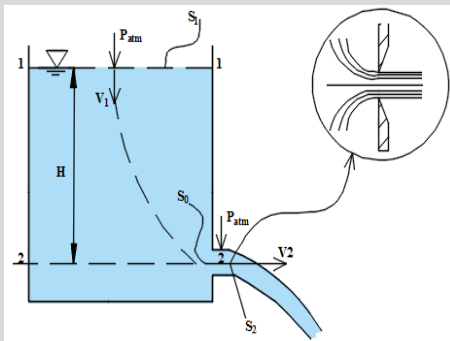


Faculté des Sciences et
Technologie
Département de Génie Civil
et Hydraulique



كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية والري

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_{atm}}{\gamma} + Z_0 + \frac{V_2^2}{2g}$$



Hydraulique Générale II

Élaboré par : Dr BELAABED Faris
bellabed.faris@univ-jijel.dz

Avant-propos

Ce cours est destiné aux étudiants de 3^{ème} année licence de la filière d'hydraulique. L'objectif de cette matière est de fournir les bases nécessaires à la compréhension et au calcul des phénomènes présents en hydraulique, au génie de l'eau et de l'environnement, en particulier ceux rencontrés en assainissement, en canaux et en rivière et dans les réseaux de collecte et distribution.

Le contenu de ce cours est conforme au canevas 2018/2019 dont les chapitres sont donnés ci-dessous.

Chapitre I. Équation des quantités de mouvement.

Chapitre II. Écoulements à travers les orifices et les ajutages.

Chapitre III. Écoulements dans les conduites en charge.

Chapitre IV. Écoulement à surface libre.

Connaissances préalables recommandées:

Connaissance de base, Mécanique des fluides et Hydraulique générale I.

SOMMAIRE

Chapitre I :

Équation des quantités de mouvement

I.1 Théorème de la quantité de mouvement "Théorème d'Euler"	01
I.2 Équation intégrale de la quantité de mouvement	01
I.3 Coefficient de correction de la quantité de mouvement.....	03
I.4 Application du théorème de quantité de mouvement.....	04
I.4.1 Action d'un jet sur une plaque.....	04
I.4.2 Action d'un jet sur un coude.....	08

Chapitre II :

Écoulement à travers les orifices et les ajutages

II.1 Écoulement à travers les orifices.....	12
II.1.1 Définition.....	12
II.1.2 Classification des orifices.....	12
II.1.3 Calcul du débit à travers l'orifice.....	14
II.1.3.1 Orifice dénoyé.....	14
II.1.3.2 Orifice noyé.....	18
II.1.4 Vidange d'un réservoir muni d'un orifice.....	19
II.1.4.1 Cas général.....	19
II.1.4.2 Cas d'un réservoir cylindrique vertical.....	20
II.2 Écoulement à travers les ajutages.....	21
II.2.1 Définition.....	21
II.2.2 Calcul du débit à travers l'ajutage.....	21
II.2.2.1 Ajutages cylindriques extérieurs.....	21
II.2.2.2 Ajutages cylindriques intérieurs (rentrants).....	22
II.2.2.3 Ajutages conique convergent.....	23
II.2.2.4 Ajutages conique divergent.....	23

Chapitre III

Écoulements dans les conduites en charge

III.1 Définition.....	25
III.2 Calcul hydraulique d'écoulements dans les conduites en charge...	25
III.2.1 Conduite simple.....	25
III.2.2 Conduite en série.....	25
III.2.3 Conduite en parallèle.....	26
III.3 Les réseaux de distribution.....	27
III.3.1 réseaux ramifiés.....	27
III.3.2 Réseaux mailles.....	28
III.4 Réseaux de conduites comportant une pompe ou une turbine.....	32
III.4.1 Pompes.....	32
III.4.1.1 Définition.....	32
III.4.1.2 Classification des pompes.....	33
III.4.1.3 Caractéristiques générales des pompes.....	34
III.4.1.4 Couplage des pompes.....	38
III.4.2 Turbine.....	39

III.4.2.1 Définition.....	39
III.4.2.2 Les différents types de turbines.....	40
III.4.2.3 Caractéristiques générales des turbines.....	40

Chapitre IV

Écoulement à surface libre

IV.1 Définition.....	44
IV.2 Classification des écoulements a surface libre.....	44
IV.3 Paramètres hydrauliques de la section transversale des canaux.....	46
IV.3.1 Définition.....	46
IV.3.2 Type de canaux.....	46
IV.3.3 Géométrie des canaux	47
IV.4 Équation de base d'un écoulement a surface libre.....	48
IV.4.1 Équation de continuité.....	48
IV.4.2 Équation de l'énergie.....	50
IV.4.3 Conditions d'écoulement uniforme.....	54
IV.4.4 Équation du régime uniforme.....	55
IV.4.4.1 L'équation de Chézy.....	55
IV.4.4.2 L'équation de Manning	56
IV.4.4.3 Autres formules d'écoulements.....	57
IV.4.4.4 L'écoulement critique.....	57
IV.4.4.5 La hauteur critique.....	59
IV.4.4.6 La pente critique.....	59
IV.4.4.7 Calcul de la hauteur normale.....	60

Chapitre I

Équation des quantités de mouvement

I.1 Théorème de la quantité de mouvement "Théorème d'Euler" :

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, ...etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \overrightarrow{F_{ex}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (\text{I.01})$$

Avec :

- $m\vec{v}$: quantité de mouvement ;
- v : vitesse ;
- F_{ex} : force extérieure du système solide ;
- m : masse du système solide.

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

I.2 Équation intégrale de la quantité de mouvement :

Considérons le tube de courant représenté dans la figure (I.01). La section de tube de courant est tellement petite que la vitesse est considérée uniformément répartie sur cette dernière.

Pour un écoulement permanent, le tube de courant reste stationnaire par rapport aux axes de coordonnées fixes.

La quantité de mouvement de fluide entrant par la section A-A du tube par unité de temps dans la direction X est : $\rho(dQ)u_1$. De même, la quantité de mouvement de fluide sortant par la section B-B du tube par unité de temps dans la même direction est : $\rho(dQ)u_1$.

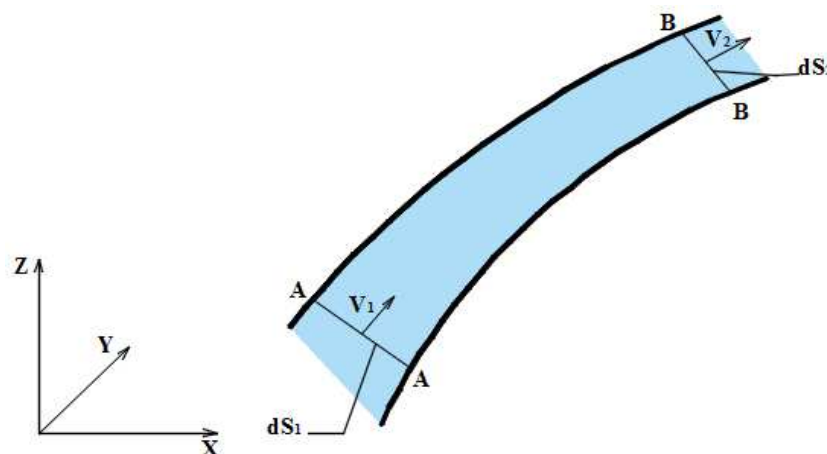


Figure I.01 : Tube de courant.

La variation de la quantité de mouvement par unité de temps = la quantité de mouvement sortant par unité de temps – la quantité de mouvement entrant par unité de temps. Donc, du principe de la quantité de mouvement, on peut écrire :

$$dF_x = \rho(dQ)[u_2 - u_1] \quad (\text{I.02})$$

Ou : dF_x est la force nette exercée sur le fluide dans la direction X.

Si $[u_2 - u_1] > 0$; la quantité de mouvement sortant est plus grand que la quantité de mouvement entrant dans le tube de courant dans la direction X. Il en résulte une force positive dF_x exercée de gauche à droite.

On peut écrire de manière identique l'équation de la variation de la quantité de mouvement dans les autres directions Y et Z :

$$\begin{cases} dF_x = \rho(dQ)[u_2 - u_1] \\ dF_y = \rho(dQ)[v_2 - v_1] \\ dF_z = \rho(dQ)[w_2 - w_1] \end{cases} \quad (\text{I.03})$$

Considérons un espace d'écoulement constitué d'un ensemble de tube de courant. L'espace occupé par ce courant liquide est appelé volume de contrôle. Les forces nettes exercées sur le fluide dans les directions X, Y et Z peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{cases} F_x = \int_S dF_x = \int_S \rho(dQ) u_2 - \int_S \rho(dQ) u_1 = \int_S \rho V_2 u_2 dS_2 - \int_S \rho V_1 u_1 dS_1 \\ F_y = \int_S dF_y = \int_S \rho(dQ) v_2 - \int_S \rho(dQ) v_1 = \int_S \rho V_2 v_2 dS_2 - \int_S \rho V_1 v_1 dS_1 \\ F_z = \int_S dF_z = \int_S \rho(dQ) w_2 - \int_S \rho(dQ) w_1 = \int_S \rho V_2 w_2 dS_2 - \int_S \rho V_1 w_1 dS_1 \end{cases} \quad (\text{I.04})$$

Avec : dS_1 et dS_2 sont les surfaces élémentaires des sections des tubes de courant aux coupes A-A et B-B respectivement; et V_1 et V_2 sont les vitesses moyennes à l'entrée et à la sortie du volume de contrôle.

Pour un fluide incompressible, et si la vitesse et ses différentes composantes ne varient pas d'une manière significative à l'entrée et à la sortie du volume de contrôle; les expressions (I.04) peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} F_x = \rho V_2 S_2 u_2 - \rho V_1 S_1 u_1 = \rho Q(u_2 - u_1) \\ F_y = \rho V_2 S_2 v_2 - \rho V_1 S_1 v_1 = \rho Q(v_2 - v_1) \\ F_z = \rho V_2 S_2 w_2 - \rho V_1 S_1 w_1 = \rho Q(w_2 - w_1) \end{cases} \quad \text{ou } \vec{F}_{ex} = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (\text{I.05})$$

L'équation (I.05) est appelée équation de la quantité de mouvement.

Remarque :

Les forces exercées par le fluide sur son entourage dans les directions X , Y et Z sont selon la troisième loi de Newton égales en magnitude mais opposées en direction à F_x , F_y et F_z respectivement.

I.3 Coefficient de correction de la quantité de mouvement :

La répartition de vitesse le long d'une section droite d'écoulement est dans la plus des cas non uniforme, il faut alors définir un coefficient de correction de l'impulsion β "de la quantité de mouvement".

La quantité de mouvement qui passe à travers un élément de surface ds "tube de courant" ou la vitesse est V est $\rho v^2 ds$ et la quantité de mouvement qui passe à travers la section du courant liquide S est :

$$Q^{té} de mvt = \int_S \rho v^2 dS \quad (I.06)$$

En se basant sur la vitesse moyenne \bar{v} ; la quantité de mouvement est :

$$Q^{té} de mvt = \beta \rho S \bar{v}^2 \quad (I.07)$$

Égalant les deux expressions (I.06) et (I.07), on obtient pour un fluide incompressible :

$$\beta = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 dS \quad (I.08)$$

Les valeurs numériques du coefficient de correction de la quantité de mouvement β sont comprises entre 1 et 1.33.

- Pour un écoulement unidimensionnel : $\beta=1$;
- Pour un écoulement laminaire : $\beta \approx 1.33$;
- Pour un écoulement turbulent : $\beta=1.05$.

$$\vec{F}_{ex} = \beta \frac{\bar{w}}{g} Q [\vec{V}_2 - \vec{V}_1] \quad (I.09)$$

Dans la pratique, les écoulements sont souvent turbulents, une approximation de $\beta \approx 1$ se justifie donc.

I.4 Application du théorème de quantité de mouvement :

I.4.1 Action d'un jet sur une plaque :

a)- Plaque plane :

Soit un jet horizontal animé d'une vitesse \vec{V} heurtant une plaque vertical dont le plan fait l'angle α avec la direction du jet lequel est dévié ensuite selon une direction parallèle à la plaque (Fig. I.02).

Prenons comme plan de figure le plan horizontal passant par l'axe du jet.

Le jet supposé cylindrique est à la pression atmosphérique avant d'aborder la plaque ; après la zone dans laquelle les trajectoires sont incurvées, le courant s'établit parallèlement à la plaque et à son contact ; les filets liquides sont donc encore à la pression atmosphérique. Nous proposons d'évaluer la résultante R des pressions dynamiques que le jet exerce normalement à la plaque dans la zone où la courbure des trajectoires crée, à l'intérieur du fluide, des pressions différentes de la pression atmosphérique.

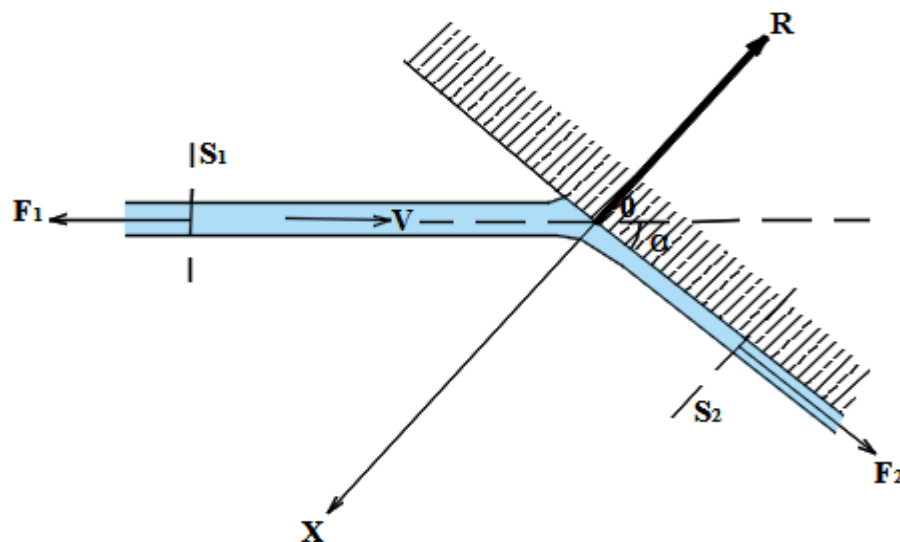


Figure I.02 : Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane inclinée sur l'axe du jet.

Appliquons le théorème d'Euler à la portion de fluide comprise entre deux sections S_1 et S_2 situées respectivement à l'amont et à l'aval du point d'impact du jet et suffisamment éloignées de celui-ci pour que la pression y soit égale à la pression atmosphérique (en supposant $\beta=1$).

La résultante des forces appliquées à cette portion de fluide est équivalente au système des forces suivantes :

$$\vec{F}_1 = -\frac{\bar{w}}{g} Q \vec{V} \quad (\text{I.10})$$

\vec{F}_1 appliquée en S_1 et opposée à \vec{V} ;

\vec{F}_2 tangente à la plaque et égale à la mouvement du courant à la traversée de S_2 . Comme nous ne connaissons pas \vec{F}_2 nous appliquerons le théorème de Euler en projection sur un axe Ox normal à la plaque, c'est-à-dire horizontal, de manière que la projection de \vec{F}_2 sur cet axe soit nulle.

La projection de \vec{F}_1 a pour valeur :

$$F_1 = -\frac{\bar{w}}{g} QV \sin \alpha \quad (\text{I.11})$$

Les forces extérieures appliquées sur le fluide sont :

- Le poids dont la projection sur Ox est nulle ;
- Les pressions partout égales à la pression atmosphérique (c'est-à-dire nulles puisque nous ne considérons que les pressions effectives) sauf au voisinage du point d'impact où la plaque exerce sur le jet une pression dynamique total égale et opposée à R ;
- Les frottements jet sur l'air et sur la plaque ; nous les négligerons.

Le théorème d'Euler en projection sur Ox permet donc d'écrire :

$$-\frac{\bar{w}}{g} QV \sin \alpha = -R \quad (\text{I.12})$$

$$R = \frac{\bar{w}}{g} QV \sin \alpha \quad (\text{I.13})$$

Si la plaque est normale au jet (Fig. I.03) : $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la poussée a pour expression :

$$R = \frac{\bar{w}}{g} QV \quad (\text{I.14})$$

Soit S la section droite du jet ; on peut écrire :

$$R = \frac{\bar{w}}{g} S V^2 = 2\bar{w} \frac{V^2}{2g} S \quad (\text{I.15})$$

$$\frac{R}{S} = 2\bar{w} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{I.16})$$

R/S constitue, en quelque sorte, la pression dynamique par unité de section du jet. Cette pression unitaire du jet est donc égale au double de la pression due à la vitesse.

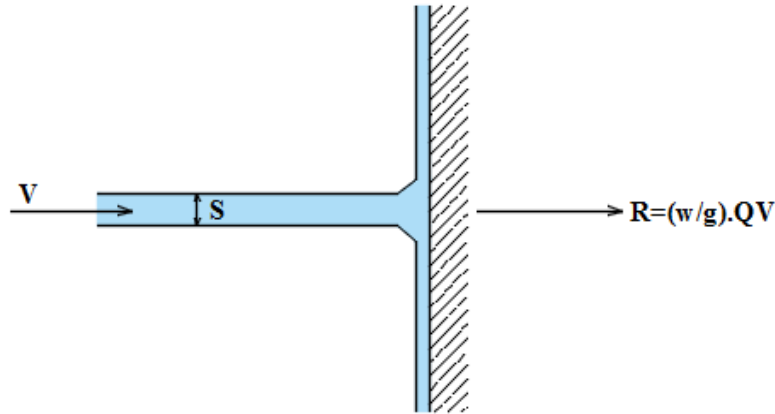


Figure I.03 : Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane normale à l'axe du jet.

b)- Plaque courbe :

Supposons le jet toujours horizontal frappant l'arête d'une plaque cylindrique à génératrices verticales dont la directrice a la forme de deux demi-cercles accolés, de telle sorte que l'eau soit renvoyée sans perte de vitesse appréciable (en négligeant les frottements sur la plaque) suivant une direction parallèle et opposée à celle du jet.

