REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Jijel

Faculté des Sciences et
de la Technologie

Département d'Automatique

Optimisation et recherche opérationnelle

Note de cours : Dounia SAIFIA

Master 1 : ATS

2015-2016

Table des matières

Introduction générale

L'objectif de ce cours est de prodiguer à nos étudiants des connaissances portent sur les techniques et les méthodes permettant la résolution des problèmes d'optimisation linéaires ou non linéaires.

Le nom « **R**echerche **O**pérationnelle (**R O**) » date de la seconde guerre mondiale. En 1940, un physicien Patrick BLAKETT eut l'immense mérite de trouver l'implémentation idéale des radars de surveillance britannique. Après la guerre, les méthodes d'optimisation ont ´été considérablement appliquées dans différents domaines (informatique, mathématique, économique, automatique, etc.).

L'optimisation est l'ensemble des techniques permettant de prendre des décisions optimales ou proches de l'optimum dans des problèmes complexes, qui traitent de la minimisation (maximisation) d'une fonction dite fonction objective. En effet, dans un problème d'optimisation, une variable physique ou bien de commande doit être choisie de façon à optimiser un critère physique, un critère technique ou bien un critère économique . Généralement, le problème de la détermination des minimums et des maximums d'une fonction de plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes, mais liées entre elles par certaines conditions supplémentaires appelées contraintes. Les différentes contraintes vont limitées l'espace à une surface à l'intérieure de laquelle se trouvent les solutions possible.

La résolution d'un problème d'optimisation consiste, au premier lieu à donner l'expression mathématiquement d'un problème donné, puis à résoudre le problème modélisé. La recherche opérationnelle propose différentes techniques et méthodes de la résolution selon le type de problème (linéaire ou non linéaire, avec / ou sans contraintes) et la nature des variables de décision (continus ou discrets).

Le cours est divisé en cinq chapitres :

Le but du premier chapitre est de rappeler les notions de base de la recherche opérationnelle.

Les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation non linéaires seront présentées dans le deuxième chapitre.

Les techniques de résolution des problèmes d'optimisation linéaires feront l'objet du chapitre 3.

Dans le chapitre 4, la théorie des graphes et problèmes stochastiques discrets seront exposés. Dans le dernier chapitre, quelques éléments de la théorie des jeux et les jeux d'entreprise seront proposés.

Eléments de bibliographie :

Ce cours a été rédigé à partir des ouvrages suivants :

1. Introduction à l'optimisation, C. Jean-Chriphone, Éditeur, Ellipses ,1994.

2. Précis de la recherche opérationnelle, P. Gurin, Éditeur, broché Couverture, 1976.

3. Les techniques de la recherche opérationnelle, Algorithme de Simplex, A .Zaatri, 2001.

4. La recherche opérationnelle, Y. Nobert, R. Ouellet, R. Parent, Gaëtan Morin, 1995.

5. Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle Robert F. éditeur Dunod, 2000

.

Chapitre 1 :
Introduction à la recherche Opérationnelle

1.1 Introduction

La **R**echerche **O**pérationnelle (**R O**) est une technique d'optimisation; datant tout au plus de la second guerre mondiale (en 1940). Et en effet ; c'est bien son application aux opérations militaires quelle doit son nom.

En 1940, un physicien Patrick BLAKETT eut l'immense mérite de trouver l'implémentation idéale des radars de surveillance britanniques. Après cette guerre et avec le développement du calcule numérique (les ordinateurs) cette tendance a été accélérée et devienne un outil très important dans la réalisation des problèmes d'optimisation complexes.

1.2 Définition de l'optimisation

L'optimisation est l'ensemble des techniques permettant de chercher les minimums ou les maximums de fonction ou fonctionnelle.

1.3 Définition d'un problème d'optimisation

Dans un problème d'optimisation, une variable physique ou bien de commande doit être choisie de façon optimale, autrement dit, de façon à optimiser selon le cas :

- Un critère physique (énergie, puissance, etc.).
- Un critère technique (erreur de modélisation, erreur statique, etc.).
- Un critère économique (coût, profit, etc.).

1.3.1. Exemples et domaines d'applications de la RO :

- ***Problème d'identification (critère technique)***

L'évolution de la concentration *C* d'une espèce dans un mélange est donnée par une loi linéaire en fonction du temps : $C(t)=at+b$

Un expérimentateur fait sur une série de mesure pour déterminer les paramètres inconnus résumés dans le tableau suivant :

t_i	0	1	2	4	5	6	7	8	9	10	11
$C_r(t_i)$	1.45	3.06	4.97	10.65	14.92	20.6	28.2	38.42	52.15	20.65	96.6

Tableau 1.1 : Résultats de mesures

➢ *Le problème est de déterminer les paramètres a et b telle que la valeur de* $\sum_{i=0}^{11}\left(C(t_i)-C_r(t_i)\right)^2$ *soit la plus petite possible ?*

- ***problème d'épaisseur optimale de l'isolation (critère physique)***

Figure1.1 Pipeline

Soit un pipeline (figure 1.1) dans le quel circule un liquide qu'on souhaite maintenir à une certaine température. Pour limiter de chaleur par convection, on dispose des couches d'une matière isolant sur les parois externes du pipeline Isolation d'épaisseur *x*.

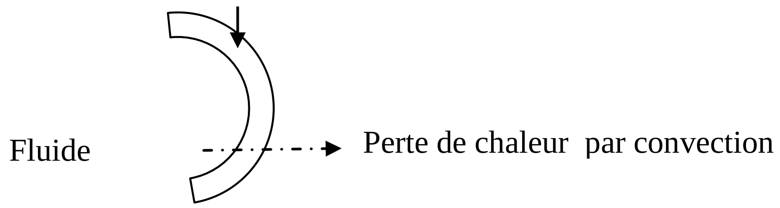


Figure 1.2 : Couches d'une matière isolant

La perte d'énergie est approximée par l'expression suivante : $Q=\dfrac{A*DT}{x/k+1/h_c}$

DT : La différence de température entre l'intérieure du pipeline et l'aire ambiant. x L'épaisseur du pipeline. hc : coefficient de transfert de chaleur par convention.

K : La conductivité thermique. Q : la quantité d'énergie perdue par heure. A : aire du pipeline.

Le coût d'installation par unité de surface peut être représenté par : f_0+f_1x .

f_0: coût fixe ; f_1 le coût incrémental par unité d'épaisseur.

L'argent dépensé pour couvrir le pipeline d'une couche isolante doit être remboursé en cinq années (en cinq parts égales).

➢ *Le problème posé est de déterminer l'épaisseur optimale de la couche isolante.*

- ***Problème d'entreprise (critère économique).***

Une entreprise fabrique sur une machine travaillant 45 heures par semaine trois produits P_1, P_2 et P_3. L'article P1 laisse un profit net de 4 unités monétaires, l'article P2 laisse un profit net de 12 unités monétaires et l'article P3 laisse un profit net de 3 unités monétaires. Les rendements de la machine sont respectivement pour les trois produits et dans le même ordre sont : 50, 25 et75 articles par heure. On sait d'autre part grâce a une étude du marché, que les possibilités de vente ne dépassent pas 1000 articles de P1, 500 articles de P2 et 150 articles de P3 par semaine.

- *Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé?.*

- ***Un problème de transport (critère économique).***

Une entreprise stocke un produit dans deux dépôts A_1 et A_2 situés dans deux villes différentes. Les quantités stockées sont respectivement 120 et 200 unités. Ces deux dépôts alimentent trois points de vente B_1, B_2 et B_3 situés également dans deux villes différentes. Les quantités demandées par les trois points de ventes sont respectivement de 80, 90 et 150 unités. Les coûts unitaires de transport sont inscrits dans le tableau suivant :

Points de vente Les dépôts	B_1	B_2	B_3
A_1	12	15	20
A_2	18	10	16

Tableau 1.2 : Coût de transport

- *Le problème qui se pose à l'entreprise est celui de savoir comment repartir et distribuer les produits du magasin de stockage vers les points de vente avec un coût de transport minimum.*

- ***Problème d'une usine (critère économique)***

Une compagnie fabrique trois produits et dispose 4 postes de travail.

Le temps de production (en heures) par unité produite varie d'un poste de travail à un autre selon les données ci-dessous.

Poste de travail **Produit**	1	2	3	4
1	5	7	4	10
2	6	12	8	15
3	13	14	9	17

Tableau 1.3 : Temps de production (En heures) par unité produite

De même le bénéfice par unité produite varie d'un poste à un autre selon les données montrées dans le tableau 1.4.

Une semaine de travail effectif est de 35 heures pour chaque poste de travail.

- *Le problème à résoudre est de trouver la quantité de chaque produit qui devrait être produite sachant que la demande est d'au moins 100 unités de produit 1, 150 unités de produit 2 et 100 unités de produit 3.*

Poste de travail / **Produit**	1	2	3	4
1	10	8	6	9
2	18	20	15	17
3	15	16	13	17

Tableau 1.4 : Le bénéfice par unité produite

- ***Problème d'affectation***

La matrice ci-dessous établit les coûts de fabrication des ouvriers A, B, C, D et E sur les machines 1, 2, 3, 4 et 5 (voir tableau ci-dessous) :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	12	8	11	15	4
B	7	9	17	14	10
C	9	6	12	7	7
D	7	8	14	8	10
E	9	9	13	10	6

Tableau 1.5 : Coûts de fabrication des ouvriers

- *Opérer les affectations, de manière à rendre minimale le coût total.*
- *Un problème de voyageur de commerce*

Soit un voyageur de commerce décide de visiter n villes. Supposons que la distance entre chaque deux villes est donnée.

- Trouver le plus court trajet passant par les n villes

1.4 Formulation mathématique d'un problème d'optimisation :

Le problème d'optimisation consiste à chercher x solution du problème d'optimisation suivant:

$$(\rho)=\begin{cases} opt(f(x)) \\ g(x)\leq 0 \\ h(x)=0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

$x \in R^n$ est appelée variable de décision

$f(x): R^n \to R$ est appelée indifféremment : fonction coût, fonction objective ou critère.

$g(x): R^n \to R^p$ représente les contraintes en inégalité. Elle a p composantes et on peut écrire : $g(x)$ $((g_1(x), g_2(x) \dots g_p(x))$ c'-à-d :

$g(x)\leq 0$ signifie $g_i(x)\leq 0, i=1\dots p$ et $g_i(x): R^n \to R$

$h(x): R^n \to R^q$ représente les contraintes en égalité. Elle a q composantes et on peut écrire :

$h(x)$ $((h_1(x), h_2(x) \dots h_q(x))$ c'-à-d :

$h(x)=0$ signifie $h_i(x)=0, i=1\dots q$ et $g_i(x): R^n \to R$

Les différentes contraintes vont limitées l'espace à une surface à l'intérieure de la quelle se trouvent les solutions possible.

soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des contraintes :

$$\mathbb{C}=\{x \mid g(x)\leq 0, h(x)=0\} \quad (1.2)$$

Exemple 1.1 :

Retournons au problème de transport énoncé ci- dessus :

Variables de décision:

x_{ij} : La quantité à transporter du dépôt A_i au point de vente B_j

Fonction objectif :

$$min\ f = 12x_{11} + 15x_{12} + 20x_{13} + 18x_{21} + 10x_{22} + 16x_{23}. \quad (1.3)$$

Contraintes :

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 120 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 200 \\ x_{11}+x_{21}\geq 80 \\ x_{12}+x_{22}\geq 90 \\ x_{13}+x_{23}\geq 150 \\ x_{ij}\geq 0, \forall i\in\{1,2\}, \forall j\in\{1,\dots,3\} \end{cases} \quad (1.4)$$

1 .5 Résolution des problèmes d'optimisation :

Une fois que l'expression mathématique est écrite, la recherche opérationnelle propose la technique et la méthode de la résolution selon le type de problème (linéaire ou non linéaire, avec/ou sans contraintes) et la nature des variables de décision (continues ou discrètes). Pour résoudre un problème d'optimisation, on suit les étapes suivantes :

1. Fixer les objectifs, les contraintes, les variables de décision.
2. Trouver la formulation mathématique.
3. Choisir la méthode de la résolution selon le type du problème posé.
4. Validation de la solution obtenue.

Chaiptre2 :
Programmation non linéaire

2.1. Introduction :

La programmation non linéaire consiste à chercher un optimum du problème d'optimisation suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} opt\left(f(x)\right) \\ g(x)\le 0 \\ h(x)=0 \\ x\in R^{n} \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans ce problème d'optimisation, la fonction objective et/ou les contraintes sont non linéaires en fonction de variables de décision.

Exemple 2.1

Un atelier peut fabriquer des articles de deux types, A_1 et A_2 sur une machine donnée, disponible 100 heures par mois. Les articles de type A_1 sont fabriqués à la cadence de 50 articles par heure et les articles de type A_2 sont fabriqués à la cadence de 25 articles par heure. La capacité d'absorption du marché étant limitée, on ne peut pas écouler par mois plus de 3000 articles de type $A_{1,}$ ni plus de 2000 articles de type A_2. En raison d'un système de prix dégressif consentis aux clients, le prix de chaque article décroit légèrement avec la quantité vendue : un article de type A_1 rapporte $30(1- x_1/6000)$ unités monétaires lorsqu'on vend x_1, et un article de type A_2 rapporte $20\ (1- x2/4000)$ unités monétaires lorsqu'on vend x_2.

- *Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité afin de maximiser le bénéfice total ?.*

En désignant par x_i la production mensuelle de l'article A_i, on peut formuler le programme comme suit :

$$(\rho)=\begin{cases} max\left[\ f=\left(30x_1\left(1-x_1/600\right)+20x_2\left(1-x_2/400\right)\right)\right] \\ \dfrac{x_1}{50}+\dfrac{x_2}{25}\le 100 \\ x_1\le 3000 \\ x_2\le 2000 \\ x\in R^{+n} \end{cases} \tag{2.2}$$

La fonction objective est une fonction non linéaire. Donc, ce problème est un problème d'optimisation non linéaire.

