitions sont illustrées sur la Figure suivante :



7. Sémantique & Exécution

7.1 Régime Transitoire

→ L'analyse d'une chaine de Markov au régime transitoire consiste à déterminer le vecteur des probabilités d'états $\pi^{(n)}$ à l'instant n. Il est à noter que l'évolution de distribution $\pi^{(n)}$ dépend de la distribution initiale. Rappelons que : $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P = \pi^{(n-2)}P^2 = \cdots = \pi^{(0)}P^n$

Dans l'exemple du labyrinthe, la matrice de transition à 2 pas est donnée par :

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Partant de l'état i à l'instant initial, les probabilités de transition en 2 étapes à partir de cet état est donnée par la ligne i de P^2. Ainsi, si à l'instant initial la chaine de Markov est dans l'état 1 de façon certaine ($\pi^{(0)} = [1, 0, 0, 0, 0\,]$), alors on sait que la distribution de probabilités des états à l'instant 2 est donnée par :

$$\pi^{(2)} = \pi^{(0)}p^2 = [\tfrac{1}{3}, 0, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \ .$$

La matrice de transition à 3 pas est donnée par :

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 1/9 & 1/3 & 4/9 \\ 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La distribution de probabilités des états à l'instant 3 est donnée par :

$$\pi^{(3)} = \pi^{(0)} p^3 = [0, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{9}\ ]\ .$$

Si on continue le calcule jusqu'à l'ordre 8 (8 transitions), on a

$$P^8 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/81 & 0 & 0 & 40/81 & 40/81 \\ 0 & 13/1296 & 13/576 & 85/108 & 85/324 \\ 0 & 13/1296 & 13/576 & 85/108 & 85/324 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La distribution de probabilités des états à l'instant 8 est donnée par :

$$\pi^{(8)} = \pi^{(0)} p^8 = [\tfrac{1}{81}, 0, 0, \tfrac{40}{81}, \tfrac{40}{81}]$$

7.2 Régime Stationnaire

- Après un grand nombre de transitions ($n \longrightarrow \infty$), la probabilité que la Chaîne de Markov soit dans un état donné est constante et ne dépend pas de l'état initial.
- On dit que la Chaîne de Markov atteint le régime stationnaire ou un état d'équilibre.
- La distribution des états dans ce régime est la loi stationnaire ou loi limite. On note cette loi par π tel que : $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi^{(n)}$, et les probabilités d'états sont constantes d'une transition à l'autre, donc : $\pi = \pi \ P$
- Il est noter que le régime stationnaire n'est pas atteint par tous les systèmes, il y a des systèmes qui n'atteindront jamais l'état stationnaire. Dans ce cas, soit y a un problème quelque part dans le système, soit le système en question dépend d'autre facteurs qui changent a chaque fois.

Théorème de Kolmogrov

Pour une Chaîne de Markov irréductible et (apériodique) ergodique, la distribution stationnaire $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi^{(n)}$ existe et est indépendante de l'état initial. La distribution stationnaire π peut être calculée en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \displaystyle\sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Remarque

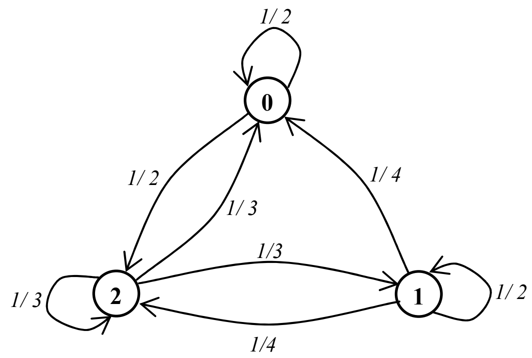
- Si au moins une des puissances de la matrice P de la chaîne de Markov n'a que des termes strictement positifs, alors la les conditions du théorème de Kolmogrov sont les mêmes.

→ Il est clair que la Chaîne de Markov de l'exemple du labyrinthe ne vérifie pas les conditions du théorème de Kolmogrov. La Chaîne de Markov n'est pas irréductible, les états *4* et *5* sont Absorbants.

Exemple

Considérons une Chaîne Markov définie par la matrice de transition P et le graphe de transition suivants :

$$P = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$



→ Tous les états communiquent, donc la Chaîne est irréductible. Tous les états sont de manière évidente de période *1* , donc la chaine est apériodique. D'après le théorème de Kolmogrov, on peut dire qu'il existe une distribution stationnaire π.

π est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \displaystyle\sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_0 \\ 0\,\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = 0 & \text{...... (1)} \\ 0\,\pi_0 - \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = 0 & \text{...... (2)} \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_2 = 0 & \text{...... (3)} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 & \text{...... (4)} \end{cases}$$

→ On a : $(3) - (1) \Rightarrow \pi_0 - \pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \pi_0$ ...... *(5)*

→ On remplace *(5)* dans *(3)*, on obtient: $\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\pi_1 = \frac{1}{6}\pi_0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{4}{6}\pi_0$ ...... *(6)*

→ On remplace *(5)* et *(6)* dans *(4)*, on obtient: $\pi_0 + \frac{4}{6}\pi_0 + \pi_0 = 1 \Rightarrow \frac{16}{6}\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \pi_2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

→ On a donc : $\pi_1 = \frac{4}{6}\frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

→ La distribution stationnaire π = $[\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$.

8. Chaîne de Markov Absorbante

→ Une Chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe au moins un état absorbant et s'il on peut passer de n'importe quel état à un état absorbant.

$$\forall\, i \in E, \exists\, k \text{ absorbant}, k \text{ est accessible depuis } i$$

→ Lorsqu'on a affaire à une Chaîne de Markov absorbante, on est intéressé par les deux questions suivantes :

➔ Combien de temps faudra-t-il pour que le processus soit absorbé, étant donné son état initial ? On appelle n_i le temps moyen jusqu'à l'absorption en partant de i.

➔ S'il existe plusieurs états absorbants, quelle est la probabilité pour un processus d'être absorbé par un état donné. On appelle b_{ij} la probabilité que le processus soit absorbé dans j si son état initial est i.

Théorème 1

Les quantités n_i sont solution du système d'équations: $n_i = 1 + \sum_{k\in S'} p_{ik}\, n_k$

où i est un état non absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants.

Théorème 2

Soit j un état absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants. Alors les probabilités $b_{ij}(i \in S')$ sont solution du système d'équations : $b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\in S'} p_{ik}\, b_{kj}$

Exemple

Une certaine pièce d'équipement électrique peut se trouver dans 3 états :

1: *bonne*, 2 : *condition marginale*, 3 : *défaillante.*

A la fin de chaque jour de service, l'état de la pièce est enregistré. La matrice de transition obtenue est :

$$P = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Calculer la durée de vie moyenne d'une pièce se trouvant initialement en bonne condition ?

Réponse

La durée de vie moyenne d'une pièce est quantité n_1 de la solution du système : $n_i = 1 + \sum_{k \in S'} p_{ik}\, n_k$

$$\begin{cases} n_1 = 1 + 0.7\, n_1 + \ 0.2\, n_2 \\ \\ n_2 = 1 + 0.5\, n_1 + \ 0.3\, n_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.3\, n_1 - \ 0.2\, n_2 = 1 & \ldots\ldots (1) \\ \\ -0.5\, n_1 + \ 0.7\, n_2 = 1 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

→ On a : $\text{équation } (1) * 0.7 + \text{équation } (2) * 0.2$.

→ On obtient $0.11\, n_1 = 0.9$

→ On a donc la durée de vie moyenne d'une pièce $n_1 = \mathbf{8.18}$ Jours.