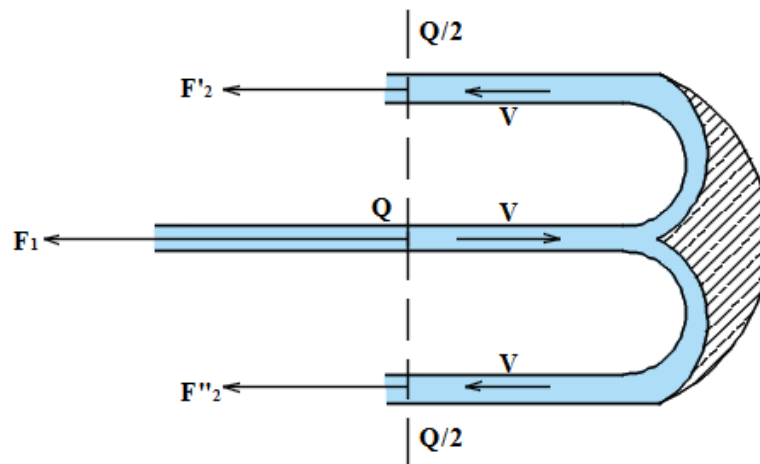


Figure I.04 : Poussée d'un jet horizontal sur une plaque courbe.

La poussée totale se calcule comme dans le cas d'une plaque plane, mais les forces F_1 et F_2 sont maintenant parallèles, de même sens et égales (en supposant toujours $\beta = 1$).

$$F_1 = F_2 = -\frac{\bar{w}}{g} QV \quad (\text{I.17})$$

avec :

$$F_2 = F'_2 + F''_2 = -2\frac{\bar{w}}{g} \frac{Q}{2} V \quad (\text{I.18})$$

La poussée R a donc pour valeur :

$$R = 2 \frac{\bar{w}}{g} QV = 4\bar{w} \frac{V^2}{2g} S \quad (\text{I.19})$$

La pression unitaire du jet R/S est donc le quadruple de la pression due à la vitesse (au lieu du double pour une plaque plane).

Si la plaque se déplace avec une vitesse $v < V$ et parallèle à V , l'effort exercé par le jet est égal à :

$$F = 2 \frac{\bar{w}}{g} Q(V - v) \quad (\text{I.20})$$

La puissance correspondante est donc :

$$F_v = P = 2 \frac{\bar{w}}{g} Qv(V - v) \quad (\text{I.21})$$

P est maximale pour $v = V/2$ est a pour valeur :

$$P_m = \bar{w}Q \frac{V^2}{2g} \quad (\text{I.22})$$

C'est-à-dire la puissance P du jet.

Le rendement maximal est donc maintenant égale à l'unité soit le double de celui obtenu avec une plaque plane ; ce résultat reçoit une application pratique dans la forme des augets des turbines Pelton. Pour obtenir le rendement maximal ont réglé la vitesse de la roue de telle façon que la vitesse linéaire de l'auget soit la moitié de la vitesse du jet à la sortie de la base. A la sortie de l'auget la vitesse de l'eau est $V/2$ par rapport à l'auget, mais elle est orientée en sens inverse du mouvement de l'auget ; la vitesse absolue de l'eau qui quitte l'auget est donc nulle, toute son énergie cinétique a été transformée en travail (Fig. I.05).

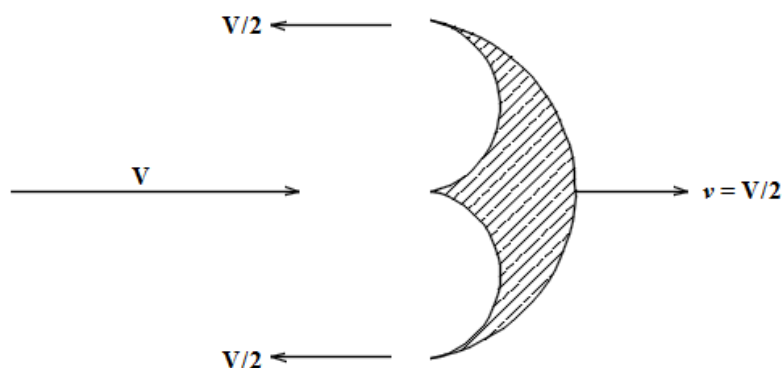


Figure I.05 : Les vitesses d'un jet horizontal sur une plaque courbe.

I.4.2 Action d'un jet sur un coude :

a)- Les pertes de charge étant négligées

Considérons un coude de conduite horizontal, à l'intérieur duquel le débit est Q et la vitesse moyenne est V . Soit α l'angle du coude. En première approximation négligeons les pertes de charge et appliquons le théorème d'Euler à la masse liquide limitée par deux sections S_1 et S_2 d'aire S situées respectivement à l'amont et à l'aval du coude (Fig. I.06).

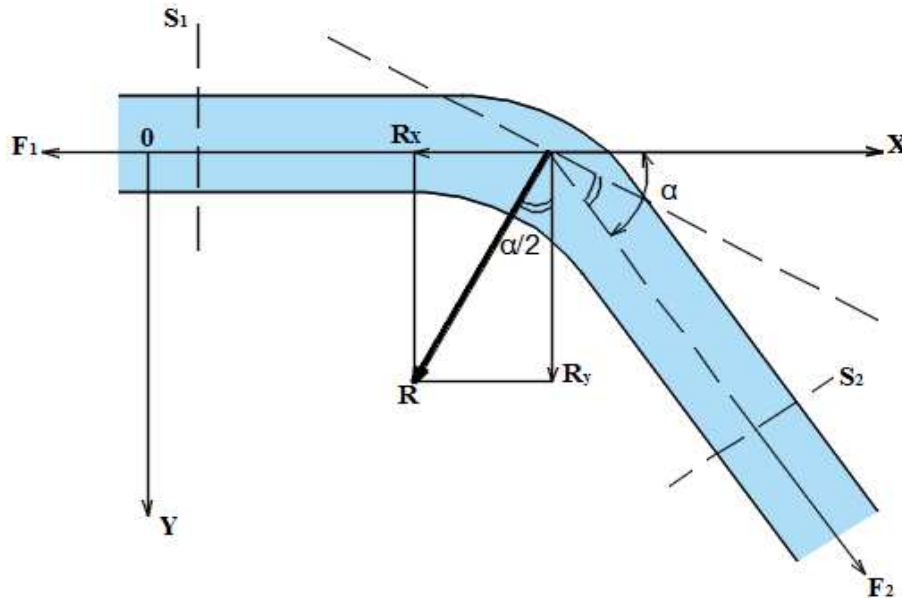


Figure I.06 : Poussée sur un coude de conduite horizontal.

En supposant $\beta=1$, les forces F_1 et F_2 , égales chacune à $\left(\frac{\bar{w}}{g}\right) QV$, sont équivalentes à la résultante des forces extérieures agissant sur la masse liquide considérée.

Ces forces comprennent :

- Les pressions p_1S et p_2S sur les sections extrêmes ;
- La réaction R des parois sur le liquide ;
- Le poids de la masse liquide considérée.

Par raison de symétrie (les pertes de charge étant négligées donc $p_1S = p_2S$), R est dirigée suivant la bissectrice intérieure de l'angle des deux directions des axes des conduites constituant le coude.

Choisissons les axes Ox et Oy indiqués sur la figure :

- Ox confondu avec l'axe de la conduite à l'amont du coude.
- Oy perpendiculaire à axe Ox dans le plan du coude et orienté positivement vers l'intérieur du coude. Le plan xOy est donc confondu avec le plan du coude et horizontal.

Appliquons le théorème d'Euler en projection sur l'axe Oy :

$$F_2 \sin \alpha = R_y - p_2 S \sin \alpha \quad (\text{I.23})$$

$$R_y = \left(\frac{\bar{w}}{g} QV + p_2 S \right) \quad (\text{I.24})$$

La réaction R a donc pour expression :

$$R = \frac{R_y}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{I.25})$$

$$R = 2 \left(\frac{\bar{w}}{g} QV + p_2 S \right) \sin \alpha \quad (\text{I.26})$$

Pour un coude à angle droit on a donc :

$$R = \left(\frac{\bar{w}}{g} QV + p_2 S \right) \sqrt{2} \quad (\text{I.27})$$

b)- Compte-tenu des pertes de charge :

Si on veut tenir compte des pertes de charge, il faut distinguer les pressions p_1 et p_2 dans les sections S_1 et S_2 .

Le calcul se conduit de la même manière (Fig. I.07).

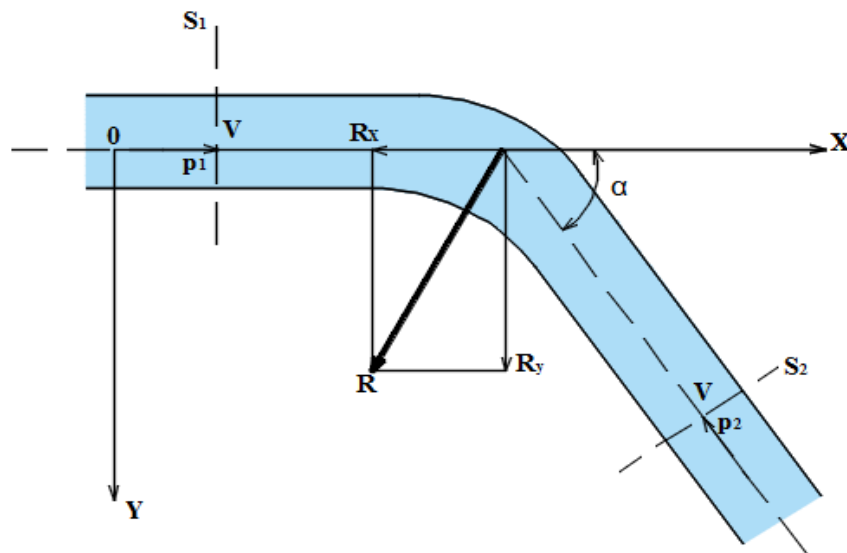


Figure I.07 : Poussée sur un coude de conduite horizontal, compte-tenu des pertes de charge.

En projection sur Ox les forces extérieures se réduisent à :

$$p_1 S - R_x - p_2 S \cos \alpha \quad (\text{I.28})$$

Et le théorème d'Euler donne en projection sur Ox :

$$\frac{\bar{w}}{g} QV(\cos \alpha - 1) = p_1 S - R_x - p_2 S \cos \alpha \quad (\text{I.29})$$

$$R_x = S(p_1 - p_2 \cos \alpha) + \frac{\bar{w}}{g} QV(\cos \alpha - 1) \quad (\text{I.30})$$

On aurait de même sur Oy :

$$\frac{\bar{w}}{g} QV \sin \alpha = R_y - p_2 S \sin \alpha \quad (\text{I.31})$$

$$R_y = p_2 S \sin \alpha + \frac{\bar{w}}{g} QV \sin \alpha \quad (\text{I.32})$$

avec :

$$\frac{p_1 - p_2}{\bar{w}} = J_{1-2} = k \frac{V^2}{2g} \quad (\text{I.33})$$

- J_{1-2} : perte de charge singulière due au code.

○ Exemple 01 :

Un jet percute une plaque plane verticale (d'épaisseur uniforme) au milieu (Fig. I.08).

La plaque est suspendue par une articulation à la partie supérieure. La masse de la plaque est de 10kg.

- Quelle est la force A à appliquer sur la plaque pour qu'elle reste verticale.

- Si maintenant la plaque est libre, quel serait l'angle α d'inclinaison de la plaque.

On donne : le diamètre du jet 25mm, avec une vitesse de 10m/s, les dimensions de la plaque 20x20cm et la masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

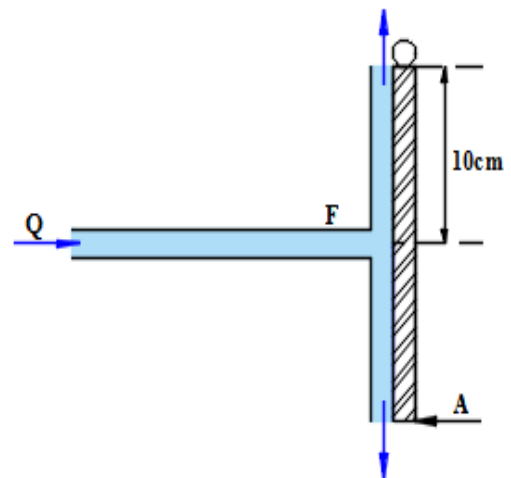


Figure I.08 : Exemple 01.

○ Solution :

- La force A à appliquer sur la plaque pour qu'elle reste verticale $A = 24.53 \text{ N}$.
- L'angle α d'inclinaison de la plaque $\alpha = 30^\circ$.

○ **Exemple 02 :**

Un jet d'eau vertical de diamètre de $D=8\text{cm}$ et de vitesse $V=10\text{m/s}$ frappe un disque pesant 17Kgf . Le jet est ensuite dévié horizontalement dans toutes les directions (Fig. I.09).

Déterminer la distance y à laquelle le disque se trouve en équilibre.

○ **Solution :**

- La distance $y = 4.62\text{m}$.

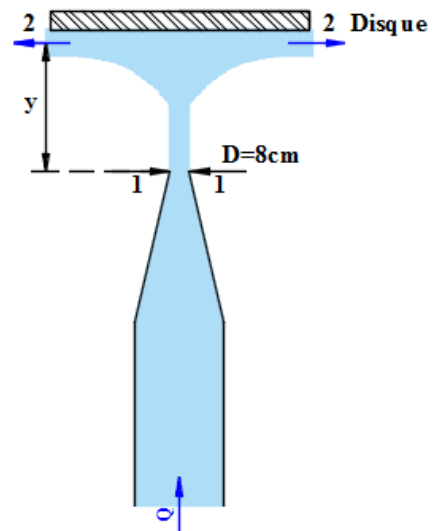


Figure I.09 : Exemple 02.

○ **Exemple 03 :**

Un coude de réduction de 45° est raccordé une conduite de 60 cm de diamètre, le diamètre réduit de 30 cm (Fig. I.09).

Déterminer la force totale exercée par l'eau sur le coude.

Si la pression à l'entrée est $0,9\text{ bar}$ et le débit de 600l/s , sachant que le coude est horizontale.

○ **Solution :**

- La force totale exercée par l'eau sur le coude $F = 20.87\text{ KN}$.

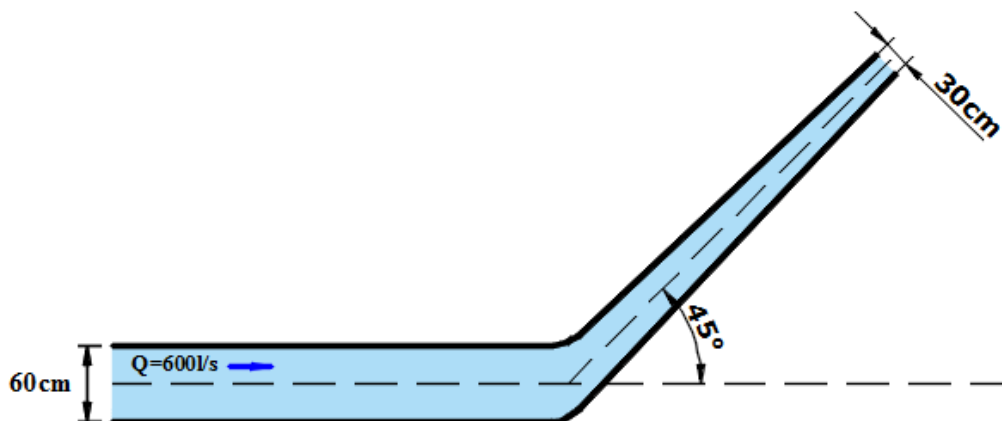


Figure I.10 : Exemple 03.

Chapitre II

Écoulement à travers les orifices et les ajutages

II.1 Écoulement à travers les orifices :

II.1.1 Définition :

Un orifice, en hydraulique, est une ouverture de forme régulière, pratique dans une paroi ou dans le fonds d'un récipient, à travers laquelle s'écoulent le liquide contenu dans le récipient, le contour de l'orifice restant complètement submergé c'est-à-dire au-dessous de la surface libre.

II.1.2 Classification des orifices :

Les orifices sont classés suivant leur taille, la forme, la nature de l'écoulement qui passe à travers et aussi suivant la nature de la paroi.

- Les orifices sont classés comme orifice larges (grand) ou orifice petit suivant leur taille et la charge du liquide dessus. Si le rapport entre la charge et la hauteur de l'orifice H/d est supérieur à 5 ($H/d > 5$), l'orifice est dit petit si non il est dit grand ou large ($H/d < 5$).

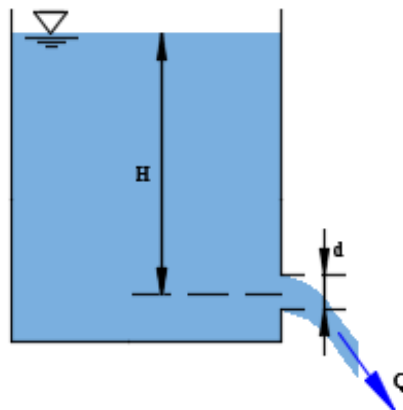


Figure II.01 : Orifice.

- Suivant leur épaisseur de la paroi est classé en orifice à paroi mince ou épaisse. Si l'épaisseur de la paroi ne dépasse pas trois rayons ($3r$), l'orifice est dit orifice à paroi mince sinon il est dit orifice à paroi épaisse.

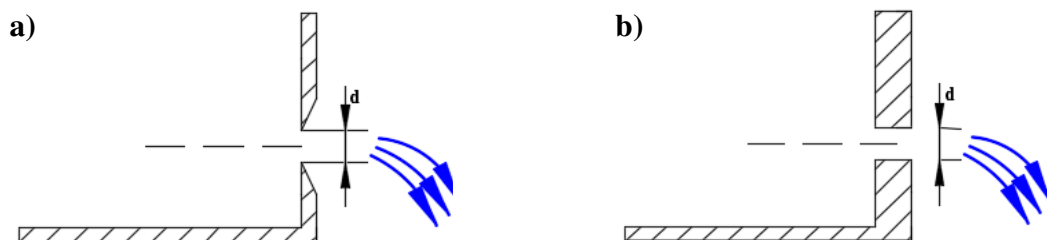


Figure II.02 : a) Orifice à paroi mince ; b) orifice à paroi épaisse.

✚ Suivant leurs formes les orifices sont classés en orifice circulaire, triangulaire, rectangulaire ou carré.