L'objet de ce chapitre est de présenter les techniques permettant de résoudre le problème (2.1). Ce chapitre se focalise sur deux types de problème d'optimisation non linéaire:

- **Problèmes d'optimisation non linéaires sans contraintes**
- **Problèmes d'optimisation non linéaires avec contraintes**

2.2. Préliminaires mathématiques

2.2.1. Définition minimum (maximum) local : Soit $\mathbb{C}$ un ensemble non vide et f est une fonction de $f(x): R^n \to R$:

- **On dit que** $x^* \in \mathbb{C}$ réalise un minimum local de f sur R, si on peut trouver une boule ouverte $B(x^*)$ centrée en x^* telle que :

$$\forall x \in B(x^*) \cap \mathbb{C}, \qquad f(x^*) \le f(x) \tag{2.3}$$

- **On dit que** $x^* \in \mathbb{C}$ réalise un maximum local de f sur R, si on peut trouver une boule ouverte $B(x^*)$ centrée en x^* telle que :

$$\forall x \in B(x^*) \cap \mathbb{C}, \qquad f(x^*) \ge f(x) \tag{2.4}$$

2.2.2. Définition minimum (maximum) global

- **On dit que** $x^* \in \mathbb{C}$ réalise un minimum global de f sur R,

si $\forall x \in \mathbb{C}, \qquad f(x^*) \le f(x)$ (2.5)

- **On dit que** $x^* \in \mathbb{C}$ réalise un maximum global de f sur R, si

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad f(x^*) \ge f(x) \tag{2.6}$$

Exemple 2.2 : La figure (2.1) montre les quatre définitions précédentes.

Proposition : si x^* réalise un maximum (local ou global) de f sur $\mathbb{C}$, x^* réalise un minimum (local ou global) de $-f$ sur $\mathbb{C}$, autrement dit :

$$max(f(x)) = -min(-f(x)) \tag{2.7}$$

Preuve :

Si x^* réalise un maximum de f, alors

$\forall x \in \mathbb{C} : f(x) \leq f(x^*)$ et par conséquence :

$\forall x \in \mathbb{C} : -f(x) \geq -f(x^*)$, c.à.d. :

$-f(x^*) = \min(-f(x))$ et donc, $f(x^*) = -min(-f(x))$.

Fin de preuve.

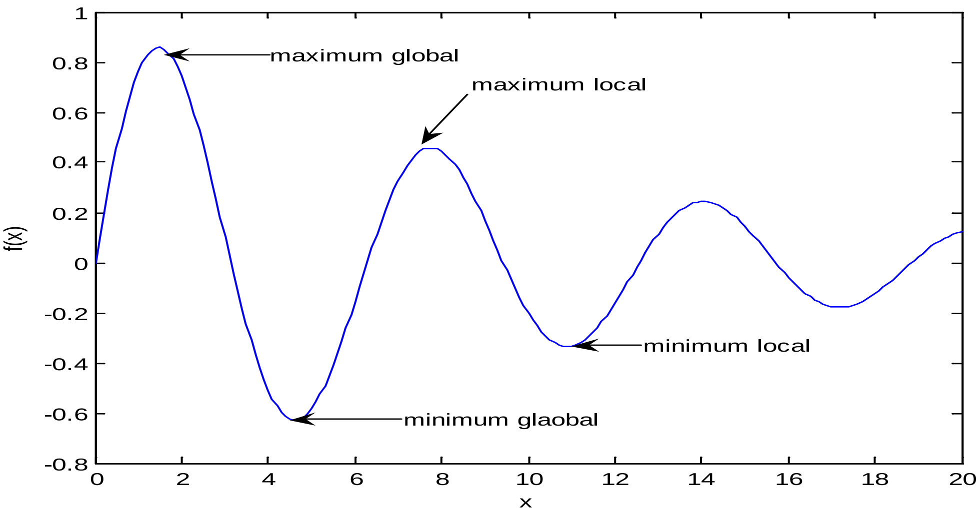


Figure 2.1 : Fonction non linéaire

2.2.3 Notion de la convexité :

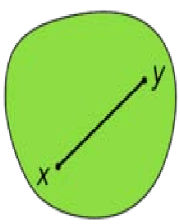
➢ **Définition d'un ensemble convexe :**

Soit un ensemble $\mathbb{C} \subset R^n, \mathbb{C}$ est un ensemble convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in \mathbb{C} \tag{2.8}$$

autrement dit : $\mathbb{C}$ est convexe, s'il contient tout « segment » reliant entre de quelconques de ses points.

Exemple 2. 3:



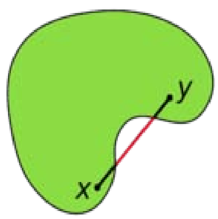


Figure 2.2 : Ensemble convexe

Figure 2.3 : Ensemble non convexe

- **Définition d'une fonction convexe**

Une fonction est définie sur un intervalle réel $\mathbb{C}$, alors f est convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (2.9)$$

Exemple 2.4 : La figure ci-dessous illustre une fonction convexe

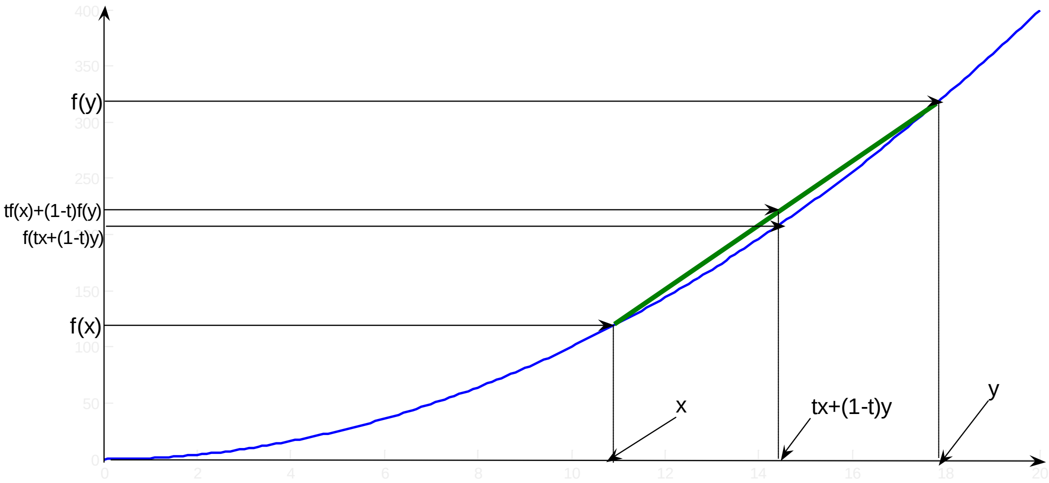


Figure 2.4 : Fonction convexe

Remarque 2.1 : l'opposé d'une fonction convexe est une fonction concave.

- **Définition d'une programmation convexe :** Un problème d'optimisation convexe s'énonce comme suit :

  $\min_{x \in \mathbb{C}} (f(x))$ où $\mathcal{C}$ est un ensemble convexe et f est une fonction convexe.

Cas particulier : soit le problème d'optimisation non linéaire (ρ) définie par (2.1), on dit que (ρ) est convexe dans les cas suivants :

- Si la fonction à optimiser f est convexe, les contraintes d'inégalité sont convexes et les contraintes d'égalité sont linéaires.
- Si la fonction à optimiser f est convexe et les contraintes d'inégalité et d'égalité sont linéaires.

Notons que la convexité est une propriété très importante pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaires car :

1. Il n'existe pas d'un minimum local de la fonction coût à optimiser, le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

2. Le temps de calcul pour trouver une solution est raisonnable.

- **La convexité et la matrice hessienne**

Une méthode simple pour tester la convexité et la concavité d'une fonction est l'utilisation de la dérivée seconde de f (x est un scalaire) ou bien la dérivée partielle $\partial^2 f$ (x est un vecteur). La dérivée partielle $\partial^2 f$ est appelée matrice hessienne et elle est notée par $H(x)$.

Cette matrice est une matrice symétrique. Soit $x = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^T$, et en supposant que toutes les dérivées partielles secondes de f existent, on a :

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Exemple 2. 5 :

Considérons $x = [x_1, x_2]^T$ et $f(x) = f_{11}x_1^2 + f_{22}x_2^2 + f_{12}x_1x_2$. La matrice hessienne associé à cette fonction est la suivante :

$$H(x) = \begin{bmatrix} 2f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & 2f_{22} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

L'évolution de la matrice hessienne permet de déterminer la convexité et la concavité de la fonction $f(x)$:

- La fonction $f(x)$ est convexe, si H est semi-définie positive : $\forall x \neq 0$ alors $x^T H(x) x \geq 0$.
- La fonction $f(x)$ est concave, si H est semi-définie négative : $\forall x \neq 0$ alors $x^T H(x) x \leq 0$.

Un test pratique pour déterminer si H est semi-définie positive, ou bien, elle est semi définie négative peut être énoncé comme suit :

- La fonction $f(x)$ est convexe, si toutes les valeurs de la diagonale de H sont positives et ses mineures principaux $\Delta_k \geq 0, \forall K \in \{1,...,n\}$
- La fonction $f(x)$ est concave, si toutes les valeurs de la diagonale de H sont négatives et le signe de ses mineures principaux $\Delta_k = signe(-1)^k$, $\forall K \in \{1,...,n\}$

Exemple 2.6 : Soit la fonction suivante :

$$f(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 \tag{2.12}$$

La matrice hessienne associée à cette fonction est la suivante :

$H(x) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, on remarque que les valeurs de la diagonale sont positives et $\Delta_1 = 4 \succ 0, \Delta_2 = 7 \succ 0$. Donc, la fonction $f(x)$ est convexe.

Exemple 2.7 : Nous considérons la fonction suivante :

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2 + 4 \tag{2.13}$$

La matrice hessienne est :

$H(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, on remarque que les valeurs de la diagonale sont positives ou nulles et $\Delta_1 = 2 \succ 0, \Delta_2 = -1 \prec 0$. Alors, la fonction $f(x)$ ni convexe ni concave.

2.3. Optimisation non linéaire sans contraintes :

Le problème d'optimisation non linéaire sans contraintes consiste à résoudre un problème de la forme suivante :

$$(\rho) \triangleq opt(f(x)) \tag{2.14}$$

avec $f(x)$ est une fonction non linéaire.

2.3.1 Condition nécessaire du premier ordre :

Théorème : si la fonction $f\left(x\right)$ admet un optimum pour les valeurs x^*, alors chaque dérivée partielle du premier ordre s'annule ou n'existe pas.

Exemple 2.8 :

La figure ci-dessous illustre la fonction $f\left(x\right)=x^2$

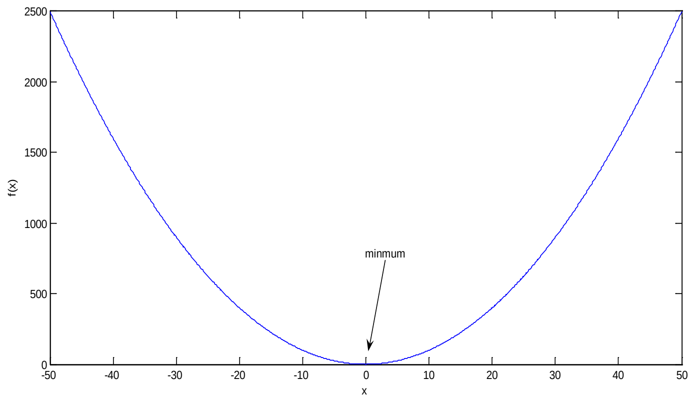


Figure 2.5 : La fonction $f\left(x\right)=x^2$

La fonction $f\left(x\right)$ admet un minimum au point $x^*=0$ ou sa dérivée s'annule $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*=0}=0$.

Exemple 2.9:

La fonction $f\left(x\right)=\left|x\right|$ (voir figure ci-dessous) admet un minimum au point $x^*=0$ ou sa dérivée n'existe pas en ce point.

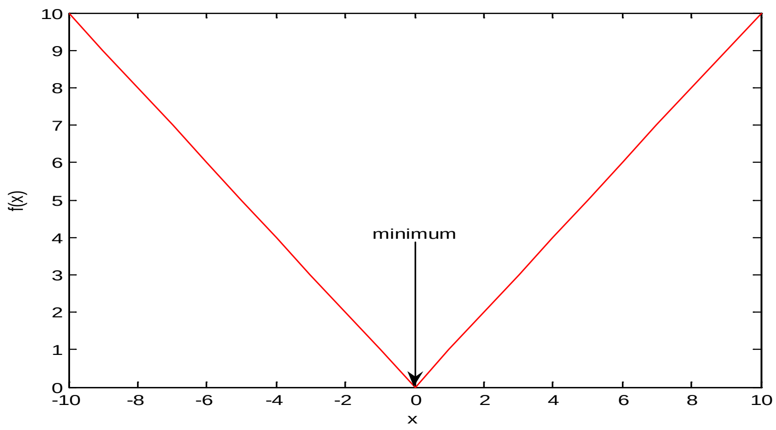


Figure 2.6 : La fonction $f\left(x\right)=\left|x\right|$

Remarque 2.1: La réciproque de ce théorème n'est pas vraie, c.à.d.: Le point où la dérivée s'annule ou n'existe pas n'est pas nécessairement un optimum. Les valeurs de la variable, pour lesquelles la dérivée s'annule ou a une discontinuité, sont appelées points critiques ou points_selles critiques. Autrement dit, tout point critique n'est pas nécessairement un extremum. Mais si la fonction admet un optimum en certain point. Ce dernier est nécessairement un point critique.

2.3.2 *Condition nécessaire du deuxième ordre :*

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un domaine contenant le point $\left(x^*, f\left(x^*\right)\right)$ et dont les dérivées partielles continues jusqu'à au troisième ordre. Supposons en autre que le point $\left(x^*, f\left(x^*\right)\right)$ est un point critique de la fonction $f(x)$, alors pour $x = x^*$:

$f\left(x^*\right)$ est un maximum si et seulement si $H\left(x^*\right)$ est semi définie négative.

$f\left(x^*\right)$ est un minimum si et seulement si $H\left(x^*\right)$ est semi définie positive.

Preuve : D'après le développement de Taylor :

$$f(x) = f\left(x^*\right) + \left(x - x^*\right)^T \partial f\left(x^*\right) + \left(x - x^*\right)^T H\left(x^*\right)\left(x - x^*\right) + O_3\left(x^*\right)$$

$\left(x^*, f\left(x^*\right)\right)$ est un point critique de la fonction $f(x)$, alors $\partial f\left(x^*\right) = 0$ et :

$f(x) - f\left(x^*\right) = x^T H\left(x^*\right) x$ donc :

- $f(x) - f\left(x^*\right) \leq 0, \; Si \quad H\left(x^*\right) \leq 0$ (semi- définie _ négative).
- $f(x) - f\left(x^*\right) \geq 0, \; Si \quad H\left(x^*\right) \geq 0$ (semi- définie _ positive).