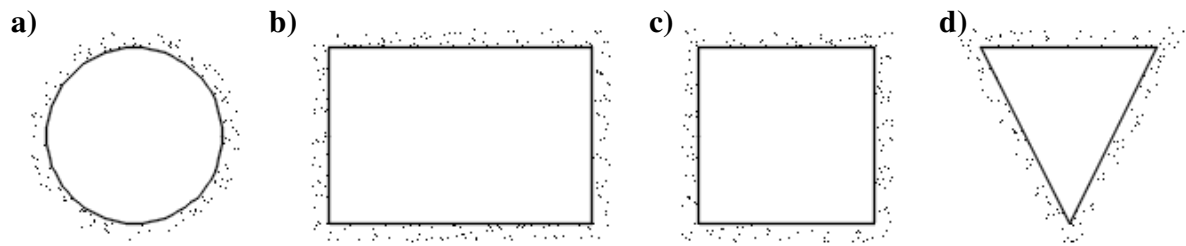


Figure II.02 : Orifice : a) circulaire ; b) rectangulaire ; c) carré ; d) triangulaire.

✚ Suivant l'écoulement qui se fait à travers on distingue : orifice dénoyé, orifice noyé partiellement et totalement noyé.

L'orifice est dit partiellement noyé quand le niveau de l'eau en aval est compris entre le bord supérieur et le bord inférieur de l'orifice (Fig. II.04.b).

Un orifice est dit complètement noyé quand le niveau de l'eau en aval est supérieur au point le plus haut de l'orifice (Fig. II.04.c).

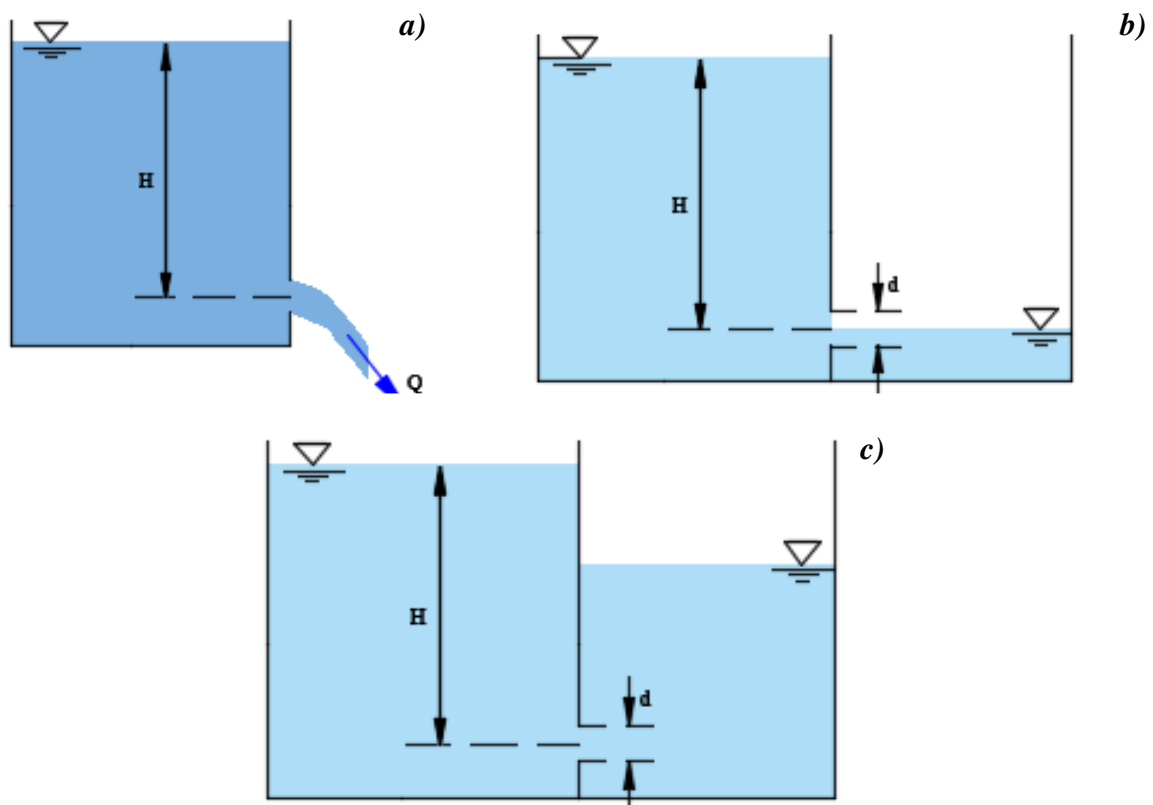


Figure II.04 : a) Orifice dénoyé ; b) orifice noyé partiellement ; c) orifice totalement noyé.

II.1.3 Calcul du débit à travers l'orifice :

II.1.3.1 Orifice dénoyé :

🚦 Orifice à paroi mince " Formule de Torricelli " :

Soit un réservoir de surface S_1 équipé d'un trop-plein pour assurer un niveau constant de liquide. Le réservoir est rempli d'un liquide de poids volumique γ . Le liquide s'écoule sous forme de jet par un orifice arrondi de la surface S_0 , pratiqué sur une des parois latérales du réservoir. La pression à la surface libre, ainsi qu'autour du jet, correspond à la pression atmosphérique P_a .

Les lignes de courant dans le jet, notamment près de l'orifice, sont rectilignes et parallèles. La pression, $P_2 \approx P_a$ et la vitesse V_2 restent donc constantes dans la section S_2 du jet qui elle-même se confond avec celle de l'orifice arrondi $S_2 \approx S_0$. La vitesse ponctuelle V_2 se confond donc avec la vitesse moyenne dans la section S_2 , c.-à-d. $V_2 \approx U_2$. La vitesse ponctuelle V_1 à la surface libre est faible et uniformément répartie sur la surface S_1 , alors $V_1 \approx U_1$ ou U_1 est la vitesse moyenne dans la section S_1 . Plus loin dans le jet, les lignes de courant sont courbes et la pression varie dans la section.

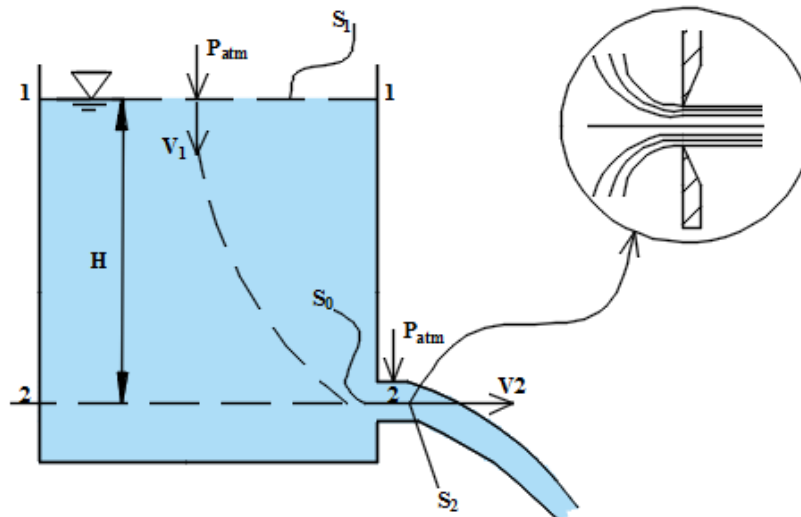


Figure II.05 : Orifice à paroi mince en régime dénoyé.

On applique l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant passant par un point 1 quelconque à la surface libre du réservoir et par un autre point 2 quelconque situé près de l'orifice dans le jet. En admettant que l'écoulement est permanent et que le liquide est parfait.

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_{atm}}{\gamma} + Z_0 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (II.01)$$

Si la surface du réservoir est importante par rapport à la surface de l'orifice, c.-à-d. $S_1 \gg S_2$, la vitesse $U_1 = V_1$ de la surface libre est négligeable et alors $U_1^2/2g \approx 0$.

En tenant compte des restrictions admises ci-dessus, la vitesse U_2 du jet vaut :

$$U_2 = \sqrt{2gH_1} \quad (\text{II.02})$$

Cette relation est connue sous le nom de formule de Torricelli, elle exprime que la vitesse théorique du jet sortant d'un orifice ne dépend pas des propriétés de ce liquide, comme par exemple son poids volumique γ mais uniquement de la hauteur de la colonne de liquide au-dessus de cet orifice H_1 .

$$U_{th} = \sqrt{2gH_1} \quad (\text{II.03})$$

La vitesse réelle $U_{réel}$ est alors inférieure à la vitesse théorique U_{th} et le rapport φ est le quotient de la vitesse réelle sur la vitesse théorique :

$$\varphi = \frac{U_{réel}}{U_{th}} = \frac{U_{réel}}{\sqrt{2gH}} \quad (\text{II.04})$$

Le débit réel du liquide au niveau de la section réelle du jet est cependant déterminé par la relation :

$$Q_{réel} = S_2 U_2 \quad (\text{II.05})$$

Le coefficient de contraction ($m < 1$) est défini par le rapport de la section du jet S_2 sur la section de l'orifice S_0 .

$$m = \frac{S_2}{S_0} = \left(\frac{d_2}{d_0} \right)^2 \quad (\text{II.06})$$

D'où la section de jet

$$S_2 = m \cdot S_0 \quad (\text{II.07})$$

$$Q_{réel} = m S_0 \varphi \sqrt{2gH} \quad (\text{II.08})$$

Ou

$$Q_{réel} = C_d S_0 \sqrt{2gH} \quad (\text{II.09})$$

Avec :

C_d : coefficient de débit,

$$C_d = m \cdot \varphi \quad (\text{II.10})$$

Le coefficient de débit $C_d < 1$ varie en fonction de la forme géométrique, des dimensions et de l'orientation (horizontale ou verticale) de l'orifice. Il est égal au rapport du débit réel $Q_{\text{réel}}$ et du débit théorique Q_{th} , ce dernier est le débit qui passe, sans résistance hydraulique, par l'orifice. Le coefficient de débit est exprimé par :

$$C_d = Q_{\text{réel}}/Q_{\text{th}} \quad (\text{II.11})$$

La valeur du coefficient C_d dépend de la nature de l'orifice et on distingue :

- Les orifices en mince paroi ou l'épaisseur de la paroi est plus petite que la moitié de la plus petite dimension transversale de l'orifice. Dans ce cas, le coefficient de contraction dépend encore de la forme de l'orifice, de la position et de l'acuité des arêtes. En première approximation pour un orifice circulaire on peut admettre $m=0,62$.
- Les orifices à veine moulée ou la paroi inférieure de l'orifice épousent la forme de la veine de manière à ce que la section contractante soit inférieure à la paroi. Dans ce cas, on aurait théoriquement $m=1$, mais comme il se produit toujours des pertes de charges, m ne dépasse pas la valeur de 0,98.

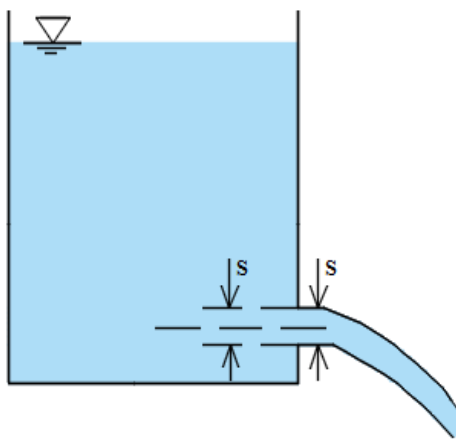


Figure II.06 : Orifice à veine moulée.

La contraction incomplète ou partielle :

Entre l'écoulement par orifice en mince paroi pour lequel C_d est de l'ordre de 0,62 et l'écoulement par veine moulée pour lequel C_d est de l'ordre de 1, s'échelonnent tous les intermédiaires. On dit pour eux qu'il y a contraction incomplète.

Si on désigne par θ la fraction du périmètre de l'orifice sur laquelle la contraction est

supprimée, le coefficient C_d^- à appliquer serait lié, d'après les expériences de Bidone, au coefficient C_d valable pour une contraction complète, par les relations suivantes :

- Si l'orifice est rectangulaire :

$$C_d' = C_d(1 + 0,15 \theta) \quad (\text{II.12})$$

- Si l'orifice est circulaire :

$$C_d' = C_d(1 + 0,13 \theta) \quad (\text{II.13})$$

Il est à noter que si l'on fait $\theta = 1$ c'est-à-dire si l'on supprime toute contraction, on devrait avoir $C_d^- \approx 1$ en donnant à C_d les valeurs courantes.

Or dans le second cas (orifice circulaire) avec $C_d = 0,62$ on a $C_d^- = 0,62 \times 1,13 = 0,70$.

La courbe $C_d^- (\theta)$ donnée par la formule de Bidone est la droite D alors qu'en fait la courbe C_d^- a plutôt l'allure de D' (Fig. II.07).

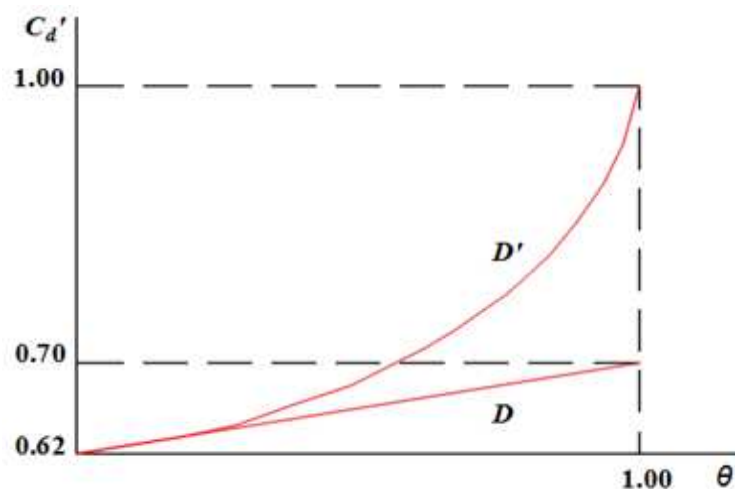


Figure II.07 : Coefficient de débit des orifices à contraction incomplète.

Il y a donc quelques réserves à faire sur l'emploi de ces formules, aussi pratiquement, pour les vannes non noyées on adapte des formules déduites de l'expérience.

Voici par exemple celles de Poncelet valables pour des orifices non noyés réglés par des vannes de fond en supposant la contraction supprimée sur le fond et les deux côtes (Fig. II.08).

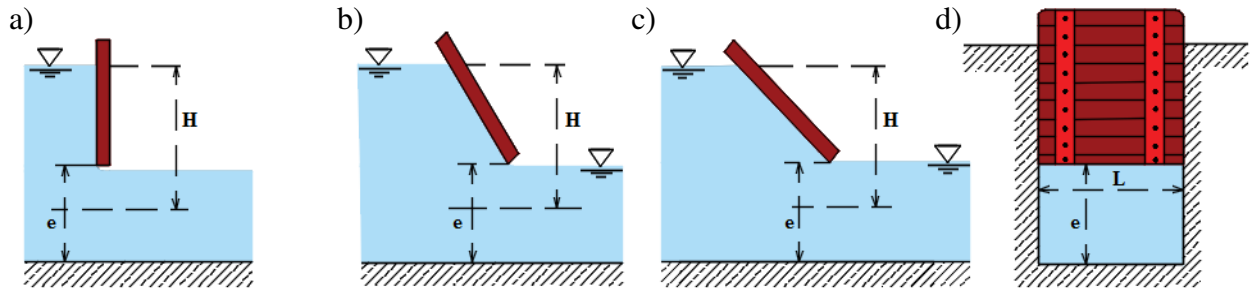


Figure II.08 : Formules de Poncelet pour le débit des vannes de fond.

a) Vanne verticale : $Q = 0,70 L.e (2gH)^{1/2}$

b) Vanne inclinée à 1 de base pour 2 de hauteur : $Q = 0,74 L.e (2gH)^{1/2}$

c) Vanne inclinée à 1/1 : $Q = 0,74 L.e (2gH)^{1/2}$

d) Section transversale.

Dans le cas d'une vanne verticale on peut également utiliser la formule plus précise suivante (Fig. II.09).

$$Q = C_d \cdot L \cdot e \sqrt{\frac{2gH_1}{1 + \frac{m \cdot e}{H_1}}} \quad (\text{II.13})$$

Avec :

- Q : débit (m^3/s) ;
- m : coefficient de débit = 0,61 pour une vanne verticale avec contraction sur le bord inférieur de la vanne ;
- e : force extérieure du système solide ;
- L : masse du système solide ;
- H_1 : profondeur amont (m).

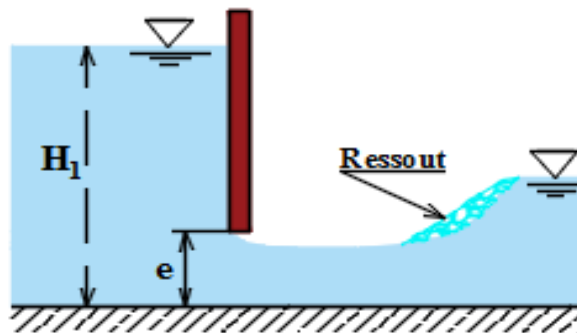


Figure II.09 : Orifice à contraction incomplète : cas de la vanne de fond.

II.1.3.2 Orifice noyé :

Soit l'orifice entièrement noyé de la figure ci-dessous. En appliquant l'équation de Bernoulli entre la section 0-0 et la section 1-1 où règne la pression atmosphérique on trouve la relation :

$$Q = C_d \cdot S_0 \cdot \sqrt{2gH} \quad (\text{II.13})$$

Avec : $H = H_1 - H_2$

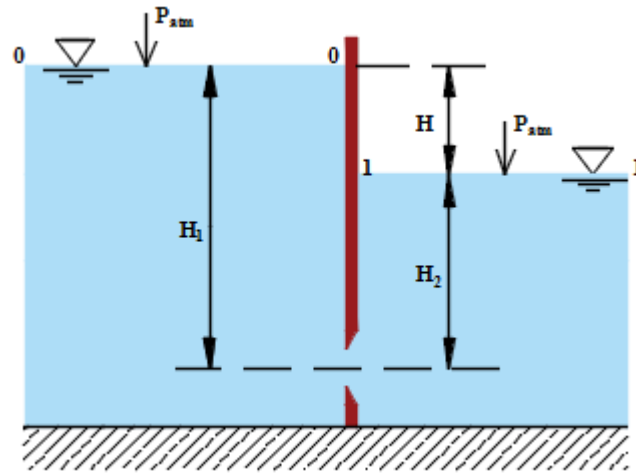


Figure II.10 : Orifice noyé.

II.1.4 Vidange d'un réservoir muni d'un orifice:

II.1.4.1 Cas général :

Soit un réservoir de forme quelconque non alimenté et rempli à une hauteur H (Fig. II.11). Après l'ouverture de l'orifice, le niveau d'eau va s'abaisser progressivement.

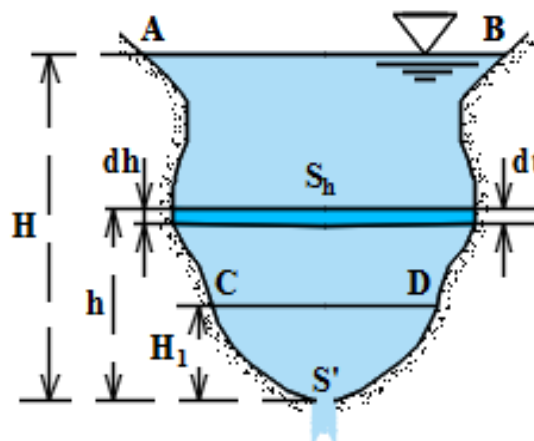


Figure II.11 : Vidange d'un réservoir muni d'un orifice.

Si la section transversale est toujours assez grande pour que les vitesses des molécules liquides à l'intérieur du réservoir soient constamment négligeables quand le niveau s'abaisse, on a constamment pour toute hauteur d'eau h :

$$Q = C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2gh} \quad (\text{II.14})$$

Pendant le temps dt le niveau s'abaisse de dh ; soit S_h l'aire de la surface libre pour cette hauteur h . L'équation de continuité s'écrit :

$$Q \cdot dt = -S_h \cdot dh \quad (\text{II.15})$$

Ou
$$C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot dt = -S_h \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad (\text{II.16})$$

Le temps nécessaire pour que le niveau s'abaisse de AB à CD sera :

$$C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot t = - \int_H^{H_1} \frac{S_h}{\sqrt{h}} \cdot dh \quad (\text{II.17})$$

d'ou
$$t = \frac{1}{C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g}} \int_{H_1}^H \frac{S_h}{\sqrt{h}} \cdot dh \quad (\text{II.18})$$

et le temps nécessaire à la vidange complète sera donné par la formule :

$$T = \frac{1}{C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S_h}{\sqrt{h}} \cdot dh \quad (\text{II.19})$$

II.1.4.2 Cas d'un réservoir cylindrique vertical:

Soit un réservoir cylindrique vertical de section droite constante S .

Le même raisonnement que précédent permet d'écrire :

$$C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot dt = -S_h \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad (\text{II.20})$$

Intégrons en supposant C_d constant :

$$\frac{1}{S} C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot dt = -2 \cdot \sqrt{h} + C^{te} \quad (\text{II.21})$$

Pour $t = 0$, $h = H$, donc $C^{te} = 2\sqrt{H}$ et l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{S} C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot dt = -2 \cdot (\sqrt{H} - \sqrt{h}) \quad (\text{II.22})$$

La durée de vidange totale T s'obtient si $h = 0$ soit :

$$T = \frac{2 \cdot S \cdot H}{C_d \bar{S} \cdot \sqrt{2g}} \quad (\text{II.23})$$

II.2 Écoulement à travers les ajutages :

II.2.1 Définition :

On appelle ajutage un tube court raccordé d'une façon serrée à l'orifice en mince paroi. Si l'entrée de l'ajutage a un bord vif, le jet de liquide remplit totalement la section transversale de l'ajutage à la sortie si la longueur de l'ajutage est : $l = (3 \text{ à } 5)d$ (d est le diamètre intérieur de l'ajutage).

En pratique, on utilise les types suivants (Fig. II.12) :

- Ajutages cylindriques extérieurs ;
- Ajutages cylindriques intérieurs (rentrants) ;
- Ajutages coniques convergents ;
- Ajutages coniques divergents.

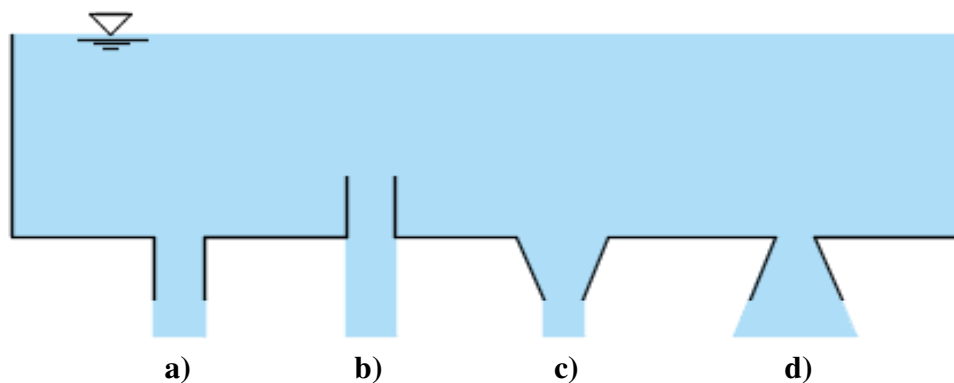


Figure II.12 : Ajutage : a) cylindrique extérieur, b) cylindrique intérieur
c) conique convergent, d) conique divergent.

II.2.2 Calcul du débit à travers l'ajutage :

II.2.2.1 Ajutages cylindriques extérieurs:

Pour calculer la vitesse et le débit dans le cas d'un ajutage cylindrique extérieur, on considère un écoulement par un ajutage et appliquons l'équation de Bernoulli entre les sections 1-1 et 2-2 par rapport au plan 0-0, on obtient (Fig. II.13) :

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_{atm}}{\gamma} + Z_0 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta J \quad (\text{II.24})$$

Avec :

- V_1 : la vitesse dans le plan 1-1 ;
- V_2 : la vitesse dans le plan 2-2 ;
- ΔJ : la perte de charge totale.

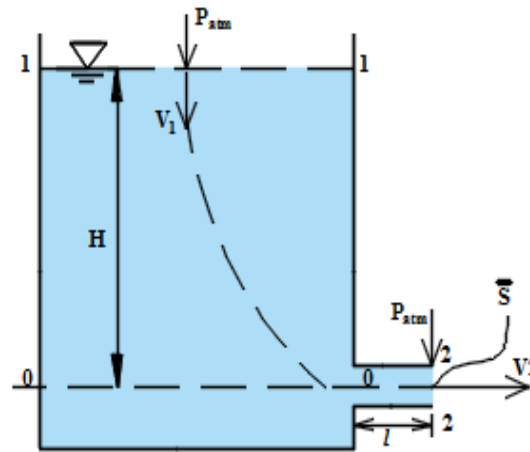


Figure II.13 : Ajutage cylindriques extérieurs.

Dans ce cas la perte de charge totale ΔJ se réduit pratiquement à la perte de charge due au rétrécissement brusque :

$$\Delta J = J_s = 0,5 \cdot \frac{V_2^2}{2g} \quad (\text{II.25})$$

La formule pour la vitesse moyenne à la sortie de l'ajutage prend la forme :

$$V_2 = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad \text{et avec } \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad ; (V_1 \ll V_2) \quad (\text{II.26})$$

Le débit qui traverse l'ajutage est déterminé par la formule suivante :

$$Q = C_d \cdot \bar{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad \text{avec } C_d = 0,82 \quad (\text{II.27})$$

Ainsi l'ajutage cylindrique extérieur de la longueur $(3 \text{ à } 4)d$ possède un rendement supérieur à celui d'un petit orifice en mince paroi de 32% environ.

II.2.2.2 Ajutages cylindriques intérieurs (rentrants) :

- Si $l = (3 \text{ à } 4) d$, le jet s'écoule par l'ajutage en section totale et on a : $C_d = \varphi = 0,71$.
- Si $l < 3d$, le jet ne s'écoule pas sur la section totale de l'ajutage et on a : $C_d = 0,51$ et $\varphi = 0,97$.

Les résistances en écoulement du liquide engendrées par un ajutage cylindrique rentrant sont supérieures à celles qui caractérisent l'ajutage extérieur ce qui implique que le débit par un ajutage cylindrique rentrant est inférieur au débit par un ajutage cylindrique sortant de 13,5%, mais supérieur de 14% environ au débit par un petit orifice en mince paroi.

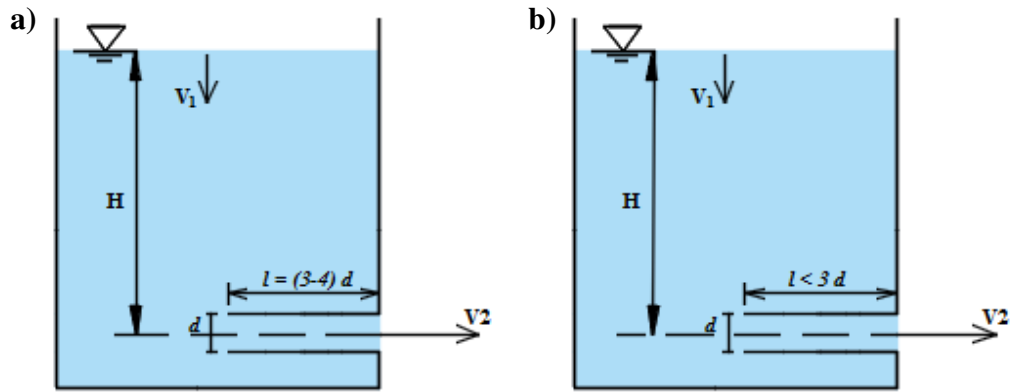


Figure II.13 : Ajutage cylindriques intérieurs : a) $l = (3 \text{ à } 4)d$; b) $l < 3d$.

II.2.2.3 Ajutages conique convergent :

Le coefficient de vitesse et le coefficient de débit sont donnés pour un angle $\theta = 13^\circ$

$$C_d = 0,95 \text{ et } \varphi = 0,97.$$

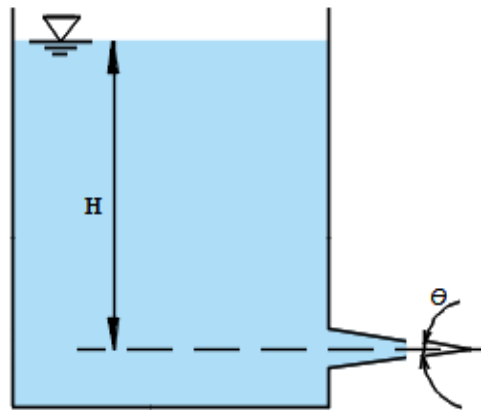


Figure II.14 : Ajutage conique convergent.

II.2.2.4 Ajutages conique divergent :

Le coefficient de vitesse et le coefficient de débit sont donnés pour un angle $\theta \leq 7^\circ$

$$C_d = \varphi = 0,97.$$

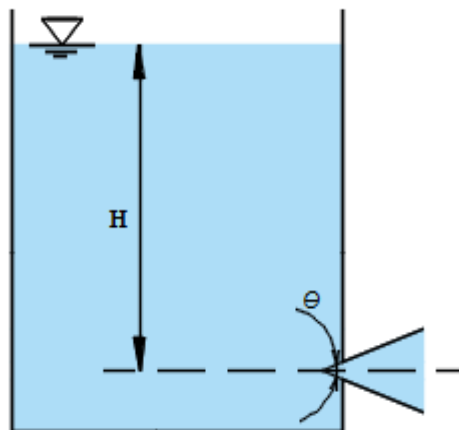


Figure II.15 : Ajutage conique divergent.

○ **Exemple 01 :**

Au fond d'un réservoir d'une section $S=2,4\text{m}^2$, il est réalisé un orifice de diamètre $d=6\text{cm}$.

Déterminer le temps t nécessaire pour que le réservoir se vidange à la moitié ?

Si la hauteur de remplissage au moment de l'ouverture de l'orifice est de $H=2\text{m}$ et un $C_d=0,62$.

○ **Solution :**

- Le temps de vidange sera $t = 258 \text{ s}$

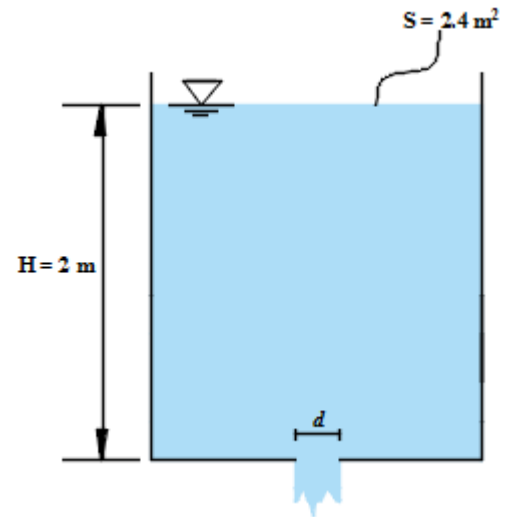


Figure II.15 : Exemple 01.

○ **Exemple 02 :**

Soit le système suivant :

Données :

- Orifice 1 : $S_1=8,5\text{cm}^2$, $C_{d1}=0,62$.
- Orifice 2 : forme carrée de cote $a=4\text{cm}$, $C_{d2}=0,64$.
- Orifice 3 : forme circulaire $d_3=3\text{cm}$, $C_{d3}=0,62$.

$H=3,10\text{m}$, $Q_1=Q_2=Q_3$

On demande : $Q_3=?$, $H_1=?$, $H_2=?$, $H_3=?$.

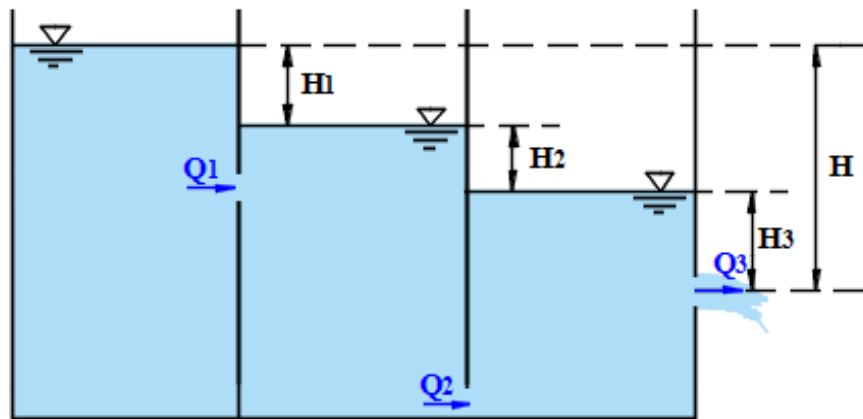


Figure II.16 : Exemple 02.

○ **Solution :**

- $Q_3= 0,0025 \text{ m}^3/\text{s}$;
- $H_1= 1,143 \text{ m}$;
- $H_2= 0,303 \text{ m}$;
- $H_3= 1,654 \text{ m}$.

Chapitre III

Écoulements dans les conduites en charge

III.1 Définition :

Les écoulements en charge sont des écoulements confinés à l'intérieur d'un contenant, en général une conduite. La pression à l'intérieur de ces écoulements peut être de beaucoup plus élevée que la pression atmosphérique ou encore s'abaisser à des valeurs aussi faibles que la pression de vapeur saturante. Même si la pression à l'intérieur de ce type d'écoulement peut atteindre la pression atmosphérique, en aucun cas nous considérerons la présence de surface libre dans cette catégorie d'écoulement.

III.2 Calcul hydraulique d'écoulements dans les conduites en charge :

III.2.1 Conduite simple :

C'est une conduite à diamètre constant sans bifurcation aucune, caractérisée par un diamètre interne D_{in} et un diamètre externe D_{ex} , une longueur L et une rugosité ε des parois internes, pouvant transporter un débit Q . la différence entre D_i et D_e donne l'épaisseur de la paroi, généralement plus grande dans le cas des fortes pressions (Fig. III.01).

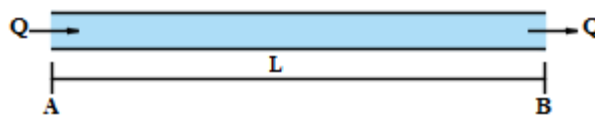


Figure III.01 : Schéma d'une conduite simple.

Dans ce cas, le débit ainsi que la vitesse de l'eau qui transite par cette conduite sont constants d'un bout à l'autre.

$$H_A - H_B = \Delta H = \frac{8\lambda L}{g\pi^2 D_{in}^5} \quad (\text{III.01})$$

III.2.2 Conduite en série :

C'est une conduite constituée par quelques tronçons de longueurs et diamètres différents (Fig. III.02).

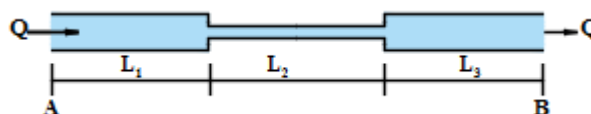


Figure III.02 : Schéma d'une conduite en série.

La perte de charge totale doit se répartir sur les trois pertes de chaque conduite :

$$H_A - H_B = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 \quad (\text{III.02})$$

Par ailleurs le même débit traverse les trois conduites :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \quad (\text{III.03})$$

Sachant que :

$$\Delta H_1 = R_1 Q_1^2 \text{ avec } R_1 = \frac{8\lambda L_1}{g\pi^2 D_1^5} \quad (\text{III.04})$$

On a :

$$\Delta H_i = \lambda \frac{L_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2g} = \frac{8\lambda L_i}{g\pi^2 D_i^5} Q_i^2 \quad (\text{III.05})$$

D'après l'équation III.02 et III.04, on peut écrire :

$$H_A - H_B = R_1 Q_1^2 + R_2 Q_2^2 + R_3 Q_3^2 \quad \rightarrow \quad H_A - H_B = (R_1 + R_2 + R_3) Q^2$$

D'où :

$$Q = \sqrt{\frac{H_A - H_B}{R_1 + R_2 + R_3}} \quad (\text{III.06})$$

III.2.3 Conduite en parallèle :

Se sont des conduites en liaison parallèles dont les longueurs et les diamètres sont différents, comme le montre l'exemple de la figure III.03 :

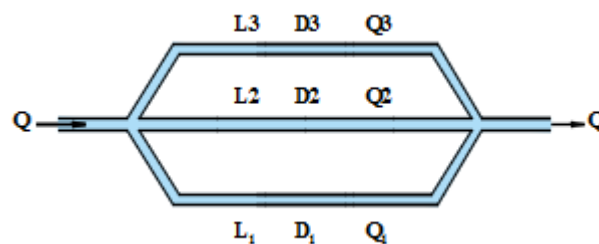


Figure III.03 : Schéma de conduites en parallèle.