Exemple 2.10

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 \tag{2.15}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

1. Trouvons les points critiques :

$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$, on résulte deux points critiques : $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1 \\ x_2 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$

2. *Calculons la matrice hessienne pour chacun de ces points :*

$H\left(x^{1*}\right) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \succ 0$ donc , $f(x)$ admet un minimum au point x^{1^*} .

$H\left(x^{2*}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ ni définie positive ni-définie négative. Donc, x^{2*} est un point critique.

2.3. Optimisation non linéaire avec contraintes :

Bien souvent le problème de la détermination des minimums et des maximums d'une fonction de plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes, mais liées entre elles par certaines conditions supplémentaires.

Exemple 2.11 :

Nous considérons le problème d'optimisation non linéaire avec contraintes suivant :

$$(\rho) = \begin{cases} min\left(f(x)\right) = 4x_1^2 + 5x_2^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \tag{2.16}$$

La matrice hessienne de la fonction $f(x)$ est :

$H(x) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. Cette matrice est définie positive. Donc, $f(x)$ est convexe. Il y'a une seule contrainte en inégalité linéaire. Alors, le problème (ρ) est un problème convexe.

Autrement dit : s'il existe une solution, elle est globale.

On peut trouver la solution de ce problème, si l'on substitue la valeur de x_1 dans la contrainte d'égalité $\left(x_1 = \dfrac{6-3x_2}{2} \right)$ dans la fonction $f(x_1)$, on trouve :

$f(x) = 14x_2^2 - 36x_2 + 36$. Par conséquence, la fonction $f(x)$ sera une fonction d'une seule variable et le problème d'optimisation sera un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte :

$$(\rho)=\begin{cases} min \quad f(x)=14x_2^2-36x_2+36 \\ \forall x_2 \in R \end{cases} \tag{2.17}$$

Pour résoudre le problème (2.17), on cherche $\frac{df}{dx}=0$ (voir section 2.3), le point $x^*\left(x_2^*=1{,}28, x_1^*=\frac{6-3x_2^*}{2}=1{,}071\right)$.

Comme le problème est convexe, la solution globale est $f(x*)$.

Cette méthode est appliquée aux problèmes d'optimisation simples et de petite dimension. On peut résoudre les problèmes non linéaires avec contrainte sans qu'il est nécessaire de résoudre les contraintes par l'utilisation des méthodes suivantes:

2.3.1 Méthode de Lagrange :

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} min(f(x)) \\ g_j(x)\geq 0 \quad \forall j \in \{1,..,p\} \\ h_i(x)=0 \quad \forall i \in \{1,..,q\} \end{cases} \tag{2.18}$$

Ce problème est équivalent au problème suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} min(f(x)) \\ g_j(x)-\delta_j^2=0 \\ h(x)=0 \end{cases} \tag{2.19}$$

avec :

δ_j : est une variable réelle.

Nous définissons la fonction de Lagrange comme suit :

$$\Im(x,w,\delta)=f(x)+\sum_{1}^{q}[w_i]h_i(x)+\sum_{q+1}^{q+p}w_j\left(g_{j-q}(x)-\delta_{j-q}^2\right) \tag{2.20}$$

w_i est appelé multiplicateur de Lagrange.

- **Condition nécessaire du premier ordre :**

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = O, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial \Im}{\partial x_n} = O \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial w_1} = O, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial \Im}{\partial w_{p+q}} = O \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \delta_1} = O, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial \Im}{\partial \delta_p} = O \end{cases} \qquad (2.21)$$

La solution obtenue est un point critique. Ce n'est pas nécessairement un minimum sauf si celui-ci est convexe.

- **Condition nécessaire et suffisante :**

Dans le cas d'un programme convexe, $x*$ est une solution du problème (2.18) si et seulement si les conditions de Lagrange sont satisfaites.

Si le problème non convexe, on peut sélectionner les minima locaux parmi les points critiques calculés en utilisant les conditions du deuxième ordre.

- **Condition nécessaire du deuxième ordre :**

Supposons que $x*$ est un point de R^n vérifiant les conditions nécessaires du premier ordre avec les paramètres $(x*,w*,\delta*)$. Si la matrice hessienne de la fonction Lagrangienne au point est semi-définie- positive $\left(\left.\dfrac{\partial^2 \Im}{\partial x \partial x}\right|_{((x*,w*,\delta*))} \geq 0 \right)$ alors $x*$ est un minimum (local).

Exemple 2.12 :

On va résoudre le problème ci-dessous par Lagrange

$$(\rho) = \begin{cases} min\left(f(x) = x_1 x_2 \right) \\ g(x) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

La fonction de Lagrange associée à ce problème est donnée comme suit :

$$\Im(x,w,\delta) = x_1 x_2 + w \left(25 - x_1^2 - x_2^2 - \delta^2 \right)$$

- Condition nécessaire du premier ordre :

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = O \Rightarrow x_2 - 2wx_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial x_2} = O \Rightarrow x_1 - 2wx_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial w} = O \Rightarrow 25 - x_1^2 - x_2^2 - \delta^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \delta} = O \Rightarrow -2w\delta = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont résumés dans le tableau suivant :

w	x_1	x_2	δ
0	0	0	5
-0.5	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$
0.5	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$

La fonction $f(x)$ n'est pas convexe et par conséquence le problème d'optimisation imposé n'est pas convexe. C'est la raison pour laquelle, il faut passer aux conditions nécessaires du deuxième ordre pour identifier les points critiques trouvés.

- Condition nécessaire du deuxième ordre :

La matrice hessienne de la fonction lagrangienne est la suivante :

$$H(x,w,\delta) = \begin{bmatrix} -2w & 1 \\ 1 & -2w \end{bmatrix}.$$

on a :

$H(x,w,\delta)\big|_{w=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ni semi-definie-negative ni semi-definie-positive. Donc, le point x(0 ,0) est un point critique.

$H(x,w,\delta)\big|_{w=0.5} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ est semi-definie-négative. Donc, les points $x(3.5,3.5)$ et $x(-3.5,-3.5)$ sont des points maximums.

$$H(x,w,\delta)\Big|_{w=-0.5}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$ est semi-definie-positive. Donc, les points $x(3.5,-3.5)$ et $x(-3.5,3.5)$ sont des points minimums.

***Remarque 2.2** : Une version plus raffinée pour les conditions nécessaires du deuxième ordre dans le cas des contraintes d'égalité est la suivante :*

toutes les racines du polynôme :

$$p(\lambda)=\begin{bmatrix}A-\lambda I & D\\ D^{'} & 0\end{bmatrix}$$

sont positives, alors $x*$ est un minimum du problème contraint

2.3.2 Méthode de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) :

Soit le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$(\rho)=\begin{cases}min\left(f(x)\right)\\ \forall x\in\mathbb{C}\\ \mathbb{C}\triangleq\left\{x\middle|\,g(x)\le 0,h(x)=0\right\}\end{cases}\tag{2.23}$$

Définitions:

- Contraintes actives : on dit qu'une contrainte g_j en inégalité est active (ou saturée) au point $x*\in R^n$ si $g_j\left(x^*\right)=0$.
- Une contrainte qui n'est pas active est inactive . On note $I\left(x^*\right)$, l'ensemble des indice j correspondant aux contraintes actives en x^*.
- Un point régulier : on dit qu'un élément $x*\in R^n$ est régulier pour les contraintes h et g si les conditions suivantes sont vérifiés :

1. S'il est réalisable : $h_i\left(x^*\right)=0$ et $g_j\left(x^*\right)\le 0$.
2. Si les vecteurs: $\nabla h_i\left(x^*\right),\forall i\in\{1,..,q\}$ et $\Delta g_j\left(x^*\right),\forall j\in I\left(x^*\right)$ sont indépendants.
3. Le vecteur $\nabla g_j\left(x^*\right)\ne 0,\forall j\in I\left(x^*\right)$.

Conditions de KKT :

Soit x^* un point régulier. x^* est une solution du problème d'optimisation (2.2 3), alors il existe $\lambda^*\in R^q$ et $\mu^*\in R^{+p}$ tels que les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mu_j^*\ge 0$

2 . $h_i\left(x^*\right)=0$ et $g_j\left(x^*\right)\leq 0$.

3. $\mu_j^* g_j\left(x^*\right)=0$

4. $\nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{q}\lambda_i \nabla h_i\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{p}\mu_j \nabla g_j\left(x^*\right)=0$

Cas d'un problème convexe

Si le problème est convexe, les conditions de KKT ci-dessus sont suffisantes pour impliquer l'optimalité globale.

Exemple 2.13 :

Considérons le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$\left(\rho\right)=\begin{cases} min\left(f\left(x\right)=2x_1^2+2x_1x_2-10x_1-10x_2+x_2^2\right) \\ x_1^2+x_2^2-5\leq 0 \\ 3x_1+x_2-6\leq 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Les conditions de KKT associées à ce problème sont :

1. $\mu_1\geq 0,\mu_2\geq 0$

2 . $3x_1+x_2-6\leq 0$ et $x_1^2+x_2^2-5\leq 0$.

3. $\mu_1\left(x_1^2+x_2^2-5\right)=0,\mu_2\left(3x_1+x_2-6\right)=0$

4. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-10+2\mu_1x_1+3\mu_2=0 \\ 2x_1+2x_2-10+2\mu_1x_2+\mu_2=0 \end{cases}$

Il y'a deux contraintes d'ingalité de type $\leq$, donc, on a quatre cas :

- **Cas1 :** les deux contraintes sont inactives **:** $\mu_1=0,\mu_2=0$ ce qui donne $x_1=0,x_2=5$. Malheureusement ce point ne vérifié pas la condition 2.
- **Cas 2 :** g_1 est active et g_2 est inactive. Ce système a pour solution : $x^*\left(x_1=1,x_2=2\right)$ $\mu_1=1,\mu_2=0$. Cette solution est admissible. Il reste de vérifier que ce point est un point régulier. La seule contrainte active est la première contrainte. Alors, $I\left(x^*\right)=\{1\}.\Delta g_1\left(x^*\right)=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}^T\neq 0$, on peut confirmer maintenant que x^* est un point régulier.

Le programme est convexe, ce qui implique que le point x^* est une solution globale de notre problème sans la nécessité de passer par les autres cas.

2.4 Optimisation quadratique :

L'optimisation quadratique consiste à rechercher l'optimum d'une fonction quadratique soumise à des contraintes d'égalité et d'inégalité linéaire comme suit :

$$(\rho)=\begin{cases} min\left(f(x)=\frac{1}{2}x^TQx+r^Tx \right) \\ Ax=B \\ Cx\leq D \end{cases}$$

ou :

$x\in R^n$, $x\in R^n$, $D\in R^q$, $A\in R^{n\times p}$, $B\in R^q$, $C\in R^{n\times p}$ et $D\in R^q$.

Pour résoudre ce type de problème, on peut utiliser les méthodes dédiées à la programmation non linéaire exposée dans la section 2.3. Mais, il faut noter que l'avantage d'un problème d'optimisation quadratique réside dans le faite qu'il est un programme convexe. En effet, s'il existe une solution, elle est globale. Autrement dit, les conditions du premier ordre sont nécessaires et suffisantes pour trouver la solution.

2.5. Exercices avec solution abrégée

<u>Exercice 01:</u>

Soient les contraintes suivantes :

$$-(x_1-1)^2+x_2\leq 0$$
$$x_1\geq 0$$
$$x_2\geq 0$$

Montrer que le point x_1=1 ; x_2=0 est point réalisable mais pas régulier ?

- **Réponse :**

1. Les trois contraintes sont satisfaites. Alors, il est réalisable.
2. Le vecteur $\nabla g_j\left(x^*\right)\neq 0,\forall j\in\{1,3\}$ sont dépendants. Donc, le point n'est pas réguler.

<u>Exercice 02 :</u>

Considérons le programme mathématique

$$Min\ f(x)=-x_1^2+2x_1+x_2$$

avec les contraintes :

$$x_1+x_2\leq 1$$
$$x_1\ \ x_2\geq 0$$

Résoudre le programme en s'aidant uniquement des conditions de KKT.

- **Réponse :**

l. Le problème n'est pas convexe.
2. Le point qui réalise les conditions de KKT est $x^* = (0.5, 0.5)$ et est un pont régulier. Donc, la solution est $f(x^*)=1.25$

Exercice 03 :

On se place dans R^2 , et on note $x=[x_1\ x_2]^T$. On considère la fonction f de R^2 dans R définie par : $f(x)=\frac{1}{2}x^TBx+b^Tx=\frac{1}{2}\left(x_1^2+\alpha\ x_2^2\right)+x_1$
où B est une matrice symétrique 2-2, b un vecteur de R^2 et $\alpha\in R$
a)Préciser B et b, calculer $\nabla f(x)$
b) Donner une condition nécessaire pour que x soit un minimum (local) sans contraintes de f
1) si α =0; montrer que f possède un minimum et qu'il y a une infinité de x réalisant ce minimum. Si $\alpha\neq 0$, quel est l'élément x^* pouvant réaliser éventuellement le minimum ?
2) On suppose que α =2 ; On veut minimiser la fonction f avec la contrainte supplémentaire :

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}\le\frac{1}{2}$$

Calculer le minimum éventuel.

- **Réponse :**

a)

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x)=\begin{cases}x_1+1\\ \alpha\end{cases}$$

b) $\nabla f(x)=0$.

1) Si $\alpha=0$, touts points de la forme $\left(x_1=-1, x_2\right), \forall x_2\in R$ minimisent la fonction f.

2) Si $\alpha=0$, le seul élément réalise les condition de KKT est $x^* = (-0.5, 0)$.

Exercice 04:

Résoudre le problème d'optimisation (2.2).

- **Réponse :**

l. Le problème est convexe.