La perte de charge entre A et B est la même dans chaque conduite :

$$H_A - H_B = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3 \quad (\text{III.07})$$

Le débit se divise entre les trois conduites, comme l'équation III.02 ; de la relation entre ΔH_i et Q_i (Eq. III.03), on trouve :

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{R_i}} \sqrt{\Delta H_i} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{1}{\sqrt{R_1}} \sqrt{\Delta H_1} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} \sqrt{\Delta H_2} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} \sqrt{\Delta H_3}$$

Donc :

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} \right) \sqrt{H_A - H_B} \quad (\text{III.08})$$

III.3 Les réseaux de distribution :

Réseau de distribution est un ensemble de conduites raccordées d'une façon serrée et elle permet le cheminement de l'eau à des endroits bien précis. D'une manière générale les réseaux de distribution peuvent être classés en deux grandes familles :

III.3.1 Réseaux ramifiés :

La caractéristique d'un réseau ramifié est que l'eau circule, dans toute la canalisation, dans un seul sens (des conduites principales vers les conduites secondaires, vers les conduites tertiaires,...). De ce fait, chaque point du réseau n'est alimenté en eau que d'un seul côté (Fig.III.04).

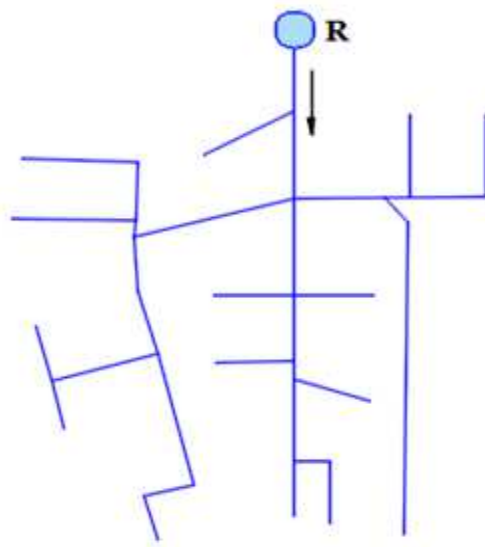


Figure III.04 : Réseaux ramifiés.

Le calcul d'un réseau ramifié s'effectue à partir des données de départ et qui sont : les longueurs des tronçons du réseau, les débits en chaque tronçon et données topographiques.

Durant le calcul on doit assurer des pressions suffisantes et des vitesses optimales dans tout le réseau. Dans le cas général, le débit d'une tuyauterie peut se composer du débit de transit Q_t et du débit de distribution continue Q_d (Fig.III.05).

Débit de calcul :

$$Q_{cal} = Q_t + 0,55 Q_d \quad (III.09)$$

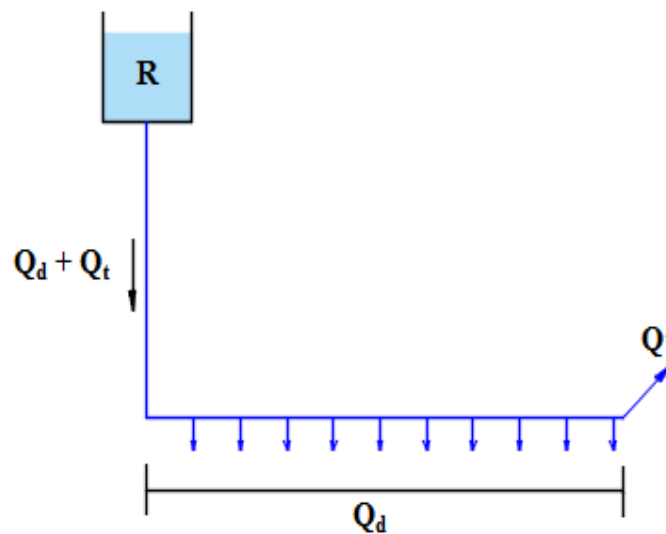


Figure III.05 : Schéma de calcul du réseau ramifié.

III.3.2 Réseaux mailles :

Ce type de réseaux présente l'avantage d'être économique, mais il manque de sécurité (encas de rupture d'une conduite principale, tous les abonnés situés à l'aval seront privés d'eau).

Le réseau maillé dérive du réseau ramifié par connexion des extrémités des conduites (généralement jusqu'au niveau des conduites tertiaires), permettant une alimentation de retour. Ainsi, chaque point du réseau peut être alimenté en eau de deux ou plusieurs côtés (Fig. III.06).

Comme dans le cas des réseaux ramifiés, le problème consiste à déterminer le débit dans tous les tronçons qui, une fois connus, permettront de calculer les charges en chaque point du réseau. Il y a plusieurs méthodes de calcul parmi eux « la méthode de Hardy-Crosse ».

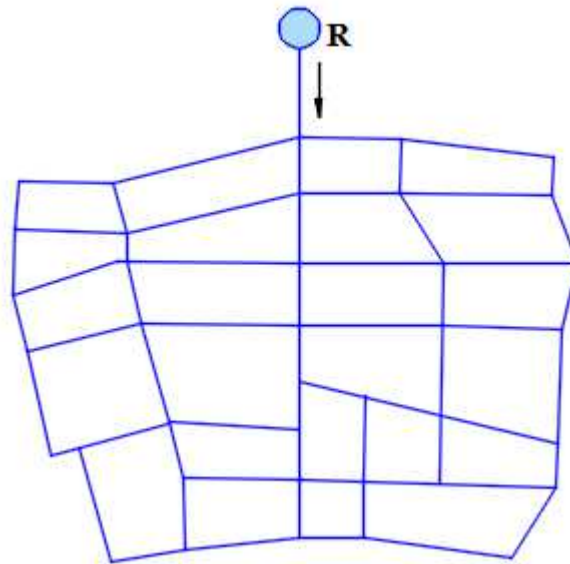


Figure III.06 : Réseaux mailles.

✚ Méthode de Hardy-Cross :

Cette méthode repose sur l'approximation successive et elle se base sur les deux lois suivantes :

- Première loi :

En un nœud quelconque des conduites, la somme des débits qui entrent à ce nœud est égale à la somme de débit qui en sortent (Fig. III.07).

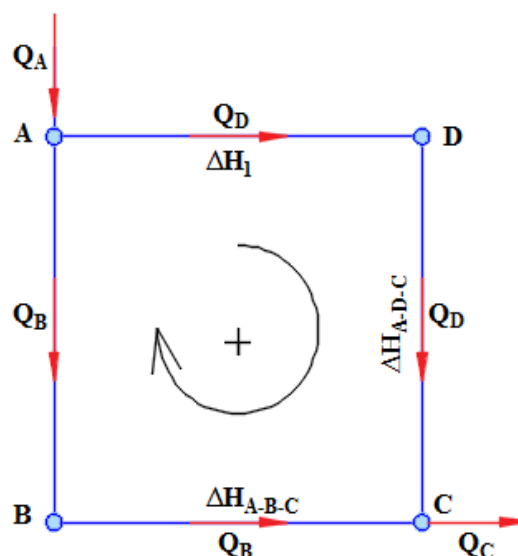


Figure III.07 : Schéma de calcul du réseau maille (première loi).

D'après le schéma :

$$Q_A = Q_B + Q_D \quad \text{et} \quad Q_C = Q_B + Q_D \quad (\text{III.10})$$

Cette loi est évidente et est approchée de la loi de Krich-Hoff en électricité.

- **Deuxième loi :**

Le long d'un parcours orienté et fermé, la somme algébrique des pertes de charges est nulle ($\sum \Delta H = 0$).

Cette loi appliquée au contour $ABCD$, où l'orientation positive est donnée par le sens du déplacement des aiguilles d'une montre, donné pour le sens d'écoulement de l'eau indiqué par les flèches :

$$\Delta H_{A,D,C} - \Delta H_{A,B,C} = 0$$

La méthode de Hardy-Cross consiste tout d'abord à se fixer dans chaque maille une répartition arbitraire des débits ainsi qu'un sens supposé d'écoulement.

Ensuite, un diamètre arbitraire est choisi (optimal) et l'on calcule les pertes de charges correspondante. Soit la maille suivante (Fig. III.08) :

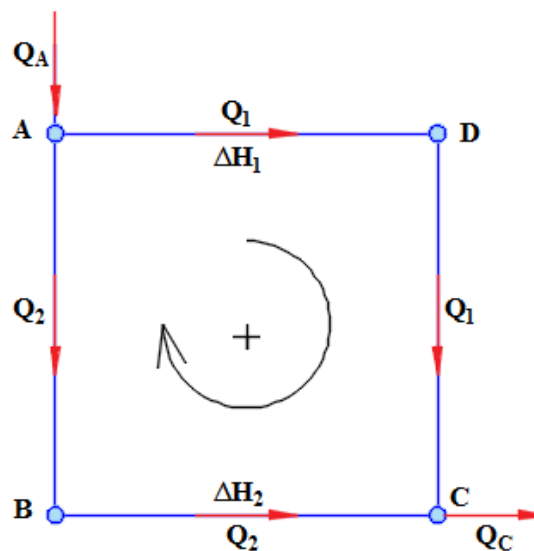


Figure III.08 : Schéma de calcul du réseau maille (deuxième loi).

Supposons que l'on décompose arbitrairement, le débit Q_A en Q_1 et Q_2 tel que :

$$Q_A = Q_1 + Q_2 = Q_C \quad (\text{III.11})$$

- Les pertes de charges totales entre A , D et C sont ΔH_1 .
- Les pertes de charges totales entre A , B et C sont ΔH_2 .

Choisissons donc le diamètre avec les débits Q_1 et Q_2 qui engendreront les pertes de charges ΔH_1 sur ADC et ΔH_2 sur ABC .

On doit alors vérifier, d'après la deuxième loi et compte tenu de l'orientation d'une maille :

$$\Delta H_1 - \Delta H_2 = 0 \quad (\text{III.12})$$

Ordinairement, cette égalité n'est pas vérifiée du premier est il est nécessaire de modifier la répartition initiale supposée des débits Q_1 et Q_2 afin de rectifier en conséquence la valeur de ΔH_1 et ΔH_2 .

Soit ΔQ_1 la valeur dont il est nécessaire de modifier le débit. Pour arriver à ce but, si on ajoute ΔQ_1 à Q_1 par exemple il faudra la déduire de Q_2 afin que la somme Q_A reste la même.

Par ailleurs on a :

$$\Delta H_1 = R_1 Q_1^2 \text{ et } \Delta H_2 = R_2 Q_2^2 \quad (\text{III.13})$$

Où : R_1 et R_2 représentent les résistances des conduites. Remplaçons l'équation III.13 dans l'équation III.12.

$$R_1(Q_1 + \Delta Q_1)^2 - R_2(Q_2 + \Delta Q_2)^2 = 0 \quad (\text{III.14})$$

En négligeant les termes en ΔQ_1^2 on trouve :

$$\Delta Q_1 = \frac{-R_1 Q_1^2 + R_2 Q_2^2}{2(R_1 Q_1 + R_2 Q_2)} \quad (\text{III.15})$$

Et puisque :

$$R_1 = \frac{\Delta H_1}{Q_1^2} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{\Delta H_2}{Q_2^2} \quad (\text{III.16})$$

On obtient :

$$\Delta Q_1 = - \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{2 \left(\frac{\Delta H_1}{Q_1} + \frac{\Delta H_2}{Q_2} \right)} \quad (\text{III.17})$$

Puisque $(\Delta H_1 - \Delta H_2)$ c'est la somme des pertes de charges, en tenant compte du signe.

$$2 \left(\frac{\Delta H_1}{Q_1} + \frac{\Delta H_2}{Q_2} \right) = 2 \sum \frac{\Delta H_i}{Q_i} \quad (\text{III.18})$$

On aura définitivement :

$$\Delta Q_1 = - \frac{\sum \Delta H_i}{2 \sum \frac{\Delta H_i}{Q_i}} \quad (\text{III.19})$$

En conséquence, dans une première approximation les nouveaux débits deviennent dans l'exemple choisis :

$$Q_1 + \Delta Q_1 \quad \text{et} \quad Q_2 - \Delta Q_2 \quad (\text{III.20})$$

Si dans ce cas ces conditions, la deuxième loi n'est pas encore satisfaite, il faudra de nouveau corriger les débits d'une valeur de ΔQ_2 calculée de la façon que nous venons de voir.

III.4 Réseaux de conduites comportant une pompe ou une turbine :

III.4.1 Pompes :

III.4.1.1 Définition :

Une pompe est une machine hydraulique qui aspire et refoule un liquide (l'eau, l'huile, l'essence, etc) d'un point à un endroit voulu. La pompe est destinée à élever la charge du liquide pompé.

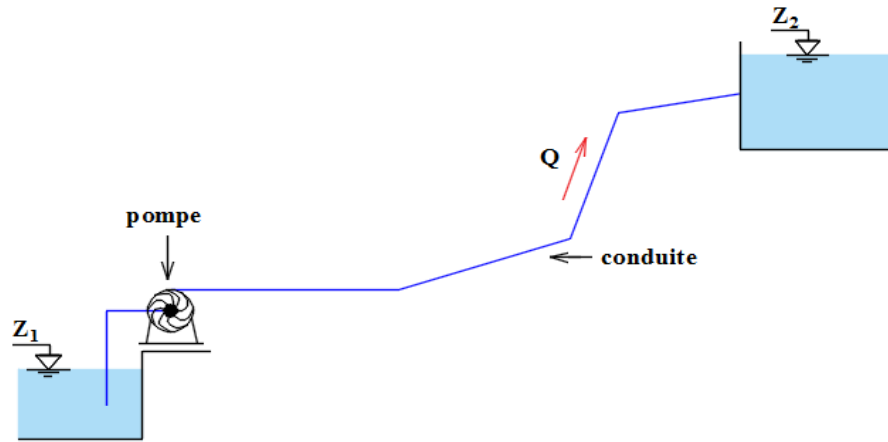


Figure III.09 : Pompe installée avec une conduite d'aspiration.

III.4.1.2 Classification des pompes :

En ce qui concerne les pompes, on distingue plusieurs types selon la forme de l'énergie donnée à l'eau:

- énergie sous forme potentielle: vis d'Archimède (utilisé dans les réseaux d'assainissement et dans les stations d'épuration).
- énergie sous forme de pression: pompes volumétriques ou à piston (faibles débits)
- énergie sous forme de vitesse: pompes axiales et centrifuges (appelées aussi turbopompes).

Ces turbopompes sont actuellement les plus utilisées.

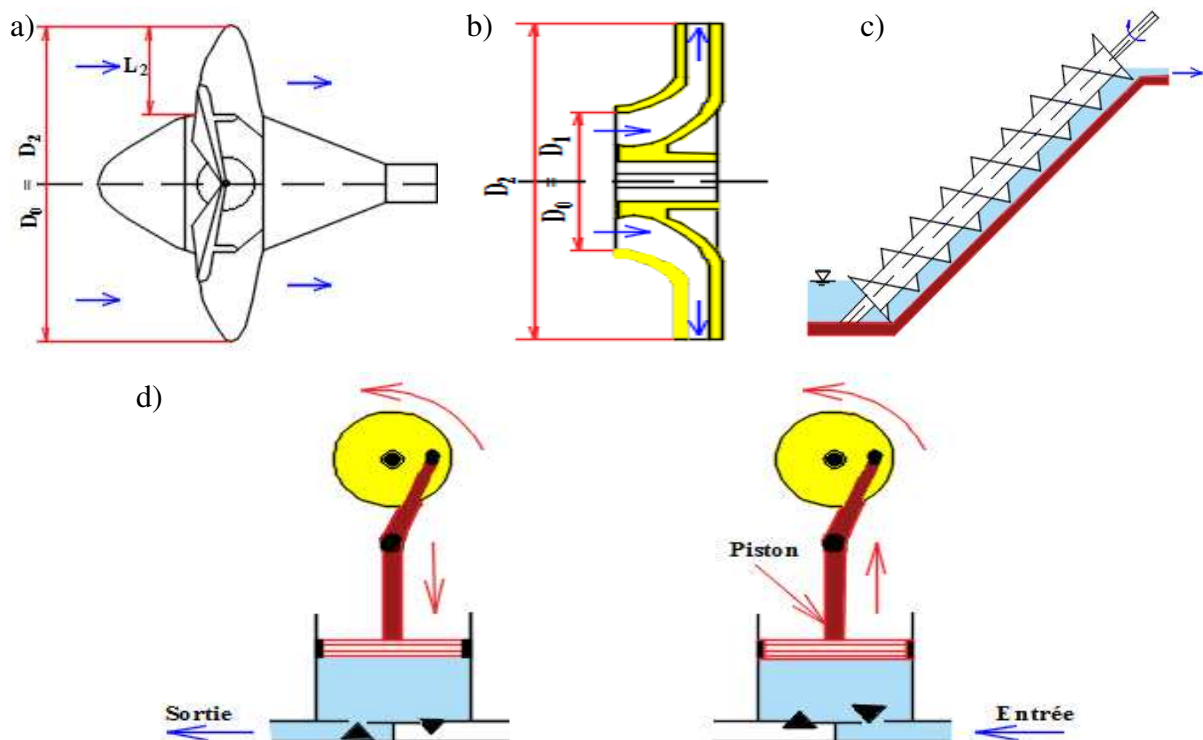


Figure III.10 : Forme de roue de pompes : a) Axiale, b) Centrifuge, c) Vis d'Archimède, d) Pompe à piston.

III.4.1.3 Caractéristiques générales des pompes :

Les caractéristiques hydrauliques d'une pompe sont le débit Q , la hauteur de refoulement H , la puissance absorbée P_a , le rendement η et la capacité d'aspiration $NPSH$ (Net Positive Suction Head).

✚ Débit d'une pompe Q :

C'est le volume de liquide recueilli au refoulement de la pompe pendant l'unité de temps. Il s'exprime en (m^3/h) ou en litres par seconde (l/s). Il se calcule par la formule :

$$Q = V \cdot S = V \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{III.21})$$

✚ La hauteur manométrique H_m :

Considérons une pompe A refoulant un liquide de poids volumique γ avec un débit Q à une hauteur H_g à l'aide d'une canalisation de longueur L et de diamètre D .

L'écoulement considéré va provoquer le long de la canalisation une perte de charge ΔH_T résultant des frottements le long de la canalisation et des pertes de charge locales (coudes, robinets-vannes, crépine, clapets, etc....).

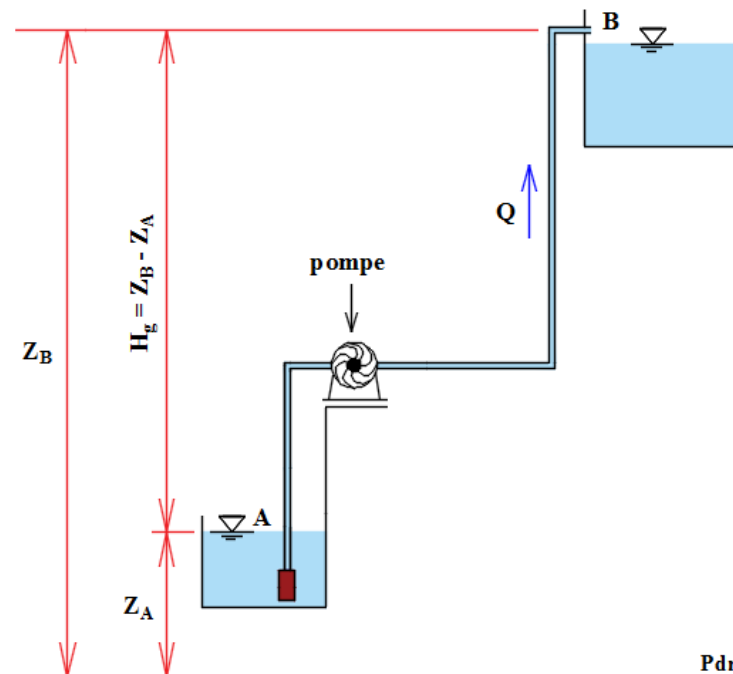


Figure III.11 : Conduite et pompe entre deux réservoirs.

On applique le théorème de Bernoulli entre A et B :

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + H_{mt} = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_{total} \quad (\text{III.22})$$

Avec : $P_A = P_B = P_{atm}$, $V_A \approx V_B \approx 0$ et $Z_A - Z_B = H_g$

On trouve :

$$H_{mt} = H_g + \Delta H_{total} \quad (\text{III.23})$$

Soit : $\Delta H_{total} = \Delta H_L + \Delta H_S$ (III.24)

Avec : $\Delta H_L = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5} L$ et $\Delta H_S = K \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4}$

- H_g : s'appelle la hauteur géométrique d'élévation.
- $H_g + \Delta H_{total}$: s'appelle la hauteur manométrique d'élévation (H_{mt}).

✚ *Rendement de la pompe η :*

Le rendement η d'une pompe se calcule comme le rapport de la puissance utile P_u (puissance hydraulique) et la puissance absorbée P_a (Puissance fournie sur l'axe de la pompe).

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} \quad (\text{III.25})$$

✚ *Puissance d'une pompe :*

La puissance disponible au niveau de l'arbre d'entraînement de la roue de la pompe est la puissance absorbée P_a de cette pompe qui est puissance utile du moteur transmise pour l'entraînement de la pompe. La puissance transmise au fluide est appelée puissance hydraulique P_u . Elle s'exprime par la relation :

$$P_u = \rho g Q H_{mt} \quad (\text{III.26})$$

✚ *La capacité d'aspiration NPSH disponible est la charge absolue à l'aspiration :*

NPSH est l'abréviation de l'expression anglaise «Net-Positive-Suction-Head», encore appelée «hauteur d'aspiration nette positive».

- $NPSH_{requis}$: la hauteur générée par la pompe chute alors, ainsi que la puissance absorbée, les vibrations et le bruit augmentent, et on peut constater une érosion, principalement dans la roue, sous forme de cratères caractéristiques. Un maintien de la pompe dans ces conditions de fonctionnement peut entraîner sa destruction.
- $NPSH_{disponible}$: le $NPSH_{disponible}$ (le $NPSH$ de l'installation) est, par définition, la valeur de la pression absolue mesurée sur l'axe de la bride d'aspiration de la pompe, compte tenu des dispositions prises à l'aspiration (diamètre du conduit, présence coudes...). Afin que les conditions d'aspiration définies par l'utilisateur ($NPSH_{disponible}$) soient toujours satisfaites par la pompe, il faudra que le $NPSH_{disponible}$ soit toujours supérieur au $NPSH_{requis}$.

✚ **Calcul du $NPSH_{disponible}$:**

- Cas d'une pompe en aspiration, située au-dessus du niveau du liquide pompé, on dit alors que le pompage se fait en dépression (Fig III.12.a). L'équation du $NPSH_{disponible}$ s'écrit:

$$NPSH_{disponible} = P_{atm} - H_{ga} - \Delta H_a \quad (III.27)$$

- P_{atm} : la pression atmosphérique (10 m.c.e).
- H_{ga} : la hauteur géométrique d'aspiration.
- ΔH_a : la perte de charge dans la conduite d'aspiration.

- Fonctionnement en charge, pompe située en dessous du niveau du liquide pompé, on dit dans ce cas que le pompage se fait en surpression (Fig. III.12.b). L'équation du $NPSH_{disponible}$ s'écrit :

$$NPSH_{disponible} = P_{atm} + H_{ga} - \Delta H_a \quad (III.28)$$

En pratique, pour qu'une pompe fonctionne sans cavitation, il faut vérifier que le $NPSH_{disponible}$ est supérieure du $NPSH_{requis}$ ($NPSH_{disponible} > NPSH_{requis}$).

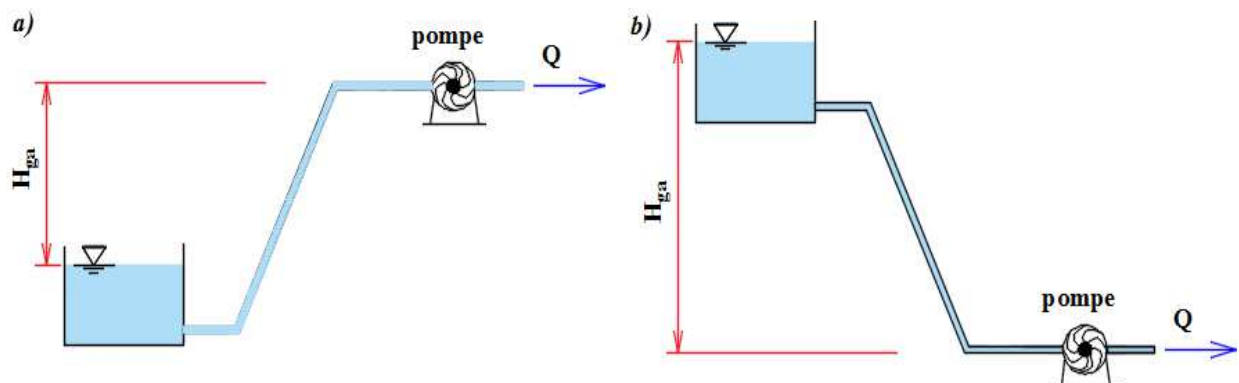


Figure III.12 : a) Pompage en dépression, b) Pompage en surpression.

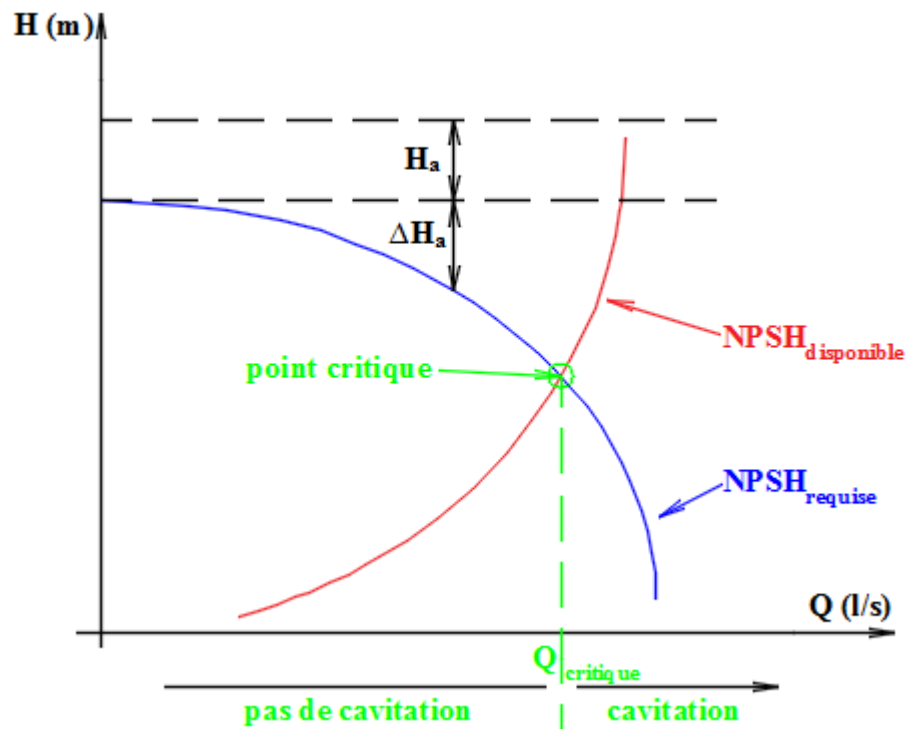


Figure III.13 : Courbe de la capacité d'aspiration *NPSH*.

 *Point de fonctionnement :*

Le point de fonctionnement de la pompe est déterminé par le point d'intersection de la courbe caractéristique de la pompe Q - H et la courbe caractéristique du circuit Hydraulique.

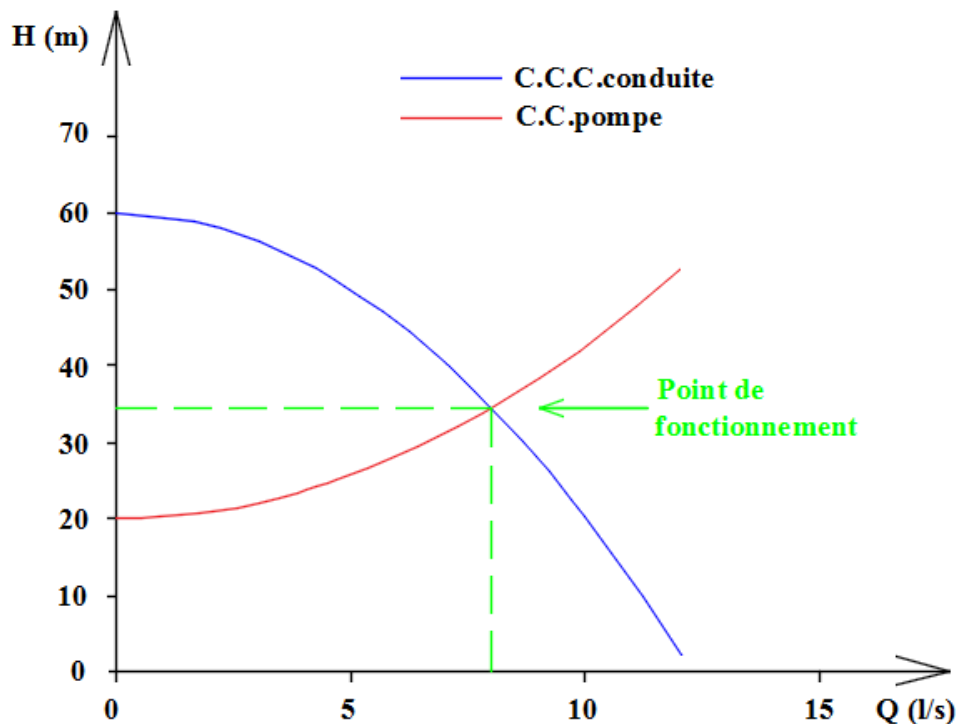


Figure III.14 : Point de fonctionnement obtenu graphiquement.

III.4.1.4 Couplage des pompes :

Le couplage des pompes peut s'effectuer en série ou en parallèle.

✚ Pompe en série :

Des pompes en série sont traversées par le même débit. La hauteur de refoulement totale étant la somme des hauteurs de refoulement (Fig. III.15) :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n \quad (\text{III.29})$$

$$H_T = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n \quad (\text{III.30})$$

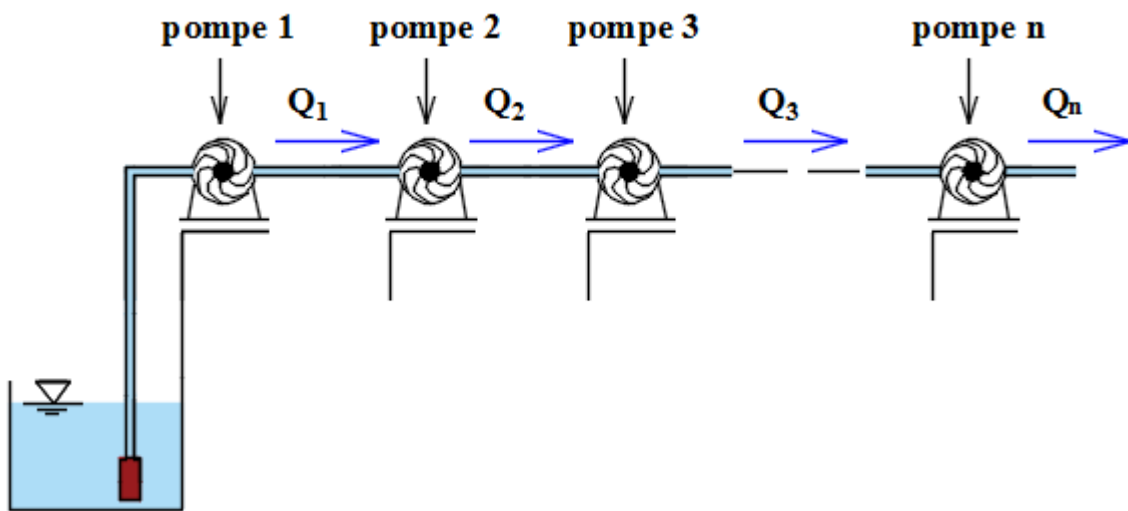


Figure III.15 : Pompes en série.

✚ Pompe en parallèle :

Des pompes en parallèle fournissent la même hauteur de refoulement. Le débit total donné par toutes les pompes est la somme des débits (Fig. III.16):

$$H_1 = H_2 = H_3 = \dots = H_n \quad (\text{III.31})$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \quad (\text{III.32})$$

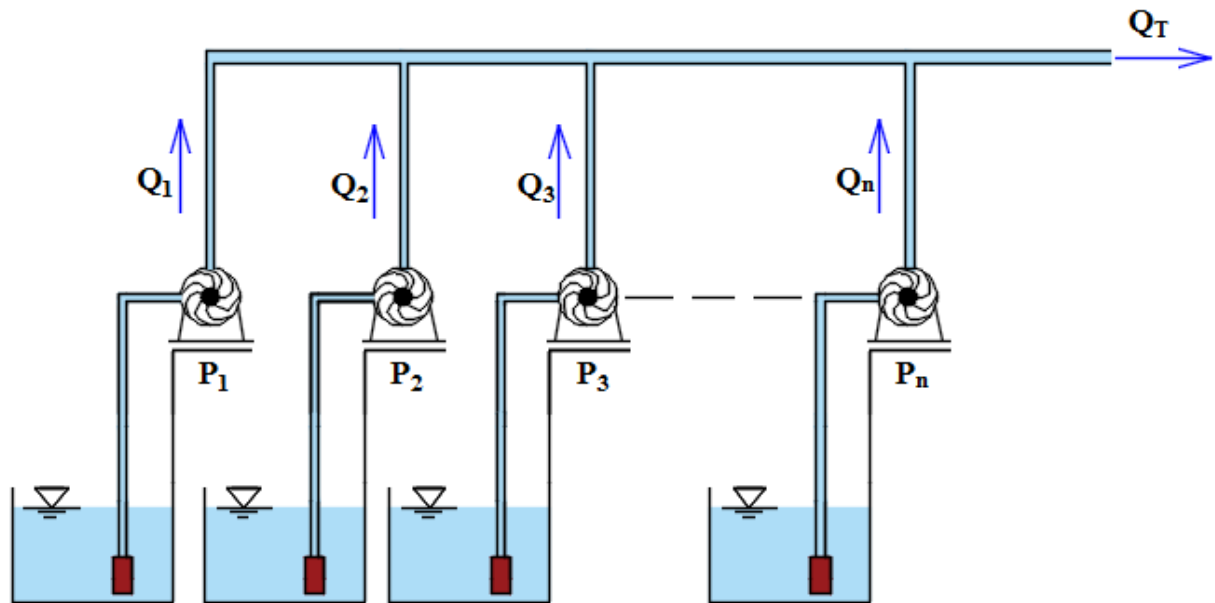


Figure III.16 : Pompes en parallèle.

III.4.2 Turbine :

III.4.2.1 Définition :

Une turbine hydraulique utilise la force de l'eau pour produire une énergie. Cette machine tournante (constituée de roues à aubes) est alimentée par un débit d'eau sous pression, laquelle vient d'un barrage ou d'une conduite forcée qui l'achemine depuis un plan d'eau situé en altitude. Elle constitue le moteur des centrales hydroélectriques, c'est-à-dire des centrales qui produisent de l'électricité grâce à l'énergie fournie par le mouvement de l'eau (énergie dite hydraulique) (Fig. III.17).

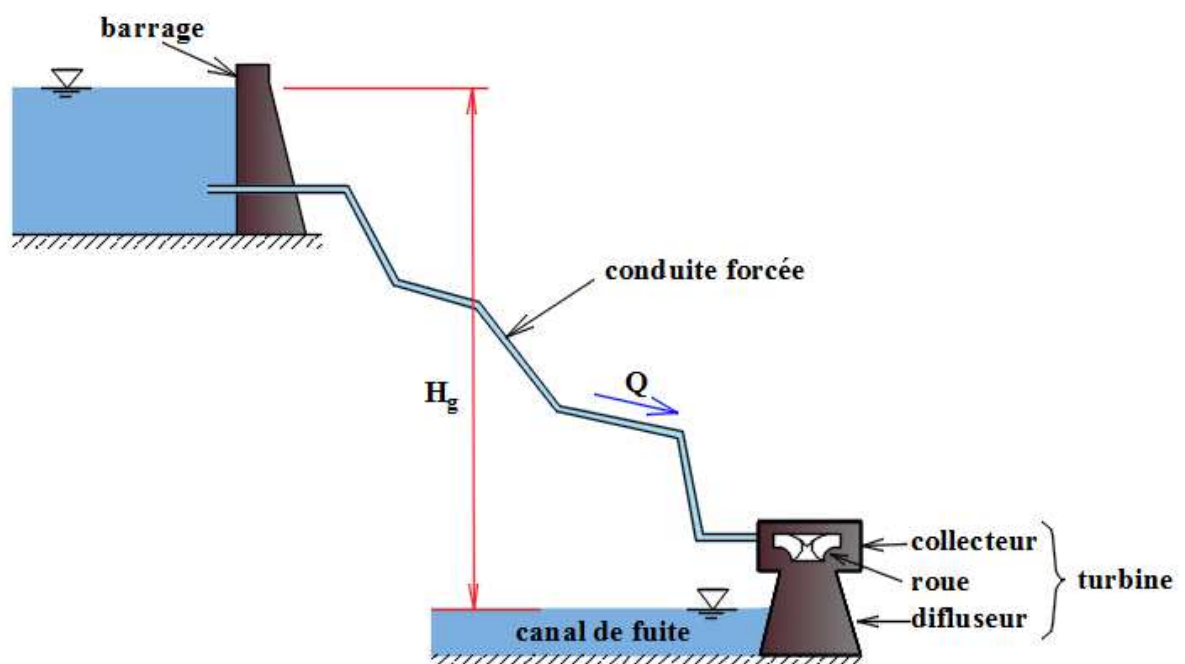


Figure III.17 : Turbine installée avec une conduite forcée.