2. Le point qui réalise les conditions de KKT est $x^* = (2600, 1200\ )$. Alors, x^* réalise un maximum de fonction f.

Chapitre 3 :
Optimisation linéaire

3.1. Introduction

Le problème d'optimisation linéaire PL (**P**rogramme **L**inéaire) consiste à rechercher une solution x du problème d'optimisation suivant:

$$(\rho)=\begin{cases} opt\left(f\left(x\right)\right) \\ g\left(x\right)\leq 0 \\ h\left(x\right)=0 \\ x\in R^{n} \end{cases} \tag{3.1}$$

$f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ et $h\left(x\right)$ sont des fonctions linéaires.

Exemple 3.1: problème d'identification

Un physicien a observé qu'une certaine quantité dépend d'un paramètre *t*. Il a de bonnes raisons de penser que *Q(t)* est décrit par la loi $Q(t)= a+ bt+ct^2$. Il souhaite déterminer les paramètres a, b et c (ces paramètres sont positifs).

Pour des valeurs $t_1, t_2,..t_k$, il a effectué des mesures qui lui ont donné des valeurs $Q_1, Q2,\ldots,Q_{k..}$

Il désir déterminer a, b et c de manière que la quantité: $\max_{1\leq i\leq k}\left(\left|a+bt_i+ct_i^2-Q_i\right|\right)$.

Soit aussi petite que possible. Ecrive ce problème sous forme d'un problème d'optimisation linéaire.

L'expression mathématique de ce problème d'optimisation est la suivante :

$$(\rho)=\begin{cases} min\, r \\ r=max_{1\leq i\leq k}\left(\left|a+bt_i+ct_i^2-Q_i\right|\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

On remarque que le problème (ρ) n'est pas linéaire vis-à-vis des variables de décision a , b et c . La formulation linéaire équivalente de ce problème peut être énoncée comme suit:

$$(\rho)=\begin{cases} min\, r \\ a+bt_i+ct_i^2-Q_i\leq -r \\ a+bt_i+ct_i^2-Q_i\geq r \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2. Méthodes de résolution d'un programme linéaire

3.2.1 Solution graphique

La solution optimale x se trouve sur l'un de sommet de l'ensemble $\mathbb{C}$. Donc, pour déterminer cette solution, on va suivre les étapes suivantes:

Etape 1 : Chercher touts les sommets délimitant les solutions réalisables (l'ensemble $\mathbb{C}$).

Etape 2 : Evaluer la fonction objective en ces sommets.

Etape 3 : Comparer les valeurs obtenues et extraire la solution optimale.

Exemple 3.2

Soit le PL. suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f = 50x_1 + 50x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des contraintes du PL défini par (3.4). Donc, $\mathbb{C}$ est donné par

$$\mathbb{C}=\left\{ x \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \tag{3.5}$$

La figure suivante représente l'ensemble $\mathbb{C}$.

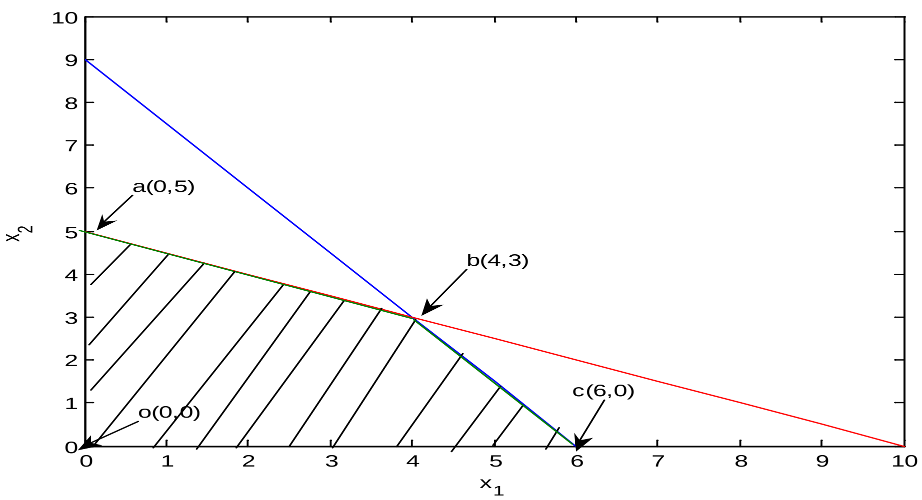


Figure 3.1: L'ensemble $\mathbb{C}$,

La solution optimale x se trouve sur l'un des sommets de l'ensemble $\mathbb{C}$ (ensemble hachuré). L'évaluation de la fonction objective f dans chaque sommet, nous donne :

$f(0)=0, f(a)=250, f(b)=350, f(c)=300$.

Donc, la solution optimale se trouve sur le sommet b et $f_{max} = f(b) = 350$.

Inconvénient :

La méthode graphique n'est pratiquement applicable qu'aux PLs de petites dimensions.

3.2.2 Solution algébrique et l'algorithme du simplexe :

La méthode du simplexe est une résolution algébrique des problèmes de PL L'algorithme du simplexe va rechercher une solution optimale en passant d'un sommet de l'ensemble $\mathbb{C}$ à un autre qui donne à la fonction objective une valeur supérieure à celle obtenue précédemment.

Forme canonique d'un PL

Généralement, un PL. peut s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$(\rho) = \begin{cases} max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, \cdots x_n \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Chaque programme linéaire en forme canonique (3.6) s'´ecrit en forme standard et inversement.

Forme standard d'un PL

La forme standard d'un PL. est la suivante.

$$(\rho) = \begin{cases} max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + \varepsilon_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \varepsilon_m = b_m \\ x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

ε_i est appelé variable d'écart qui doit être positive.

Base et solution de base réalisable :

Chaque sommet de l'ensemble de la solution réalisable correspond à une base réalisable dans la forme standard.

Exemple 3.2

Soit le PL suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=800x_1+500x_2 \\ 10x_1+5x_2\le 50 \\ 15x_1+10x_2\le 90 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

La forme standard du PL. (3.8) est comme suit :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=800x_1+500x_2+0x_3+0x_4 \\ 10x_1+5x_2+1x_3+0x_4=50 \\ 15x_1+10x_2+0x_3+1x_4=90 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Généralement, les variables de base sont les variables d'´ecart et les autres sont les variables hors base. Par conséquence, dans la forme standard (3.9), (x_2,x_3) sont les variables de base et (x_1,x_2) les variables hors base. Par l'annulation des variables hors base, on a:

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 90 \end{bmatrix}$ satisfait aux contraintes dite solution de base réalisable.

Notons que, $f(x)=0$ n'est pas optimale, il est nécessaire de faire un changement de base qui améliore la fonction objective.

Changement de base :

La méthode du simplexe consiste à transiter d'un sommet à un autre qui améliore la fonction objective. Afin d'effectuer ce changement, il faut permuter une variable de base dite sortante par une variable hors base dite entrante.

Choix de la variable entrante

$$x^{ent}\equiv max(c_i) \tag{3.10}$$

Choix de la variable sortante

En supposant que $x^{ent}=x_j$

$$x^{sort}\equiv min\left({b_i}/{a_{ij}} \right), i=1,\ldots,m \tag{3.11}$$

Algorithme du simplexe:

On peut résumer l'algorithme comme suit.

1. Exprimer le problème sous la forme standard
2. Sélectionner une solution de base nécessairement réalisable

3. Exprimer la fonction objective en termes des variables hors base
4. tester l'optimalité de la fonction objective selon les cas suivants :

cas1 : Problème non bornée : il existe un coefficient positif dans la fonction objective et il n'y a pas des solutions de base réalisables.

cas2 : Optimalité : tous les coefficients de la fonction objective sont négatives, la solution est optimale.

Cas3 : Pas de maximale : il existe au moins un coefficient positif et une solution de base réalisable. Dans ce cas il faut faire un changement de base

5. Reprendre l'algorithme à partir de l'étape 2.

Convergence de l'algorithme du simplexe

Si le problème PL écrit sous la forme standard possède une solution de base initialement réalisable, l'algorithme du simplexe décrit ci-dessus termine après un nombre fini d'étapes, soit en déterminant que le problème PL est non borné, soit en en trouvant une solution optimale.

Exemple 2.1

1. Forme standard :

Retournons à la forme standard : (3.9)

2. Solution de base initiale nécessairement réalisable (voir l'exemple 3.2) :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 90 \end{bmatrix}.$$

3. Fonction objective en termes de variables hors base :

$$f = 800x_1 + 500x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

4. Test d'optimalité :

$c_1 = 800 \geq 0, c_2 = 500 \geq 0$, la solution n'est pas optimale.

Changement de base

$x^{ent} \equiv max(800,500) = x_1$ et $x^{sort} \equiv min\left(b_i / a_{i1} \right)_{i=1,\dots,m} = \left(\frac{50}{10}, \frac{90}{15} \right) = 5$. La première équation est l'équation de pivotage dans laquelle, il y'a la variable entrante et la variable sortante.

On a alors :

$x^{sort} \equiv x_3$ et la nouvelle base devient (x_1, x_4).

Pour faire le changement, il faut transformer les équations (3.9) de telle façon que les coefficients associés à x_1 soient $(1{,}0)$, tout en gardant les coefficients de x_4 et on obtient :

$$\begin{cases} 1x_1 + \dfrac{5}{10}x_2 + \dfrac{1}{10}x_3 + 0x_4 = 5 \\ 0x_1 + \dfrac{5}{2}x_2 - \dfrac{3}{2}x_3 + 1x_4 = 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

- *Fonction objective en termes de variables hors base :*

$f = 4000 - 80x_3 + 100x_2 + 0x_1 + 0x_4$

- *Test d'optimalité :*

La solution de base est:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Elle est réalisable et $\exists c_2 = 100 \geq 0$, alors :

La solution n'est pas optimale.

- *Changement de base*

$x^{ent} \equiv max(100) = x_2$ et , $x^{sort} \equiv min\left({}^{b_i}\!/\!{}_{a_{i2}} \right)_{i=1,\dots,m} = (10{,}6) = 6$, Donc , l'équation 2 est l'équation de pivotage et $x^{sort} \equiv x_4$. Alors, la nouvelle base devient (x_1, x_2).

La nouvelle forme standard :

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0.4x_3 - 0.3x_4 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 - 0.6x_3 + 0.4x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Fonction objective en termes de variables hors base :

$f = 4600 - 20x_3 - 40x_4 + 0x_1 + 0x_2$

- *Test d'optimalité :*

La solution de base réalisable associée à cette base est:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } f_{max} = 4600$$

Cette solution est optimale, car tous les coefficients de la fonction objective sont négatifs.

Initialisation de la méthode du simplexe.

L'algorithme du simplexe s'applique directement, si on peut trouver une solution de base initiale réalisable. Parfois, une solution initiale n'est pas obtenue et il faut faire appel à d'autre techniques comme **la méthode de deux phases** ou bien transformer le problème posé en autre PL équivalent dit **dual.**

Méthode de deux phases :

Cette méthode est composée par deux phases.

- **Première phase :**

L'objectif de la première phase est de trouver une solution initiale réalisable en utilisant des variables artificielles (S_i). Pratiquement, en ajoutant une variable dans chaque équation dans la quelle il n'est pas possible de mettre en évidence une variable de base réalisable. Dans cette phase, une nouvelle fonction objective est insérée et elle définie comme la somme des variables artificielles$\left(f' = \sum S_i \right)$. Elle est à minimiser. Par la suite, en appliquant l'algorithme du simplexe à ce nouveau Pl l'algorithme du simplexe est s'arrêté si la nouvelle fonction objective atteint sa valeur finale $\left(f' = 0 \right)$. A la fin de cette phase, les variables artificielles doivent être exclues. En effet, en laissant tombé les colonnes correspondant aux variables artificielles. A la fin de cette phase, une solution de base réalisable est obtenue.

- ***Deuxième phase :***

Dans cette phase, en insérant la fonction objective initiale et en exécutant l'algorithme du simplexe.

Exemple 3.3

Soit le PL. suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f = x_1 - x_2 \\ 6x_1 - x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases} \tag{3.13}$$

On remarque que le PL est déjà sous la forme standard

Si on va choisir (x_3, x_4, x_5) comme variables de base et (x_1, x_2) sont les variables hors base. Par l'annulation des variables hors base, on a:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$ ne satisfait pas aux contraintes, donc, cette solution de base n'est pas réalisable.

En ajoutant une variable artificielle à l'équation dans la quelle se pose le problème. Dans notre cas, c'est équation 2. On obtient :

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

La nouvelle fonction objective est: $f' = x_6$ et elle à minimiser. Le nouveau problème d'optimisation devient :

$$\begin{cases} min\ f' = x_6 \\ 6x_1 - x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

La forme canonique équivalente à ce PL est la suivante :

$$\begin{cases} max \quad -f' = -x_6 \\ 6x_1 - x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Nous remarquons que :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$ est une solution de base réalisable et nous pouvons initialiser l'algorithme du simplexe.

L'application de l'algorithme du simplexe, nous donne :

$$\begin{cases} max \qquad -f' = -x_6 \\ \ \ 6{,}2x_1 - 0.2x_4 + 0.2x_6 = 10{,}8 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_5 + 0.2x_6 = 0{,}8 \\ x_3 + 5x_5 - x_6 = 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Les variables de base son :

(x_3, x_4, x_6) comme variables de base et (x_1, x_2, x_5) sont les variables hors base.

La solution réalisable associée à cette base est:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}8 \\ 1 \\ 10{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dans cette étape, on voit que la variable artificielle devient une variable hors base et on peut l'exclure. En laissant tombé la colonne correspondant à cette variable et en gardant la solution de base réalisable trouvé.

Insérons la fonction objective initiale et nous résolvons par simplexe le PL suivant :

$$\begin{cases} max\ f = x_1 - x_2 \\ 6{,}2x_1 + x_4 - 0.2x_5 = 10{,}8 \\ \ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_5 = 0{,}8 \\ \ x_3 + x_5 = 1 \\ \ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

La solution optimale est :

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0,45\\1\\1,47\end{bmatrix} \text{et} \quad max\ f=1,47\,.$$

3.3. Dualité

Chaque programme linéaire possède son équivalent appelé dual. L'analyse théorique montre des PLs. montre qu'il se peut que le PL initiale n'ait aucun solution réalisable alors son dual en possède une ou plusieurs.