III.4.2.2 Les différents types de turbines :

Il existe deux types de turbines :

- ✚ Les turbines à action ont pour caractéristique d'avoir une pression d'entrée égale à la pression de sortie. Elles sont réparties en deux types : Pelton et Crossflow. Ce sont les turbines les plus simples à utiliser, mais ce sont également les moins efficaces du fait de leur faible surface de contact avec l'eau (Fig. III.18.b).
- ✚ Lorsque la pression à l'entrée de la roue est supérieure à la pression de sortie, on parle de turbines à réaction. Ce sont les turbines Francis et Kaplan. Grâce à une conception complexe, elles disposent de bons rendements. Une turbine à réaction est une turbine immergée qui utilise à la fois l'énergie résultante de l'eau (énergie cinétique) et celle provenant de la différence de pression. Elle travaille en trois étapes : On crée d'abord un grand tourbillon à l'entrée, grâce à ses aubes, la roue freine ce tourbillon et en transfère l'énergie à l'alternateur qui en fait de l'électricité. Par la suite, l'eau est retournée à la rivière le plus doucement possible (Fig. III.18.a).

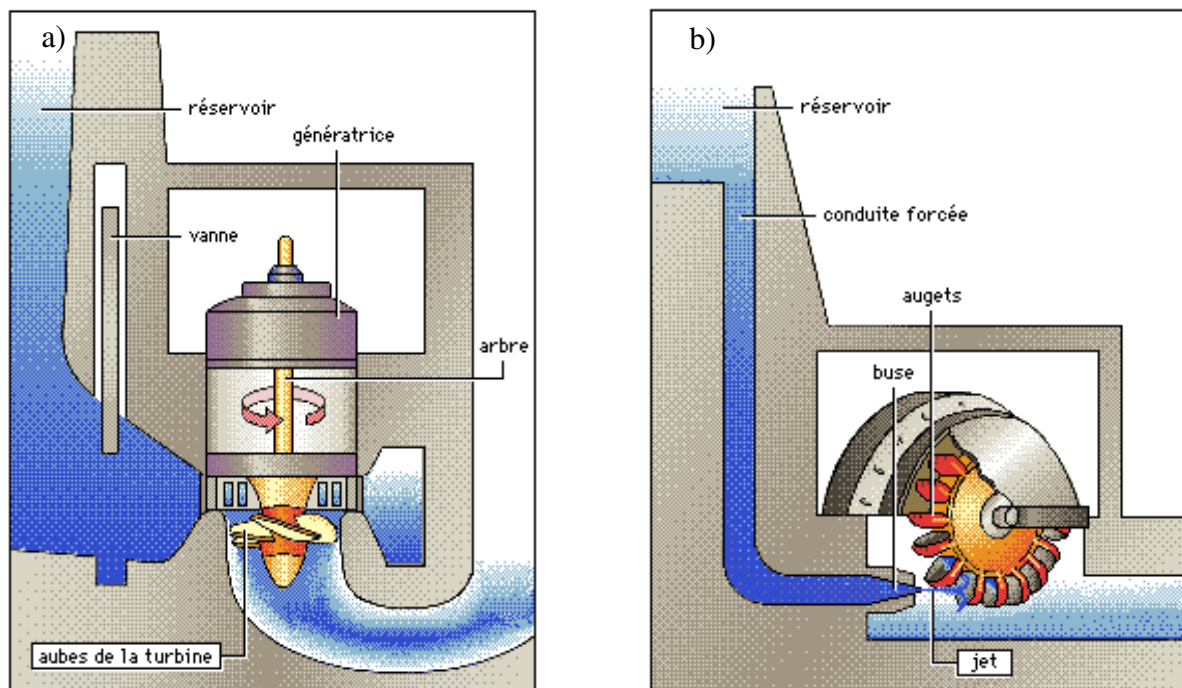


Figure III.18 : a) Turbines à réaction (Turbines Kaplan), b) Turbines à action (Turbine Pelton).

III.4.2.3 Caractéristiques générales des turbines :

Une conduite cylindrique amène l'eau d'un barrage (dont le niveau Z_A est maintenu constant) dans une turbine.

- ✚ L'équation de Bernoulli généralisée devient dans ce cas :

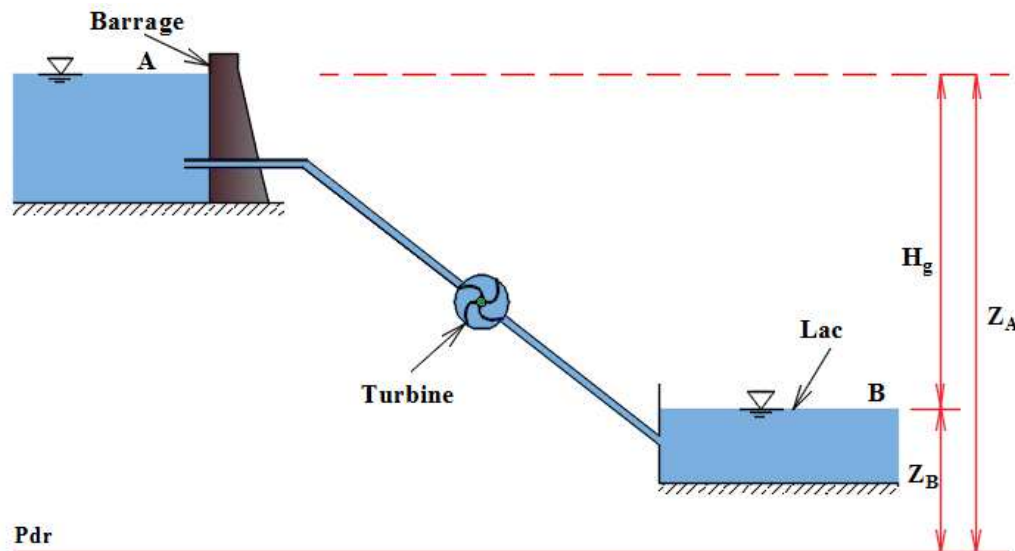


Figure III.19 : Conduite et turbine entre barrage et lac.

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A - H_{mt} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B + \Delta H_{total} \quad (\text{III.33})$$

✚ Le calcul de la puissance hydraulique P_h d'une turbine se fait par la formule :

$$P_h = \rho g Q H_{mt} \quad (\text{III.34})$$

✚ La puissance électrique P_e par :

$$P_e = \frac{P_h}{\eta} \quad (\text{III.35})$$

Où η est le rendement global de l'installation.

○ Exemple 01 :

Soit deux conduites montées en parallèles.

Déterminer les débits Q_1 et Q_2 .

On donne ; $Q = Q_1 + Q_2 = 251/\text{s}$, $L = 30\text{m}$, $D_1 = 50\text{mm}$, $\lambda_1 = 0,04$, $L_2 = 50\text{m}$, $D_2 = 100\text{mm}$, $\lambda_2 = 0,03$, $K_v = 3$

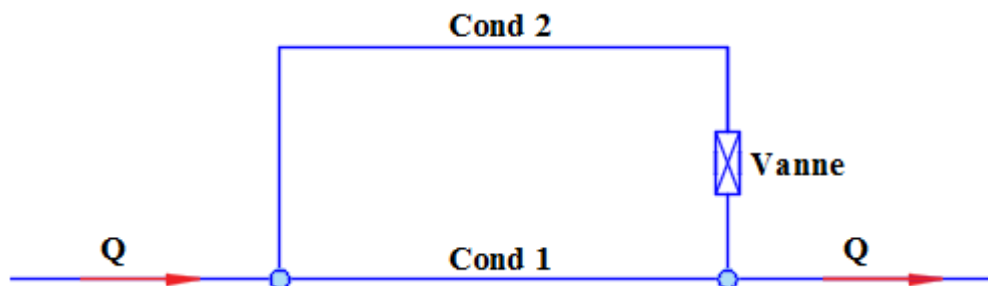


Figure III.20 : Exemple 01.

○ **Solution :**

- $Q_1 = 0,005 \text{ m}^3/\text{s}$.
- $Q_2 = 0,020 \text{ m}^3/\text{s}$.

○ **Exemple 02 :**

Deux réservoirs de stockage A et B alimentent un troisième réservoir C suivant le schéma ci-après :

Un manomètre placé au point D indique une pression de 0,9 bars.

Déterminer la cote du plan d'eau du réservoir C.

On donne les cote des plans d'eau des différents réservoirs : $Z_A = 728 \text{ m}$, $Z_B = 712,5 \text{ m}$, $Z_D = 700 \text{ m}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. la pression P_{atm} est négligée.

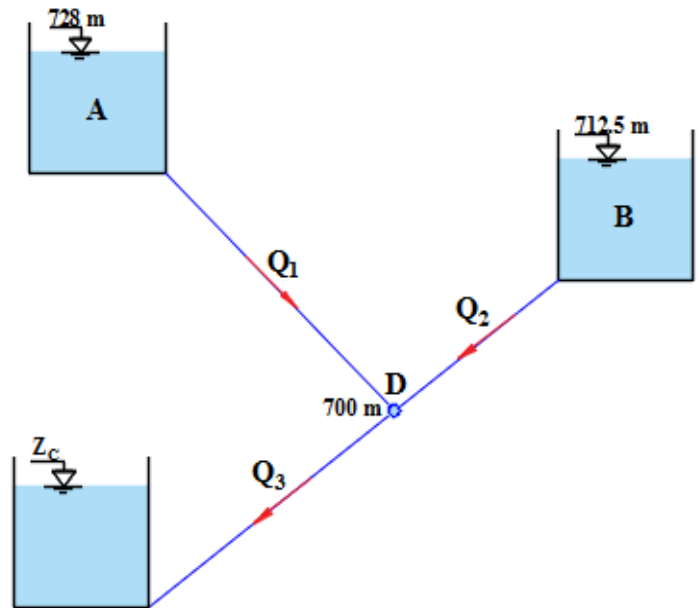


Figure III.21 : Exemple 02.

Tableau III.01 : Paramètres des conduites.

Conduite	L (m)	D (mm)	λ
A-D	328	300	0,015
B-D	2890	300	0,015
D-C	1918	400	$3=0,1 \text{ mm}$

○ **Solution :**

- la cote du plan d'eau du réservoir C : $Z_C = 675,83 \text{ m}$.

○ **Exemple 03 :**

Soit le réseau ramifié représenté la figure ci-dessous.

Calculer le débit de calcul Q_{cal} .

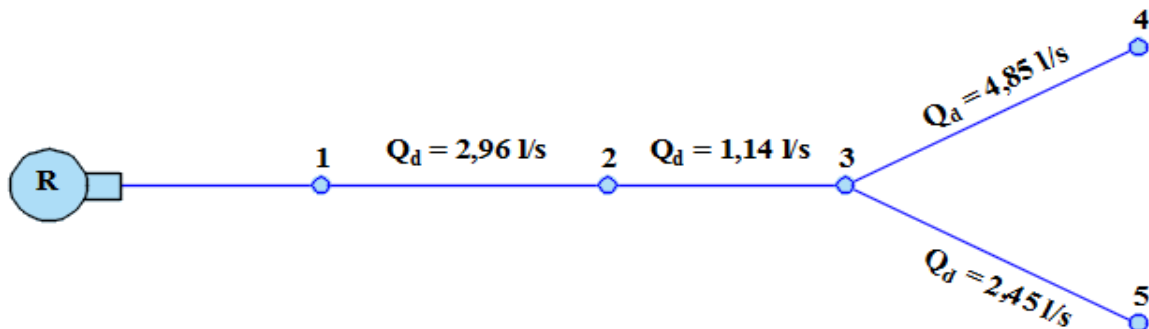


Figure III.22 : Exemple 03.

○ **Solution :****Tableau III.02 :**

Tronçon	Q_d (l/s)	Q_t (l/s)	Q_{cal} (l/s) $Q_{cal} = Q_t + 0,55Q_d$
3 ----- 5	2,45	0,00	1,34
3 ----- 4	4,85	0,00	2,66
2 ----- 3	1,14	7,30	7,93
1 ----- 2	2,96	8,44	10,07
R ----- 1	0,00	11,40	11,40

○ **Exemple 04 :**

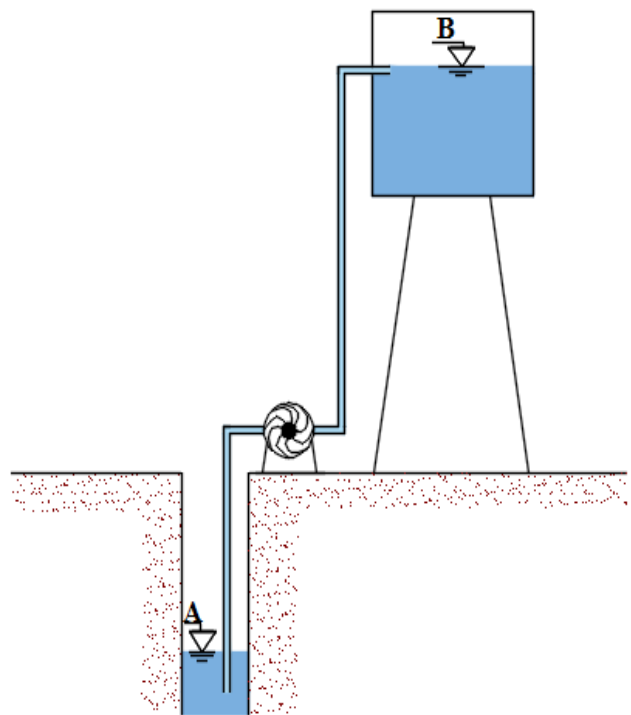
Une pompe P alimente un château d'eau à partir d'un puits à travers une conduite de diamètre $D = 200\text{mm}$.

On donne :

- les altitudes : $Z_B = 20\text{ m}$, $Z_A = -7\text{ m}$,
- les pressions $P_1 = P_2 = P_{atm}$;
- la vitesse d'écoulement $V = 0.6\text{ m/s}$,
- l'accélération de la pesanteur $g = 9,81\text{ m/s}^2$

Travail demandé :

- 1) Calculer le débit Q de la pompe.
- 2) Calculer la puissance utile P_u de la pompe.
- 3) En déduire la puissance P_a absorbée par la pompe sachant que son rendement est de 85%.

**Figure III.23 :** Exemple 04.○ **Solution :**

- 1) le débit Q de la pompe = $0,019\text{ m}^3/\text{s}$.
- 2) la puissance utile P_u de la pompe = $5032,33\text{ W}$.
- 3) la puissance P_a absorbée par la pompe = $6290,66\text{ W}$.

Chapitre IV

Écoulement à surface libre

IV.1 Définition :

Les écoulements à surface libre sont écoulements qui comportent une surface libre en contact avec l'air, généralement soumise à la pression atmosphérique.

Cet écoulement peut se faire soit dans des canaux naturels tels que les (rivières, ruisseaux,...etc.) ou dans des canaux artificiels qui sont réalisés par l'homme tels que les canaux de drainage et d'évacuation.

IV.2 Classification des écoulements à surface libre :

Une classification des écoulements peut se faire selon la variation de la profondeur, h ou D_h , par rapport au temps et à l'espace : $D_h = f(t, x)$

- *Variabilité dans le temps*: le mouvement est permanent si les vitesses moyennes U et ponctuelle u ainsi que la profondeur h ou D_h , restent invariables dans le temps en grandeur et en direction (Fig. IV.01). Par conséquent, le débit est constant :

$$U.S = Q \quad (IV.01)$$

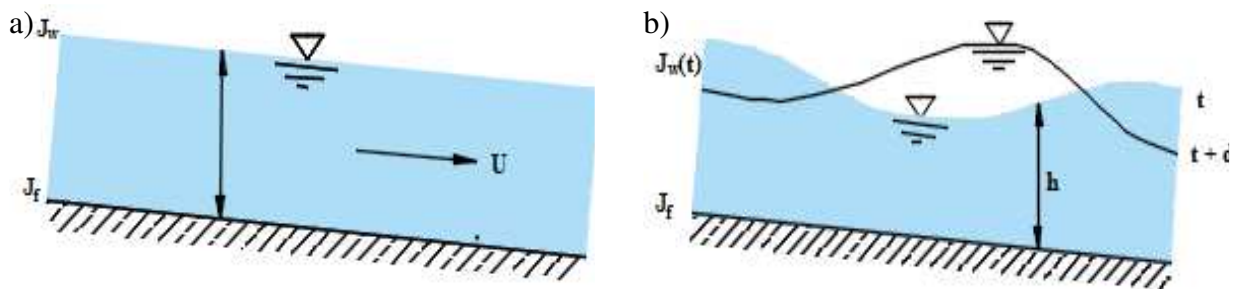


Figure IV.01 : Schéma des écoulements : a) permanents ; b) non permanents.

Le mouvement est non permanent si la profondeur, $D_h(t)$, ainsi que la autres paramètres varient avec le temps. Par conséquent, le débit n'est pas constant.

Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins, les variations temporelles sont souvent suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme permanent, du moins dans un intervalle de temps relativement court.

- *Variabilité dans l'espace*: le mouvement est uniforme si la profondeur, D_h , ainsi que les autres paramètres, restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente de fond J_f est donc parallèle à la ligne de la surface libre J_w et l'on a $J_j = J_w$.

Le mouvement est non uniforme ou varié si la profondeur, $D_h(x)$, ainsi que les autres paramètres, changent d'une section à l'autre. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre, $J_j \neq J_w$.

L'écoulement non uniforme peut être permanent ou non permanent.