Pour un PL s'écrit dans la forme canonique suivante :

$$(\rho)_{primal}\begin{cases}max\ f=C^T X\\ AX\le B\\ X\ge 0\end{cases}$$ est équivalent au Pl. suivant:

$$(D)_{dual}\begin{cases}min\ j=BX\\ A^T Y\le C\\ Y\ge 0\end{cases}$$

Sachant que :

Le nombre de contraintes de (ρ) égale au nombre de variables de (D) ,

Le nombre de variables de (ρ) égale au nombre de contraintes de (D).

Les liens entre le programme primal et son dual sont résumés dans le tableau suivant :

Primal	***Dual***
maximisation	*minimisation*
Coefficient de f	*Second membre des contraintes*
Second membre des contraintes	*Coefficient de j*
Contraintes : $\begin{cases}=\\ \ge\\ \le\end{cases}$	*Variable :* $\begin{cases}signe\quad quelconque\\ \le\\ \ge\end{cases}$
Variable : $\begin{cases}signe\quad quelconque\\ \le\\ \ge\end{cases}$	*Contraintes :* $\begin{cases}=\\ \le\\ \ge\end{cases}$

Exemple 3.4:

Soit le PL suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=800x_1+500x_2 \\ 10x_1+5x_2\leq 50 \\ 15x_1+10x_2\leq 90 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Son dual est le suivant :

$$(D)=\begin{cases} min\ j=50y_1+90y_2 \\ 10y_1+15y_2\leq 800 \\ 5y_1+10y_2\leq 500 \\ y_1\geq 0, y_2\geq 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

3.4. Exercices avec solutions abrégées :

Exercice 1 :

Résoudre graphiquement le problème d'optimisation suivant :

1) Maximiser $F=200x_1+100x_2$
sous les contraintes :

$$8x_1+3x_2\leq 48$$
$$9x_1+16x_2\leq 144$$
$$10x_1+8x_2\leq 80$$

avec : $x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$

- **Réponse :**

Par l'application directe de la méthode graphique, nous obtenons :

$f_{max}=1310$

Exercice 2:

Résoudre graphiquement le problème d'optimisation suivant :

2) Maximiser $F=x_1+x_2$
sous les contraintes :

$$x_1-x_2\leq 2$$
$$x_1-x_2\geq -2$$

avec : $x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$

- **Réponse :**

L'ensemble des contraintes n'est pas fermé et par conséquence la fonction *f* n'est pas bornée.

Exercice 3:

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } F=1400x_1 + 800x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \end{cases}$$

$$\text{avec : } x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Résoudre ce problème par la méthode de simplexe

- **Réponse :**

L'application directe de la méthode de simplexe, nous donne :

$f_{max}=5800$

***Exercice 4** :*

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } F=x_1 + 2x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{avec : } x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Résoudre ce problème par:

1- la méthode graphique.

2. la méthode de simplexe.

- **Réponse :**

1. L'ensemble des contraintes n'est pas fermé et par conséquence la fonction f n'est pas bornée.
2. En utilisant l'algorithme du simplexe, on trouve qu'il existe un coefficient positif dans la fonction objective et il n'y a pas des solutions de base réalisables. Donc, f n'est pas bornée.

Chapitre 4 : Recherche opérationnelle : Les problèmes combinatoires et stochastiques

4.1. Introduction :

La théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre la plupart des problèmes discrets (combinatoires) qui posent la recherche opérationnelle. Un exemple type de problème combinatoire est le problème d'un arbre minimal. En effet, on doit relier N sites pour un coût global minimal de façon à ce que tout site puisse communiquer avec tous les autres.

Considérons les points A, B, C, D, E et un certain nombre des flèches joignant entre eux plusieurs couples de ces points (figure 4.1)

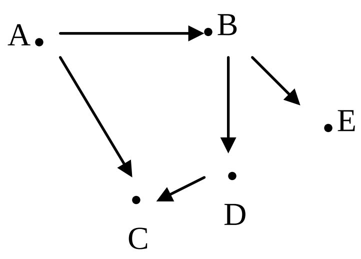


Figure 4.1 : Un Graphe représentant des flèches joignant des couples de points.

Au sens mathématique, ces flèches peuvent symboliser une **application Γ** dont le point d'extrémité initiale est l'argument et le point d'extrémité terminale, est l'image. A chaque point de l'ensemble X (l'ensemble **des sommets du graphe**) correspond par l'application Γ, un sous ensemble de X, par exemple :

$$\Gamma(A)=\{B,C\},\Gamma(D)=\{D,E\},\Gamma(C)=\{E\},\Gamma(D)=\{C\},\Gamma(E)=\varnothing$$

4 .2. Définitions

4 .2.1. Définition d'un graphe orienté : Un graphe est défini comme un couple $G\{X,\Gamma\},X$ étant l'ensemble des sommets de G et Γ est l'application associée au graphe G.

Remarque : Dans un graphe non orienté, les arcs se nomment les arrêtes.

4 .2.2. Définition d'un chemin : un chemin est une suite d'arc dont l'extrémité terminale de chacun (sauf pour le dernier) est l'extrémité initiale du suivant.

Remarque 4.1 :

- *Un chemin qui se ferme sur lui-même est un circuit.*

- *La longueur d'un chemin est le nombre de ses arcs, il est élémentaire s'il ne rencontre pas plus d'une fois chacun de ses sommets.*
- *Un chemin est simple s'il ne passe qu'une fois par chacun de ses arcs, il est élémentaire, s'il ne rencontre pas plus d'une fois chacun de ses sommets.*

Exemple 4.1 : Retournons à la figure 4.1 :

- **(A, B, E)** est un chemin simple élémentaire.

4.3 Représentation d'un graphe :

Tout graphe peut être défini par sa matrice associée (matrices d'adjacences) : matrice aux arcs ou matrice booléenne.

Dans la matrice aux arcs, comme dans la matrice booléenne, les éléments du graphe servent à désigner les lignes et les colonnes du graphe :

S'il existe un arc (x, y), entre le sommet x (extrémité initiale) et le sommet y (extrémité terminale). On décrit xy à l'intersection de la ligne x et la colonne y dans la matrice aux arcs (**A**). Dans la matrice booléenne (**B**), se traduit par la présence d'un '1' à l'intersection de la ligne x et la colonne y. L'absence d'arc, se traduit par la présence de '0'.

Exemple 4.2 :

Considérons le graphe ci-dessous :

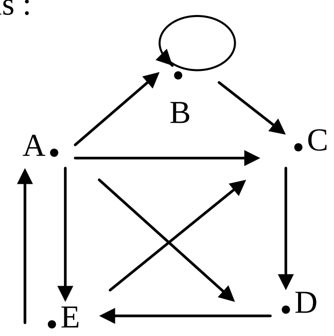


Figure 4.2 : Graphe orienté

Ses matrices aux arcs et booléennes sont les suivantes :

A	A	B	C	D	E
A		AB	AC		AE
B		BB	BC		
C				CD	
D	DA				DE
E	EA		EC		

M	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	0	1	1	0	0
C	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	1
E	1	0	1	0	0

4 .4 Caractéristiques d'un graphe :

4 .4.1 Graphe complet :

Deux sommets quelconques sont toujours adjacents, autrement dit : tous couples de sommets sont reliés dans au moins une de deux directions : pour tout arc *(x,y)* ona : $\{(x,y)\notin u \Rightarrow (y,x)\in u\}$ où : u est l'ensemble des arcs du graphe.

4 .4.2 Graphe symétrique :

Deux sommets adjacents sont toujours reliés dans les deux directions : pour tout arc *(x,y)* on a : $\{(x,y)\in u \Rightarrow (y,x)\in u\}$.

4 .4.3 Graphe anti-symétrique :

Deux sommets ne sont pas reliés $\{(x,y)\in u \Rightarrow (y,x)\notin u\}$ par deux arcs.

Remarque 4.2:

Une matrice associée symétrique correspond un graphe symétrique.

Une matrice associée anti-symétrique correspond un graphe anti-symétrique.

4. 5 Loi additive et loi multiplicative :

On peut élever au carré, au cube, etc. la matrice aux arcs d'un graphe, en utilisant les lois suivantes :

Loi additive : c'est simplement la réunion ensembliste.

Loi multiplicative : c'est la concaténation de deux arcs dont l'extrémité terminale du premier et initiale du second sont le même sommet.

Par exemple (A, B).(B,C)=(A,B,C)

Exemple 4. 3

Considérons la matrice aux arcs de la figure 4.2

$\mathbf{A^2}$	A	B	C	D	E
A	AEA	ABB	ABC AEC	ACD	
B		BBB	BBC	BCD	
C	CDA				CDE
D	DEA	DAB		DAC DEC	DAE
E		EAB	EAC	ECD	EAE

Une manière de contrôler le nombre de chemins obtenus consiste à faire correspondre à la matrice booléenne M, la matrice arithmétique $M^3,\ldots,M^{n-1}$, n est le nombre de sommets du graphe.

$\mathbf{M^2}$	A	B	C	D	E
A	1	1	2	1	0
B	0	1	1	1	0
C	1	0	0	0	1
D	1	1	2	0	1
E	0	1	1	1	1

4.6 Multiplication latine et chemin hamiltoniens

Pour chercher dans le graphe G les chemins élémentaires, il suffit de ne retenir que les chemins ne comportent aucune répétition de lettre. Cette opération est appelée multiplication latine.

$\mathbf{A'^2}$	A	B	C	D	E
A			ABC AEC	ACD	
B				BCD	
C	CDA				CDE
D	DEA	DAB		DAC DEC	DAE
E		EAB	EAC	ECD	

Le plus long chemin élémentaire comportent évidement (s'il existe) n-1 arcs, il passe une fois par tous ses sommets du graphe, on l'appelle chemin hamiltonien. Un chemin hamiltonien qui se ferme sur lui-même est un circuit hamiltonien.

Dans le graphe précédent (voir Figure 4.1), il y'a un seule circuit hamiltonien ABCDEA, alors que le graphe possède plusieurs chemins hamiltonien ABCDE, BCDAE, etc. On peut trouver ces chemins en utilisant la multiplication latine jusqu'à l'ordre (n-1).

4.7 Les fermetures transitives et les chemins hamiltoniens et les circuits hamiltoniens

On peut calculer la puissance successive, en utilisant comme loi additive ; la somme logique et comme loi multiplicative : le produit logique. Donc, M^K sera encore une matrice boolienne.

Dans ces conditions, la présence d'un 1 à l'intersection de la ligne x et la colonne y de M^K signifie : il existe au moins un chemin de longueur k entre x et y.

Exemple 4.4: Reprenons la matrice M du graphe montré sur la figure 4.2. L'application de la loi additive et multiplication logique, nous donnons la matrice $M^{\cdot 2}$ suivante :

$M^{\cdot 2}$	A	B	C	D	E
A	1	1	1	1	0
B	0	1	1	1	0
C	1	0	0	0	1
D	1	1	1	0	1
E	0	1	1	1	1

On appelle fermeture transitive d'un sommet *x* d'un graphe *G*, l'expression suivante :

$$\hat{\Gamma}(x) = \{x\} \cup \Gamma(x) \cup \Gamma^2(x) \cup \ldots \cup \Gamma^{k-1}(x)$$

ou bien :

$$\hat{\Gamma}(x) = \Gamma\left(\Gamma^{k-1}(x)\right)$$

Remarque 4.3 : on peut obtenir la fermeture transitive de l'ensemble 'x' des sommets du graphe G en calculant la matrice :

$$\hat{\Gamma}(x) = I \oplus M \oplus \dot{M}^2 \oplus \ldots \dot{M}^{n-1} = (I \oplus M)^{\cdot n-1}$$

I : matrice unité et $\oplus$: la somme logique.

4.8 Méthode de George Demoucrons et les chemins hamiltoniens

La méthode de la multiplication latine exposée dans la section 4.6 permet de trouver les chemins et les circuits hamiltoniens d'un graphe G. Cependant, cette méthode est efficace pour les graphes dont le nombre de sommets assez petit. Dans cette section, on va représenter une autre méthode basée sur *la notion des fermetures transitives*:

1. Calculons $\hat{\Gamma}(x)$
2. Calculons $\hat{\Gamma}^{-1}(x)$
3. Calculons $\hat{\Gamma}^{-1}(x) \cap \hat{\Gamma}(x)$

Pour un sommet x_i , la classe d'équivalence (ou composante fortement connexe) à laquelle appartient x_i est donc : $\hat{\Gamma}^{-1}(x_i) \cap \hat{\Gamma}(x_i)$.

Exemple 4.5: soit le graphe avec quatre sommets suivant :

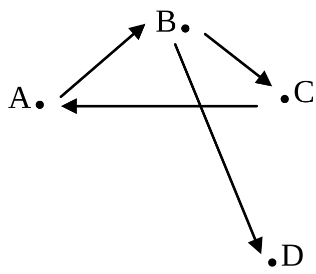


Figure 4.3 : Graphe 4- sommets

1. Calculons $\hat{\Gamma}(A) = \{A, B, C, D\}$
2. Calculons $\hat{\Gamma}^{-1}(A) = \{A, B, C\}$
3. Calculons $\hat{\Gamma}^{-1}(A) \cap \hat{\Gamma}(A) = \{A, B, C\}$

On remarque que les sommets A, B et C appartiennent à la même classe fortement connexe (il reste uniquement le sommet D). Le graphe de la figure 4.3 peut être représenté sous la forme suivante :

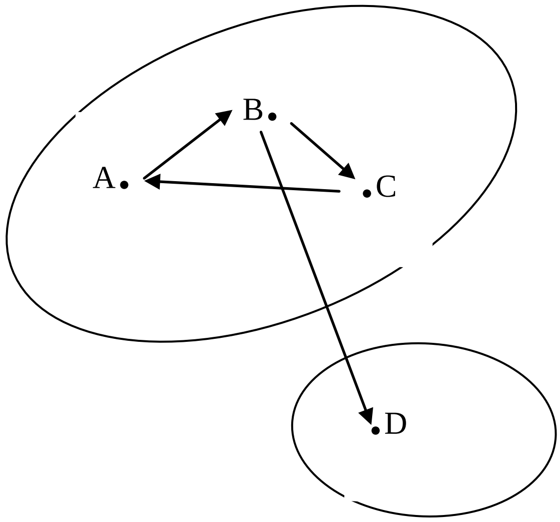


Figure 4.4 : Graphe orienté et classes fortement connexes

Donc, le graphe contient deux classes fortement connexes. D'après la dernière figure, il n'y a pas de chemins hamiltoniens ni de circuits hamiltoniens.

4.9 Utile du concept du graphe dans la recherche opérationnelle :

Un graphe peut représenter toutes sorte de situation dans les phénomènes d'organisation par exemple, un réseau, des canalisations où circule un fluide, etc.

On dit qu'un graphe évalué si, a tout arc qui le constitue, correspond une valeur numérique, qu'on écrit seulement, les valeurs peuvent être des quantités a transporter des coûts, des durées, etc.

4.10 Quelques problèmes combinatoires:

4.10.1 Problème de chemin à valeur minimale

En théorie des graphes, En peut utiliser l'équation de récurrence sert à résoudre le problème du plus court chemin. Il permet, par exemple, de déterminer le plus court chemin pour se rendre d'une ville à une autre connaissant le réseau routier d'une région. Il s'applique à un graphe connexe dont le poids lié aux arêtes est un réel positif.

Exemple 4.6: Dans le graphe suivant, les nœuds symbolisent des villes identifiées par une lettre x_i et les arêtes indiquent la distance entre ces villes. On cherche à déterminer le plus court trajet pour aller de la ville 1 à la ville 7.

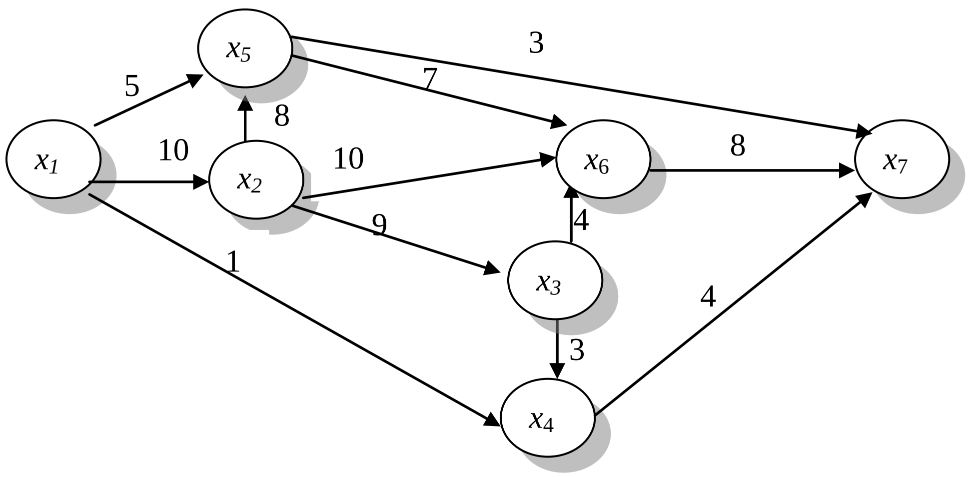


Figure 4.4 : Graphe d'une ville

Algorithme de Dantzig :

L'algorithme de Dantzig résout un problème de plus court chemin. Il sert à trouver un chemin optimal (le plus court ou bien le plus long) entre deux sommets d'un graphe orienté. IL est résumé par les étapes suivantes :

On numérote les sommets de x_o à x_{n-1} .

Appelons : λ_j , la valeur optimale x_o et x_j .

1. Poser λ_O et $E_1 = \{x_o\}$.

2. A toute étape $k \geq 2$ du problème, associer à chacun des sommets x_i des k sommets marqués le sommet x_1^*, tel que : le sommet $v\left(x_i, x_i^*\right)$ soit minimal
3. Déterminer le sommet $x_p \in E_k$, tel que : $\lambda_p + v\left(x_p, x_p^*\right) = \min\left(\lambda_i + v\left(x_i, x_i^*\right)\right)$
4. Poser $E_k = E_k \cup \left\{x_p^*\right\}$ et $\lambda_p = \lambda_q + v\left(x_p, x_q\right)$
5. Revenir à 2, jusqu'à ce que λ_{n-1} soit déterminé.

Exemple 4.7:

4.10.2 Problème d'affectation :

Exemple une administration désire faire des mutations aux fonctionnaires1, 2, 3 et 4 et leur offre les postes A, B, C, D, E. Ces fonctionnaires désirent maximiser leurs satisfaction générale, décident d'affecter chacun un classement des postes offerts et obtiennent le tableau suivant regroupant leurs avis.

Il est évident qu'il convient, pour maximiser la satisfaction générale de choisir un chiffre et un seul par ligne et par colonne, de manière que la somme des cinq chiffres choisis soit minimale. Donc, en soustrayant, ligne par ligne et colonne par colonne le plus petit élément de la ligne ou de colonne, on obtient :

		2	**3**	**4**	**5**
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0	1	2	3	4
B	0	3	1	4	2
C	2	1	0	4	3
D	0	1	2	4	3
E	1	0	3	2	4

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0	1	2	1	2
B	0	3	1	2	0
C	2	1	0	2	1
D	0	1	2	2	1
E	1	0	3	0	2

Choisir un zéro par ligne et par colonne, nous n'avons pas obtenu la solution comme montre le tableau ci-dessous :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0				
B					0
C			0		
D					
E		0			

Méthode de Hongroise:

Reprenons le dernier tableau, en mentionnant toute fois également les zéros que nous avons éliminé des choix ultérieur. Par suite d'affectation d'un autre zéro sur la même ligne ou la même colonne ; Ces zéros seront dite zéros barrés, les zéros affectés seront dits zéros encadrés (les zéros montrés dans le tableau entre crochés).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	[0]				
B	~~0~~				[0]
C	~~0~~		[0]		
D					
E		[0]		~~0~~	

1. Marquons toute ligne n'ayant pas un zéro encadré (ici c'est la ligne D)
2. Marquons ensuite toute colonne ayant un zéro barré sur une ligne marquée (la colonne 4)
3. Marquons ensuite toutes lignes ayant un zéro encadrés sur une colonne marquée (la ligne A) et revenons à l'étape 2, jusqu'à ce que le marquage ne soit plus possible
4. Traçons un trait sur la ligne non marquée et les colonnes marquées.

A	0				
B	0				0
C	0		0		
D	0				
E		0		0	

5. Considérons le plus petit nombre du tableau restant, retranchons le de tous les éléments non rayés et ajoutons aux éléments rayés deux fois (tableau ci-dessous).

1	2	3	4	5
0	0	1	0	1
1	3	1	2	0
3	1	0	2	1
0	0	1	1	0
2	0	3	0	2

6. Sur le tableau ci-dessous, il est possible d'affecter un zéro par ligne et par colonne qui constitue les solutions équivalentes du problème (voir les tableaux suivants):

	1	2	3	4	5
A	X				
B					X
C			X		
D		X			
E				X	

	1	2	3	4	5
A		X			
B					X
C			X		
D	X				
E				X	

	1	2	3	4	5
A				X	
B					X
C			X		
D		X			
E	X				

4.11. Programmation stochastique

On dit qu'on a un problème stochastique, lorsque le hasard y intervient comme difficulté principale.

Un processus stochastique (ou processus aléatoire) est une famille d'aléas numérique (ou variables aléatoires) $(\xi_t, t \in T)$ où t parcourt l'ensemble d'indice T .

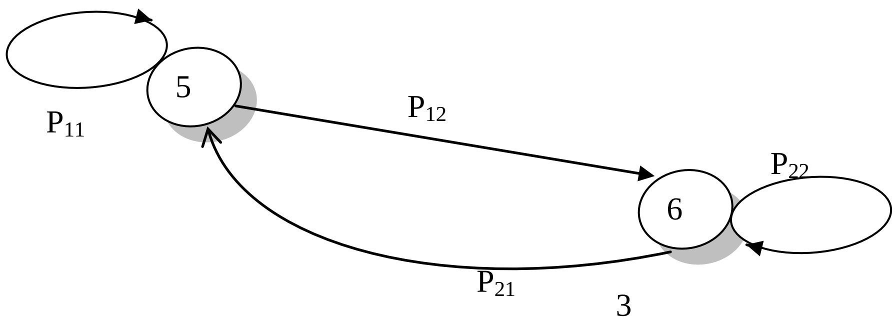
Cas1 : Si T est discret, on parle de « suite stochastique » et $t_1, t_2, ..., t_n$ sont des instants données.

Cas2 : Si T est continu, on parle de « processus stochastique » et t désigne un instant quelconque.

Cas 3 : Lorsque ξ_t peut prendre un nombre fini de valeurs, le processus est dit à espace d'état discret. Si au contraire, les valeurs appartiennent à un continu, il est dit à espace d'état continu.

Exemple 4.7

Pour un système a deux états, il ya quatre transitions possibles, on obtient le graphe suivant :



Pour un système à trois états on a neuf transitions possibles. De façon générale, pour un système de *n* états on a :

$$P_{ij} = \left\{ P_r \left(\xi_n = j \middle| \xi_n = i \right) \right\} \tag{4.1}$$

En notation matricielle, on peut définir la matrice de transition $P = \left[P_{ij} \right]$.

Exemple 4.8

Considérons le graphe précédent : la matrice de transition de ce graphe s'écrit comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Comme cette matrice est de nature probabiliste, ses coefficients sont des nombres réels tels que :

$0 \le P_{ij} \le 1, \forall i \in 1,\dots,n, \forall j \in 1,\dots,n$

D'autre part, comme le systéme, après chaque transition, se trouve nécessairement dans l'un quelconque de ses états, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$$

- **Matrice de récompense**

Exemple 4.9 :

Exemple soit une machine fabrique chaque jour une pièce donnée sous la surveillance d'un ouvrier non spécialisé. Cette pièce une fois fabriquée, peut être de bonne qualité ou de mauvaise qualité afin de caractériser ce processus de fabrication ; On dispose de la matrice de transition suivante :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

L'ouvrier est payé selon la matrice de récompense suivante :

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Le patron essaye naturellement de trouver des solutions pour améliorer la rentabilité de son produit.

Par exemple, il se demande si ce n'est pas plus économique de remplacer l'ouvrier simple par un ouvrier spécialisé.

Cette nouvelle situation va changer la matrice de transition et aussi la matrice de récompense ;

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{bmatrix}.$$

Donc, de façon générale, chaque alternative (k) se caractérise par la matrice de transition $P(k)$ et par sa matrice de récompense associée :

$$P_k = \begin{bmatrix} p_{11}^k & p_{12}^k \\ p_{21}^k & p_{22}^k \end{bmatrix}, R_k = \begin{bmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

- **Choix de la meilleure alternative et expression de Belman**

L'expression de Belman permet de déterminer la meilleure alternative à l'étape *(n+1)* par comparaison des récompenses données.

Pour chaque alternative :

$$v_i\left(n+1\right)=\max\left\{\sum_{j=1}^{N}p_{ij}^{k}\left[r_{ij}^{k}+v_j\left(k\right)\right]\right\} \quad (4.4)$$

Exemple 4.10 :

Retournons à l'exemple de la machine qui fabrique les pièces :

Initialement : $v_1^1\left(0\right)=v_2^1\left(0\right)=0$ pour la première alternative.

$v_1^2\left(0\right)=v_2^2\left(0\right)=0$ pour la deuxième alternative.

On considère, respectivement, les matrices de la machine avec un ouvrier simple est un ouvrier spécialisé $\left(P_1,R_1\right)$, $\left(P_2,R_2\right)$.

Pour un ouvrier simple, on aura après une transition, la récompense attendue est la suivante :

$$v_1^1\left(1\right)=\sum_{j=1}^{2}p_{1j}^1r_{1j}^1=p_{11}^1r_{11}^1+p_{12}^1r_{12}^1=6$$

$$v_2^1\left(1\right)=\sum_{j=1}^{2}p_{2j}^1r_{2j}^1=p_{21}^1r_{21}^1+p_{22}^1r_{22}^1=-3$$

Pour un ouvrier spécialisé, on aura après une transition, la récompense est donnée par :

$$v_1^2\left(1\right)=\sum_{j=1}^{2}p_{1j}^2r_{1j}^2=p_{11}^2r_{11}^2+p_{12}^2r_{12}^2=4$$

$$v_2^2\left(1\right)=\sum_{j=1}^{2}p_{2j}^2r_{2j}^2=p_{21}^2r_{21}^2+p_{22}^2r_{22}^2=-5$$

Alternative d'un ouvrier simple	**Alternative d'un ouvrier spécialisé**
$v_1^1\left(1\right)=6$, $v_2^1\left(1\right)=-3$	$v_1^2\left(1\right)=4$, $v_2^2\left(1\right)=-5$

Conclusion :

Si on part avec une bonne pièce, on choisira l'alternative donne *max(6,4)=6, k=1*.

Si on part avec une mauvaise pièce, *max (-3,-5)= -3,* donc, alternance *k=1*.

Pour examiner les récompenses à l'étape n=2,

$$v_i\left(2\right)=\max_k\left\{\sum_{j=1}^{N}p_{ij}^{k}\left[r_{ij}^{k}+v_j\left(1\right)\right]\right\}$$

Pour k=1 ;

$$v_1^1\left(2\right)=\max_k\left\{\sum_{j=1}^{N}p_{ij}^{k}\left[r_{ij}^{k}+v_j\left(1\right)\right]\right\}=7.5$$

$$v_2^1\left(2\right)=\max_k\left\{\sum_{j=1}^{N}p_{ij}^{k}\left[r_{ij}^{k}+v_j\left(1\right)\right]\right\}=-2.4$$

Pour k=2 ;

$$v_1^2(2) = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \left[r_{ij}^k + v_j(1) \right] \right\} = 8.2$$

$$v_2^1(2) = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \left[r_{ij}^k + v_j(1) \right] \right\} = -1.7$$

En considérant l'état 1, la meilleure alternative est correspond au max (7.5, 8.2). Alors, on choisira la second (k=2). De même max (-2.4, -1.7) = -1.7, la meilleur alternative en partant de l'état '2' est également la second (k=2).

4.11.1. Processus de Markove :

- **Définition :**

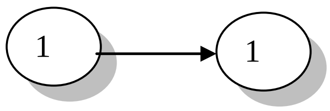
Les concepts de base d'un processus de Markove font appel à deux notions :

1. La notion d'état que peut occuper un système.
2. La notion de transition qui effectue ce système en passant d'un état à un autre.

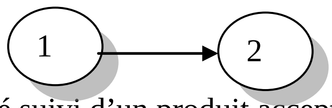
Exemple 4.11 : qualité de production

Une machine fabrique un certain produit. Ce produit peut être accepter s'il répond au norme (état 1), ce produit peut être refuser si non (état 2). On désigne alors deux états possibles acceptés ou refusés. Dans la séquence de production :

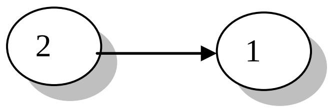
1. On peut fournir un produit accepté (état 1) suivi d'un produit accepté, c'est la transition :



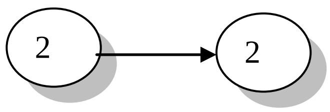
2 . On peut fabriquer un produit accepté (état 1) suivi d'un produit refusé, c'est la transition :



3 . On peut faire un produit refusé suivi d'un produit accepté, c'est la transition :



4 . On peut faire un produit refusé (état 1) suivi d'un produit refusé, c'est la transition :



Remarque 4.4: cet exemple est un exemple de processus de Markove à deux états, cependant, on peut trouver des processus markoviens avec des nombreux états.

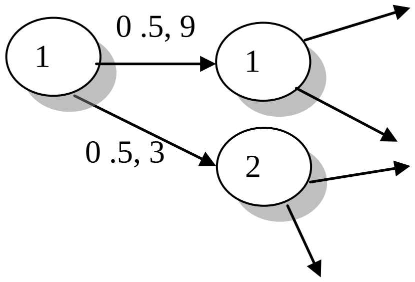
- **Représentation d'un processus de Markove Discret :**

Un processus de Markove peut être représenté à l'aide d'un graphe dans lequel les nœuds représentent les états du système et les arcs, les transitions.

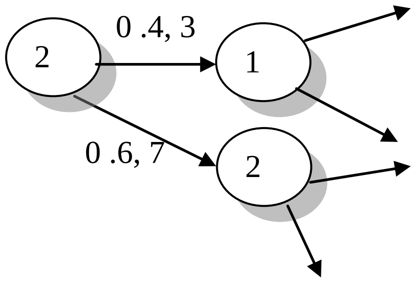
Exemple 4.11 :

Soit un processus de Markove à deux états donné par la matrice de transition et la matrice de récompense associées suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}. \, v_1(0) = 0 \, , v_2(0) = 0$$



$$v_1(1) = \sum_{j=1}^{2} p_{1j} r_{ij} = p_{11} r_{11} + p_{12} r_{12} = 6$$



$$v_2(1) = \sum_{j=1}^{2} p_{2j} r_{2j} = p_{21} r_{21} + p_{22} r_{22} = -3$$

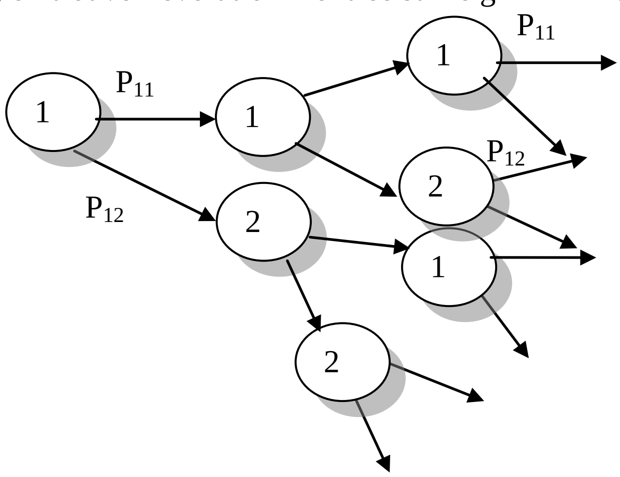
n	0	1	2	3	4	5
$V_1(n)$	0	6	7.5	8.55	9.55	10.5556
$V_2(n)$	0	-3	2.4	1.44	0.44	0.5556

Au vu de ces résultats, on constate que pour éviter de perdre, il faut au moins jouer cinq parties dans le cas ou on part de l’état 2.

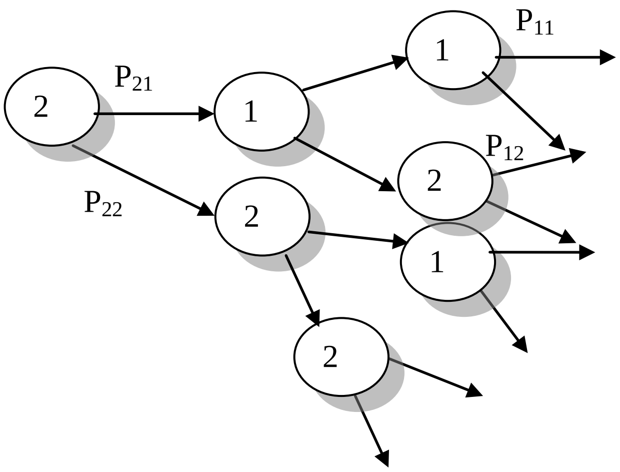
- **Evolution temporelle d’un processus de Markove :**

Exemple 4.11 :

Si on part de l’état ‘1’, on trouve l’évolution montrée sur le graphe suivant :



Si on part de l'état '2', on trouve l'évolution selon le graphe ci-dessous :



Remarque, dans la réalité, le système suit seul chemin parmi les chemins possibles.

- **Analyse du processus** : On souhaite prédire quelles sont les chances pour que le système soit dans tel état dans le future. On notera $P_i(n)$, la probabilité pour que le système occupe l'état 'i' après n transitions.

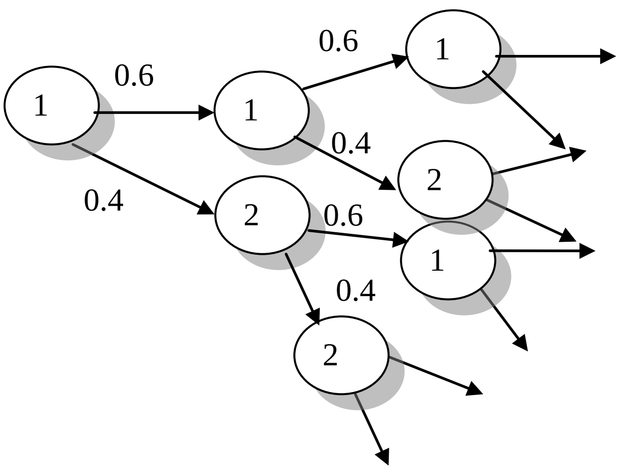
Exemple 4.11 :

Soit la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.55 & 0.45 \end{bmatrix}$$

P est la matrice de transition.

Si le constructeur part initialement à partir d'un état de succès. Donc, $P_1(0) = 1, P_2(0) = 0$



Après deux transitions, la probabilité de se trouver dans l'état '1' est la suivante :

$P_1(n=2) = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} = 0.58$

Alor, la probabilité de se trouve dans l'état '2' est la suivante :

$P_2(n=2) = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} = 0.42$

$P_1(n=2)+P_2(n=2)=1$

De façon générale :

$P_j(n+1) = \sum_{i=1}^{n} P_i(n)p_{ij}$ et d'autre part, le système est nécessairement dans l'un des états du système d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(n) = 1$$

- **Analyse du processus de Markove discret à long terme**

Dans la pratique, on s'intéresse souvent à l'évolution du processus après un grand nombre de transitions (à long terme).

Soit la relation récurrente suivante :

$\Pi(n+1) = \Pi(n).P, n = 0,1,2,......$

avec :

P est la matrice de transition

$\Pi(n)$ représente le vecteur d'état à l'étape 'n'.

En partant de l'état 0, on peut déterminer les probabilités d'état $\Pi(n)$ de façon récursive.

Pour n=1, on a : $\Pi(1) = \Pi(0).P$

Pour n=2, on a : $\Pi(2) = \Pi(1).P = \Pi(0).P^2$, etc. De façon générale :

$\Pi(n) = \Pi(0).P^n$

Exemple 4.12 :

Considérons la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.55 & 0.45 \end{bmatrix}$$

On suppose $\Pi(0) = [1 \quad 0]$

Le tableau suivant représente les éléments de vecteur $\Pi(n)$ jusqu'à l'étape quatre.

n	0	1	2	3	4
$\Pi_1(n)$	1	0.6	0.58	0.579	0.57895
$\Pi_2(n)$	0	0.4	O.42	0.421	0.42105

Détermination des probabilités d'état à long terme :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(n) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i(n) = 1$$

De plus la relation récurrente :

$$\Pi(n+1) = \Pi(n).P, n = 0,1,2,......$$

$$P_j(n+1) = \sum_{i=1}^{n} P_i(n) p_{ij}$$

Ainsi à pour : $n \to \infty, \Pi(n+1) = \Pi(n).P$ et donc, $\Pi(n) = \Pi(n).P$

Exemple 4.12 :

Soit la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.55 & 0.45 \end{bmatrix}$$

$n \to \infty, \Pi(n+1) = \Pi(n).P$ implique :

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.55 & 0.45 \end{bmatrix}$$

Qui nous donne le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 0.4\Pi_1 = 0.55\Pi_2 \\ 0.6\Pi_1 = 0.45\Pi_2 \end{cases}$$

Deplus on a :

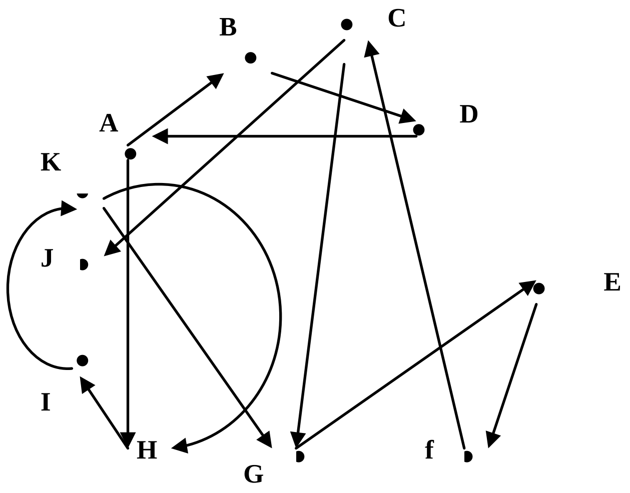
$$\Pi_1 + \Pi_2 = 1$$

Il admet une solution unique : $\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{19} & \frac{8}{19} \end{bmatrix}$. Cette valeur limite n'est pas valable que lorsque le système aurait effectué un nombre suffisant de transition a partir d'un état initial donné. A ce moment, on peut considèrer que le système devient sans mémoire.

4.12 Exercices avec solutions abrégées:

Exercice 01 :

Utiliser cette méthode pour trouver les classes ou composante fortement connexe du graphe suivant :



- **Réponse :**

Il y'a quatre classes au composantes fortement connexes. Elles sont :

La classe 1 est $\{A, B, D\}$.

La classe 2 est $\{\mathrm{C}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}\}$.

La classe 3 est $\{\mathrm{H}, \mathrm{I}, \mathrm{K}\}$.

La classe 4 est $\{J\}$.

Exercice 02 :

On a tiré au hasard les éléments de la matrice ci-dessous a six lignes (**A, B, C, D, E et F**) et six colonnes (**1, 2, 3, 4, 5 et 6**)

Affecter un élément et un seul par ligne et par colonne, de manière à obtenir la somme minimale de ces éléments.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	10	90	27	14	39	52
B	29	24	79	90	23	13
C	17	43	62	02	73	70
D	58	14	06	18	16	63
E	15	41	78	44	73	70
F	25	44	81	36	80	80

- **Réponse :**

L'application directe de la méthode de Hongroise, nous donne le résultat final montré sur la tableau suivant

	1	2	3	4	5	6
A			X			
B						X
C				X		
D					X	
E	X					
F		X				

La somme minimale est 117

Exercice 03:

En utilisant l'algorithme de Dantzig, déterminer le plus court trajet pour aller de la ville 1 à la ville 7 du graphe montré sur la figure 4.2 .

- **Réponse :**

Le plus court trajet pour aller de la ville 1 à la ville 7 est x_1 x_4 x_7.

Chapitre 5 :

Eléments de la théorie des jeux

5.1 Introduction :

La théorie des jeux regroupe les outils d'analyse de nombreux relations économiques, sociales en termes de jeu stratégique. De façon, plus précis, un jeux stratégique est un ensemble de règles qui contraint les joueurs et qui termine le gain des joueurs sur la base des action entreprise. La théorie des jeux a connu un essor considérable depuis la parution de l'ouvrage de John von Neumann et mongentern en 1944 « *Theory of Games and Economic Behavior* »

Exemple 5.1 : jeu à deux personnes ;

Considérons deux personnes (A) et (B) préoccupées par un jeu dont la règle s'exprime par le tableau suivant :

		B		
		I	**II**	**III**
A	**1**	1	0	-2
	2	2	1	2
	3	-1	-1	0

Tableau 5.1

A chaque coup, chacun des joueurs doit choisir, indépendamment de l'autre, une des stratégies pures à sa disposition : Le jour A joue la ligne 1, cela signifie, qu'il gagnera un jeton si (B) joue la colonne II. Et, deux jetons si (B) joue (III). Et enfin, deux jetons si (B) joue (III).

La situation est évidement tout l'inverse pour (B), s'il joue la colonne (I), il perdra un jeton si (A) joue la ligne 1, etc. Donc, la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est autre que la matrice des gains de (A) ou encore, la matrice des pertes de (B).

Il est à remarquer, qu'un gain négatif est une perte pour (A) et un gain pour (B) et l'inverse.

Le joueur (A) n'a pas d'intérêt à jouer la ligne (1) ou (3) :

1. S'il joue la ligne (1), il ne peut espérer gagner qu'un jeton, mais risque de perdre deux.
2. S'il joue la ligne (3), ne peut espérer aucun gain.
3. S'il joue la ligne (2), il est assuré de gagner au moins un jeton, quelle que soit la décision de (B). Dans ces conditions (B) doit jouer la colonne II pour minimiser sa perte (limitera sa perte à un jeton).
   L'élément situé à l'intersection de la ligne (2) et la colonne (II) égale à la valeur du jeu appelé point selle. C'est le minimum des valeurs inscrites sur la ligne (2) (jouer A) et le maximum des valeurs portées dans la colonne II.

5.2 Théorie des jeux et la programmation linéaire :

Exemple 5.2

		B			
		I	**II**	**III**	**VI**
A	**1**	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Tableau 5.2

Supposons que A cherche à déterminer les fréquences p_1, p_2 et p_3 de ses choix. Ces fréquences s'expriment en fraction de l'unité. On a :

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0 .$$

Si B joue la ligne I, le gain de A s'écrira :

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3$$

Si B joue la ligne II, le gain de A deviendra :

$$a_{12}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3$$

Enfin, si B joue VI, A recevra :

$$a_{14}p_1 + a_{24}p_2 + a_{34}p_3$$

Comme il est probable que B jouera lui-même les colonnes avec les fréquences : q_1, q_2, q_3 et q_4 telles que :

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1, q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0, q_4 \geq 0 .$$

Donc, l'expression de gain de A s'écrira :

$$R_a = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)q_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)q_2 + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)q_3 + (a_{14}p_1 + a_{24}p_2 + a_{34}p_3)q_4$$

et la perte de B peut exprimer comme suit :

$$P_b = (a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + a_{14}q_4)\,p_1 + (a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + a_{24}q_4)\,p_2 + (a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + a_{34}q_4)\,p_3$$

Remarque : les deux expressions : R_a et P_b sont équivalentes.

A qui est un joueur maximisant, désir évidement de dépasser si possible ou, au moins atteindre, la valeur du gain (G). En effet, son gain doit être le plus élevé possible. Même dans le cas où le joueur B se bornerait à une stratégie pure, c._à._d:

1. $q_1 = 1, q_2 = q_3 = q_4 = 0$
2. $q_2 = 1, q_1 = q_3 = q_4 = 0$
3. $q_3 = 1, q_1 = q_2 = q_4 = 0$
4. $q_4 = 1, q_1 = q_2 = q_3 = 0$

On obtient alors :

1. $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 \geq G$ (si $q_1 = 1$)
2. $a_{12}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 \geq G$ (si $q_2 = 1$)
3. $a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 \geq G$ (si $q_3 = 1$)
4. $a_{14}p_1 + a_{24}p_2 + a_{34}p_3 \geq G$ (si $q_4 = 1$)

Au contraire pour le joueur B, joueur minimisant, sa perte doit être le plus faible possible

1. $(a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + a_{14}q_4) \leq G$ (si $p_1 = 1$)
2. $a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + a_{24}q_4 \leq G$ (si $p_2 = 1$)
3. $a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + a_{34}q_4 \leq G$ (si $p_3 = 1$)

La détermination de la stratégie mixte optimale, c'est-à-dire les fréquences les plus favorables pour chacun des joueurs, peut être conduit à la résolution de l'un des problèmes linéaires suivants :

$$(\rho)=\begin{cases}\max(G)\\ a_{11}p_1+a_{21}p_2+a_{31}p_3\geq G\\ a_{12}p_1+a_{23}p_2+a_{33}p_3\geq G\\ a_{13}p_1+a_{23}p_2+a_{33}p_3\geq G\\ a_{14}p_1+a_{24}p_2+a_{34}p_3\geq G\\ p_1+p_2+p_3=1\\ p_1\geq 0,\ p_2\geq 0,\ p_3\geq 0\end{cases}\qquad(5.1)$$

Ou bien

$$(\rho)=\begin{cases}\min G\\ a_{11}q_1+a_{12}q_2+a_{13}q_3+a_{14}q_4\leq G\\ a_{21}q_1+a_{22}q_2+a_{23}q_3+a_{24}q_4\leq G\\ a_{31}q_1+a_{32}q_2+a_{33}q_3+a_{34}q_4\leq G\\ \quad q_1+q_2+q_3+q_4=1,,\\ \quad q_1\geq 0,q_2\geq 0,q_3\geq 0,q_4\geq 0\end{cases}\qquad(5.2)$$

Ce sont deux programmes linéaires paramétrés, en dualité

Pour trouver les fréquences p_1, p_2 , p_3 , q_1,q_2,q_3 et q_4 résoudre le problème d'optimisation (5.1), par les méthodes d'optimisation linéaire (voir chapitre 3) . Après la détermination des valeurs p_1,p_2,p_3 et G. Les valeurs q_1,q_2,q_3 et q_4 sont, facilement, obtenus par la résolution du système linéaire suivant:

$$\begin{cases}a_{11}q_1+a_{12}q_2+a_{13}q_3+a_{14}q_4\leq G\\ a_{21}q_1+a_{22}q_2+a_{23}q_3+a_{24}q_4\leq G\\ a_{31}q_1+a_{32}q_2+a_{33}q_3+a_{34}q_4\leq G\\ \quad q_1+q_2+q_3+q_4=1,,\\ \quad q_1\geq 0,q_2\geq 0,q_3\geq 0,q_4\geq 0\end{cases}\qquad(5.3)$$

D'une manière équivalente, on peut résoudre le problème d'optimisation linéaire (5.2) afin d'obtenir les fréquences, q_1,q_2,q_3 et q_4 et la valeur du gain G.

Connaissant ces valeurs, la résolution du système d'équation suivant peut fournir les autres fréquences p_1, p_2 et p_3.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 \geq G \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 \geq G \\ a_{14}p_1 + a_{24}p_2 + a_{34}p_3 \geq G \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0 \end{cases}$$

(5 .4)

5.2.1 Application : Soit le jeu à deux personnes défini par le tableau suivant **:**

		B		
		I	**II**	**III**
A	**1**	1	0	-2
	2	2	1	2
	3	-1	-1	0

Tabbleau 5.3

La stratégie mixte optimale put être obtenue par la résolution de l'un des problèmes d'optimisation suivants :

$$\begin{cases} \max G \\ -p_1 + p_2 + 3p_3 \geq G \\ 2p_1 + p_2 + 3p_3 \geq G \\ p_1 + 2p_2 - 3p_3 \geq G \\ p_1 + p_2 + p_3 \geq G \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$(\rho) = \begin{cases} \min G \\ -q_1 + 2q_2 + q_3 \leq G \\ -q_1 - 2q_2 + 2q_3 \leq G \\ 3q_1 + 4q_2 - 3q_3 \leq G \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1, \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Considérons le problème d'optimisation (5.6), en remplaçant la variable $q_3 = -q_1 - q_2 + 1$ dans les contraintes d'inégalité, il devient :

$$(\rho)=\begin{cases}\min G\\ -2q_1+q_2\le G-1\\ -q_1-4q_2\le G-2\\ -6q_1+7q_2\le G+3\\ q_1+q_2+q_3=1,\\ q_1\ge 0, q_2\ge 0, q_3\ge 0\end{cases}\tag{5.6}$$

Introduisons les variables d'écart pour rendre les inégalités sous forme d'égalité, le problème devient :

$$(\rho)=\begin{cases}\min G\\ -2q_1+q_2+q_4=G-1\\ -q_1-4q_2+q_5=G-1\\ 6q_1+7q_2+q_6=G+3\\ q_1+q_2+q_3=1\\ q_1\ge 0, q_2\ge 0, q_3\ge 0,\\ q_4\ge 0, q_5\ge 0, q_6\ge 0\end{cases}\tag{5.7}$$

Le systéme (5.7) est équivalent au probléme suivant :

$$(\rho)=\begin{cases}\min(-q_1-4q_2+q_5+2)\\ -q_1+5q_2+q_4-q_5=1\\ -7q_1+11q_2-q_5+q_6=5\\ q_1+q_2+q_3=1\\ q_1\ge 0, q_2\ge 0, q_3\ge 0\end{cases}\tag{5.8}$$

Afin de résoudre ce problème par simplexe, nous écrivons ce problème sous la forme canonique (voir chapitre 3) suivant :

$$(\rho)=\begin{cases}\max(q_1+4q_2-q_5-2)\\ -q_1+5q_2+q_4-q_5=1\\ 7q_1+11q_2-q_5+q_6=5\\ q_1+q_2+q_3=1\\ q_1\ge 0, q_2\ge 0, q_3\ge 0, q_5\ge 0, q_6\ge 0, q_7\ge 0\end{cases}\tag{5.9}$$

En utilisant la méthode du simplexe, les résultats sont :

$$q_1 = \frac{7}{23}, q_2 = \frac{6}{23}, q_3 = \frac{10}{23}, q_4 = q_5 = q_6 = 0, G = \frac{15}{23} \quad .$$

La résolution du système suivant:

$$\begin{cases} G = \frac{15}{23} \\ -p_1 + p_2 + 3p_3 \geq G \\ 2p_1 + p_2 + 3p_3 \geq G \\ p_1 + 2p_2 - 3p_3 \geq G \\ p_1 + p_2 + p_3 \geq G \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0 \end{cases}$$

donne la solution suivante :

$$p_1 = \frac{17}{46}, p_2 = \frac{10}{23}, p_3 = \frac{9}{46}$$

5.3 Recherche opérationnelle et jeu d'entreprise

Dans ce cours, nous nous limiterons à décrire l'intérêt de la recherche opérationnelle dans le monde de l'entreprise. Un jeu d'entreprises est un modèle de simulation, s'applique aux situations concurrentielles, dans la quelle les décisions peuvent entreprises comme dans un jeu mathématique.

Les jeux d'entreprise sont conçus seulement pour l'enseignement des étudiants ou l'entrainement des cadres. Les étudiants comprend d'abord les différents aspect de la gestion : construction, entretient et développement des unités de fabrication, apprivoisement des matière première, évolution des prix de production, stockage et transport de produit finis, etc. Au contraire des cadres, pour l'entrainement des cadres, les joueurs sont soumis, comme dans le réel, à la nécessité de prendre leurs décisions dans un temps limité.

Exemple 5.3

Deux entreprises concurrentes A et B, qui se partagent un marché, peuvent faire de la publicité par affiches, par journaux ou par radio. Au début de chaque mois, chacun de deux directeurs choisit d'affecter son budget de publicité du mois à l'un de ces trois supports.

Le directeur de ‘A ‘ a déterminé que :

-S'il faisait uniquement de la publicité par affiches, il perdrait 10.000 francs si B adoptait le même point de vue, mais il aurait un profit de 10.000 Francs si B décidait d'utiliser seulement les journaux ou bien choisissait uniquement des spots publicitaires à la radio.

-S'il faisait uniquement sa publicité par journaux :

Il perdrait 20.000 francs si B faisait le même choix.

Il gagnerait 20.000 francs si B employait seulement des affiches ou bien se servait uniquement de la radio pour sa publicité.

-S'il faisait uniquement sa publicité par radio :

Il perdrait 30.000 francs si B faisait le même choix.

Il gagnerait 30.000 francs si B faisait sa publicité par affiches ou bien par journaux.

Le tableau suivant résume le jeu entre 'A' et 'B'

		B		
		I	**II**	**III**
A	**1**	-10000	-10000	10000
	2	20000	-20000	20000
	3	30000	30000	-30000

Pour chercher la fréquence de répartition leurs budgets de publicité sur les trois supports., le problème d'optimisation à résoudre par 'A' et 'B' est le suivant :

$$(\rho)=\begin{cases}\max(G)\\ 10000p_1-10000p_2+10000p_3\geq G\\ 20000p_1-20000p_2+20000p_3\geq G\\ 30000p_1+30000p_2-30000p_3\geq G\\ p_1+p_2+p_3=1\\ p_1\geq 0,\, p_2\geq 0,\, p_3\geq 0\end{cases}$$

ou bien son programme dual

$$(\rho)=\begin{cases}\min(G)\\ -10000q_1+20000q_2+30000q_3\leq G\\ 10000q_1-20000q_2+30000q_3\leq G\\ 10000q_1+20000q_2-30000q_3\leq G\\ q_1+q_2+q_3=1\\ q_1\geq 0, q_2\geq 0, q_3\geq 0\end{cases}$$

Il faut noter qui il ya les modèles d'entreprise. Ces modèles sont censés représenter des situations réelles et peuvent, donc, être utilisée pour l'expérimentation économique.

Malgré son importance de la recherche opérationnelle, très peu d'entreprises emploient des chercheurs opérationnels pour aider le décideur à résoudre ses problèmes. Certains problèmes simples peuvent être résolus au sein même de l'entreprise, la plupart des universités ayant intégré des cours d'introduction à la recherche opérationnelle dans les programmes des ingénieurs, des mathématiciens, des informaticiens, des automaticiens, des contrôleurs de gestion et, moins souvent, des économistes.

Conclusion générale

La recherche opérationnelle est l'ensemble de méthodes d'analyse scientifique des problèmes qui traite de la maximisation d'une performance, d'un profit, d'un rendement ou bien de la minimisation d'un coût, d'une dépense. Donc, la R.O. est un outil d'aide à la décision.

Dans le présent cours, certains éléments de base et méthodes de la recherche opérationnelle sont donnés.

En premier lieu, les notions de base de la recherche opérationnelle ont été présentées. La modélisation des problèmes d'optimisation ont été illustrées à travers deux exemples réels.

En deuxième lieu, la résolution des problèmes d'optimisation non linéaires avec/ou sans contraintes a été présentée. Dans ce cadre, les conditions nécessaires du premier et du deuxième ordre ont été données afin de résoudre les problèmes d'optimisation sans contraintes. Les problèmes d'optimisation avec contraintes ont été abordés par la méthode de Lagrange et la méthode de KKT.

En troisième lieu, les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation linéaires ont été exposées. En effet, l'algorithme du simplexe a été choisi comme une technique principale pour résoudre ce type des problèmes. On a abordé ensuite une méthode de résolution des problèmes de démarrage de l'algorithme par la méthode de deux phases, et par la détermination d'un autre PL équivalent dit dual.

En quatrième lieu, les notions de base sur les problèmes combinatoires ont été abordées. On a donné les définitions (graphes orientés ou non, connexité) et représentations informatiques d'un graphe (matrices d'incidence ou d'adjacence, loi additive, loi multiplicative, etc.). Puis, on a proposé quelques algorithmes génériques concernant les problèmes d'optimisation discrets, comme celui des problèmes de chemin à valeur minimale et les problèmes d'affectation. On conclut par une initiation à la programmation stochastique.

Finalement, quelques éléments de la théorie des jeux et les jeux d'entreprise ont été fournis.

Afin de rendre plus pratique le présent cours, nous avons accompagné pour chaque chapitre des exemples et des exercices. Ceci permettraient aux étudiants de se familiariser avec la modélisation et pouvoir résoudre des problèmes d'optimisation (linéaire ou non linéaire, avec / ou sans contraintes) et d'acquérir une connaissance approfondie de quelques méthode de base de RO.