Un mouvement varié peut être accéléré, $dU/dx > 0$, ou décéléré, $dU/dx < 0$, suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.

Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur, $D_h(x) \approx D_h$, ainsi que les autres paramètres, ne changent que très lentement d'une section à l'autre. On peut donc admettre que l'écoulement est quasi uniforme le long d'un petit tronçon et que la vitesse, U , reste quasiment constante.

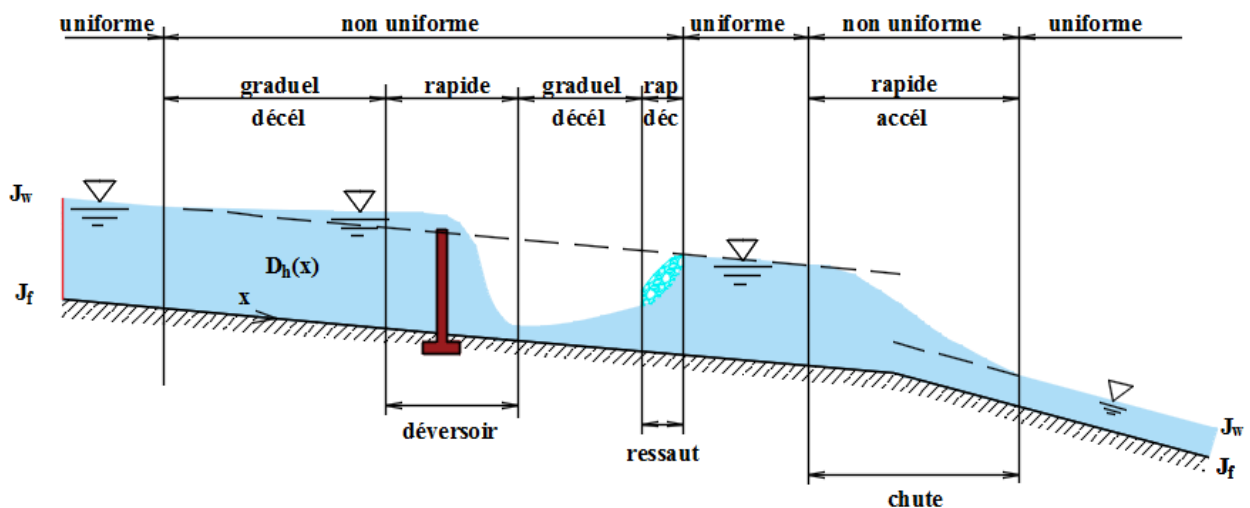
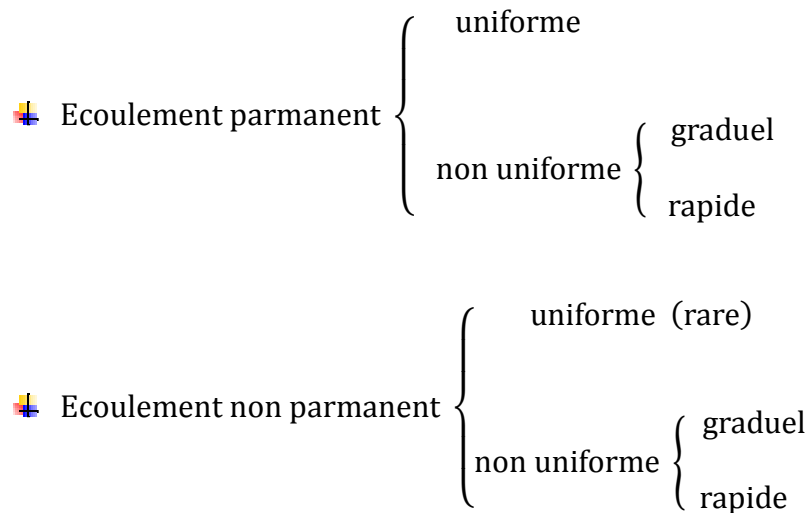


Figure IV.02 : Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés.

Lorsque le mouvement est rapidement varié, la profondeur, $D_h(x)$, ainsi que les autres paramètres changent brusquement, parfois avec des discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité, telle qu'un déversoir, un rétrécissement, un ressaut hydraulique ou une chute brusque.

Les types d'écoulement qu'on rencontre en hydraulique fluviale (Fig. IV.01 et IV.02) peuvent être résumés ainsi :



IV.3 Paramètres hydrauliques de la section transversale des canaux :

IV.3.1 Définition :

On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

IV.3.2 Type de canaux :

On distingue deux types de canaux : les canaux naturels et les canaux artificiels (Fig. IV.03).

✚ *Les canaux naturels*: sont les cours d'eau qui existent naturellement sur ou sous terre, tels que les ruisselets, torrents, rivières, fleuves et estuaires.

Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières.

✚ *Les canaux artificiels* : sont les cours d'eau réalisés par l'homme sur ou sous terre tels que : les canaux découverts construits au ras du sol (canaux de navigation, d'adduction et d'évacuation, d'irrigation et de drainage) ou les canaux couverts dans lesquels les liquides ne remplissent pas toute la section (tunnels hydrauliques, drains,.....).

Les propriétés hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières.

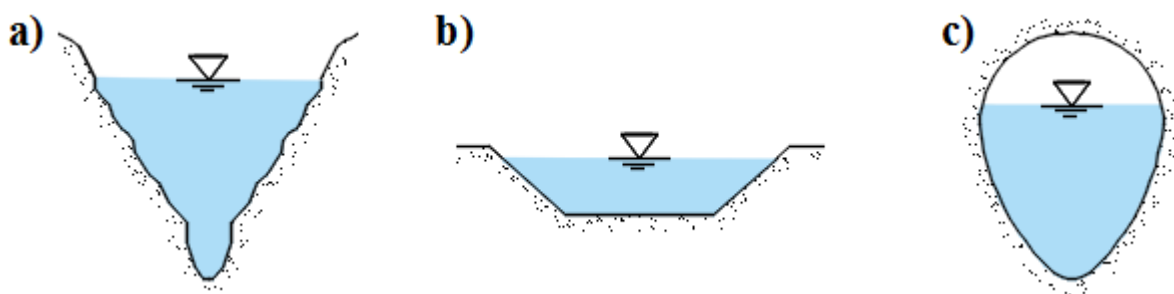


Figure IV.03 : Types de canaux : a) naturel ; b) et c) artificiels.

IV.3.3 Géométrie des canaux :

Dans ce chapitre nous allons définir les grandeurs géométriques les plus utilisées permettant de caractériser l'écoulement

- ✓ *La section transversale d'un canal* : est la section plane normale à la direction de l'écoulement.
- ✓ *La surface mouillée S* est la portion de la section occupée par le fluide dans la section du canal.

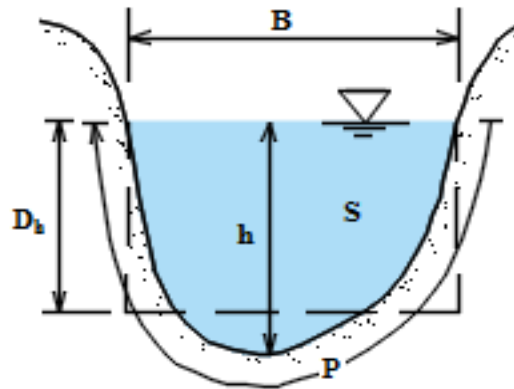


Figure IV.04 : Types de canaux.

- ✓ *Le périmètre mouillé P* : est formé par la longueur de la ligne de contact entre la surface mouillée et les parois de la section (la largeur de la surface libre n'entre pas en compte).
- ✓ *Le rayon hydraulique R_h* : est donné par :

$$R_h = \frac{S}{P} \quad (\text{IV.02})$$

- ✓ *La largeur superficielle ou largeur au miroir B* : est la largeur du canal au niveau de la surface libre :

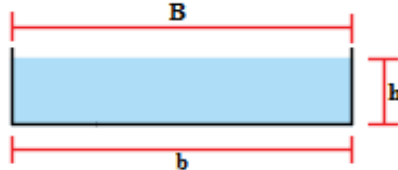
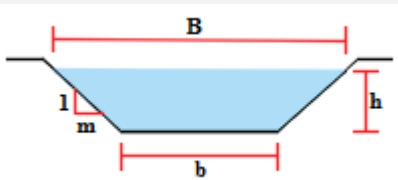
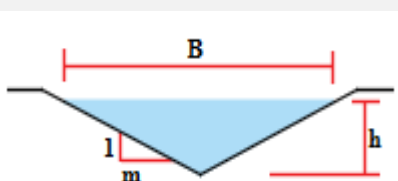
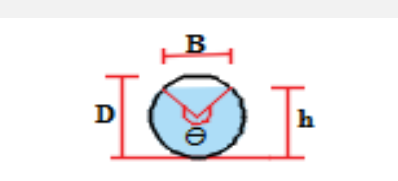
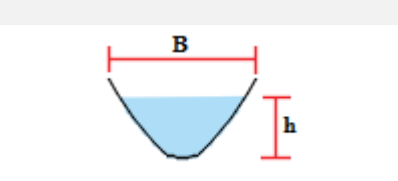
$$B = \frac{dS}{dh} \quad (\text{IV.03})$$

- ✓ *La profondeur hydraulique D_h* : est donnée par :

$$D_h = \frac{S}{B} \quad (\text{IV.04})$$

- ✓ On définit la pente d'un canal comme étant la tangente de l'angle d'inclinaison du lit par rapport à l'horizontale. Comme cet angle est généralement très petit (La pente J varie environ de quelque %).
- ✓ Un canal prismatique est un canal dont la pente et la rugosité est la géométrie de la section restent constantes dans la direction longitudinale du canal.

Tableau IV.01 : Éléments géométriques pour différentes section de canaux.

Géométrie	Périmètre mouillé P	Surface de la section S	Rayon Hydraulique R_h
 Rectangle	$b + 2h$	$b \cdot h$	$\frac{b \cdot h}{b + 2h}$
 Trapèze	$b + 2h \cdot \sqrt{1 + m^2}$	$(b + mh) \cdot h$	$\frac{(b + mh) \cdot h}{b + 2h \cdot \sqrt{1 + m^2}}$
 Triangle	$2h \cdot \sqrt{1 + m^2}$	$m \cdot h^2$	$\frac{m \cdot h}{2 \cdot \sqrt{1 + m^2}}$
 Cercle	$\frac{1}{2} \theta \cdot D$	$\frac{1}{8} (\theta - \sin \theta) D^2$	$\frac{1}{4} \left[1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right] \cdot D$
 Parabole	$B + \frac{8}{3} \cdot \frac{h^2}{B}$	$\frac{2}{3} B \cdot h$	$\frac{2B^2 \cdot h}{3B^2 + 8h^2}$

IV.4 Équation de base d'un écoulement à surface libre :

IV.4.1 Équation de continuité :

L'équation de continuité, qui est une des équations fondamentales de la mécanique des fluides, exprime le principe de conservation de la masse.

La variation de la masse fluide contenue dans un volume donné pendant un certain temps doit être égal à la somme des masses fluides qui y entrent, diminuées de celles qui en sortent.

Nous allons étudier l'écoulement non permanent, non uniforme et presque rectiligne d'un

fluide incompressible dans un canal à surface libre avec une faible pente de fond, entre deux sections proches (Fig. IV.05) ; Q sera le débit entrant.

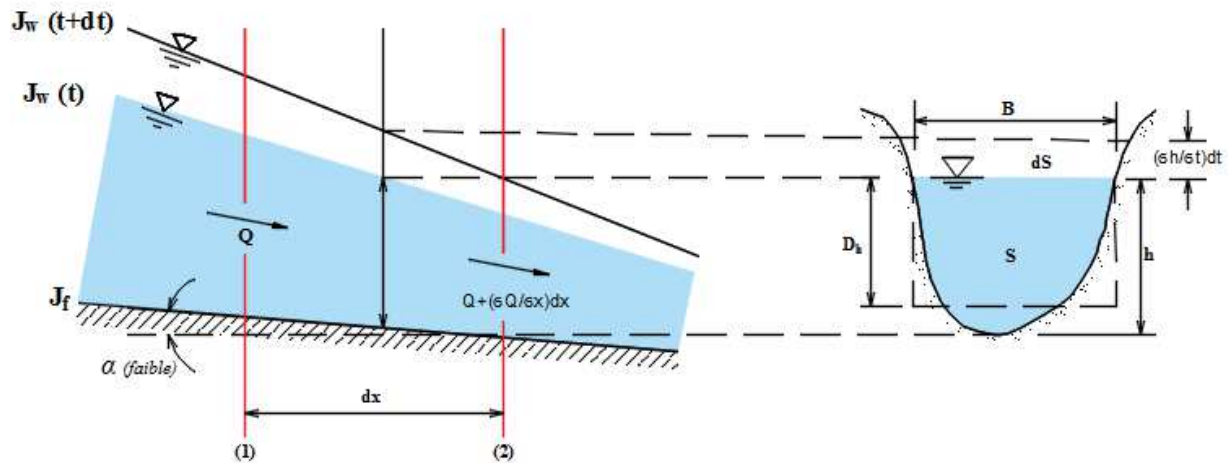


Figure IV.05 : Schéma pour l'équation de continuité.

Le volume entrant par la première section dans le temps dt est Qdt ; le volume sortant par la deuxième section, distante de dx de la première, est $[Q + (\partial Q/\partial x)dx]dt$. La variation de volume entre ces deux sections pendant le temps dt est donc :

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx dt \quad (\text{IV.05})$$

Cette variation de volume est le résultat d'une modification de la surface libre $\partial h/\partial t$ entre les deux sections pendant le temps dt , ce qui correspond à :

$$(Bdx) \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (\text{IV.06})$$

Où $B(h)$ est la largeur à la surface libre et $h(x,t)$ la profondeur d'eau.

Supposant le fluide incompressible est égalant ces deux expressions, on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV.07})$$

Où $dS = Bdh$

On peut écrire la relation suivante pour une section donnée :

$$Q = US \quad (\text{IV.08})$$

Où U est la vitesse moyenne dans la section S . l'équation IV.07 devient ainsi :

$$\frac{\partial(US)}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = S \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial S}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV.09})$$

Avec la profondeur hydraulique $D_h = S/B$, on peut aussi écrire :

$$D_h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial D_h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

Les équations ci-dessus représentent différentes formes de l'équation de continuité, valable pour les canaux prismatiques.

Pour le cas d'un canal rectangulaire, on écrit l'équation IV.06 ainsi :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Où $q = Q/B$ est le débit unitaire.

Si l'écoulement est permanent $\partial S / \partial t = 0$, l'équation de continuité, équation IV.09, se réduit à :

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Si un débit supplémentaire sort (ou entre) dans le canal entre les deux sections, il faut modifier l'équation IV.07 ainsi :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} \pm q_l = 0 \quad (\text{IV.13})$$

Où q_l est le débit supplémentaire par unité de longueur.

IV.4.2 Équation de l'énergie :

L'équation de l'énergie est une expression du premier principe de la thermodynamique. L'énergie pour un élément d'un fluide incompressible, écrite en quantités homogène à des longueurs (Fig. IV.06) ici en hauteurs de liquide de poids volumique $\gamma = \rho g$, dans un écoulement presque rectiligne, par rapport à un plan de référence (PdR) est donné par :

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z_p = \frac{P_t}{\gamma} = Cte \quad (\text{IV.14})$$

Les différents termes représentent :

- $\frac{u^2}{2g}$: la hauteur due à la vitesse.
- $\frac{p}{\gamma}$: la hauteur due à la pression.
- z_p : la cote.

- $\frac{P_t}{\gamma} = H$: l'énergie ou la charge totale.
- $\frac{P_t}{\gamma} + z_p = \frac{P^*}{\gamma}$: la hauteur piézométrique.

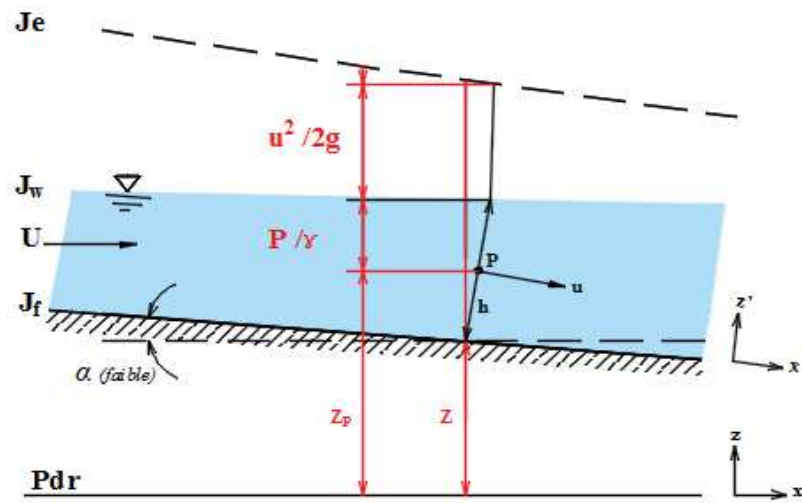


Figure IV.06 : Schéma pour l'équation de l'énergie dans une section.

On admet les hypothèses suivantes :

- La hauteur piézométrique (p^*/γ), est supposée constante à travers une normale au fond du canal, c-à-d. que la répartition de la pression est hypostatique.
- On considérant que z donne la cote du fond du canal, on définit la pente (faible) du canal J_f comme suit :

$$J_f = \tan \alpha = - \frac{dz}{dx} \approx \sin \alpha$$

- Si h est la profondeur d'eau, la hauteur due à la pression sur le fond du canal est :

$$\left(\frac{P}{\gamma}\right)_f = h \cos \alpha$$

Pour des pentes faibles, soit $\alpha < 6^\circ$ où $J_f < 0.1$, on prend $\cos \alpha \approx 1$. Le système des coordonnées xz est alors quasiment confondu avec le système de coordonnées $x'z'$ (Fig. IV.06)

- Dans un fluide parfait, chaque élément du fluide se déplace donc à la même vitesse, c.-à-d. la vitesse moyenne dans la section U .

En utilisant ces approximations raisonnables, l'énergie totale dans une section est donnée par :

$$\frac{U^2}{2g} + h + z = H \quad (\text{IV.15})$$

L'écoulement est considéré ici comme unidimensionnel et rectiligne. L'équation de l'énergie (équation IV.15) traduit le principe de l'énergie si le liquide est parfait. D'une section à l'autre, chacun des trois termes peut prendre une valeur différente ; la somme H reste cependant constante.

Pour l'écoulement à surface libre non permanent et non uniforme (graduellement varié) d'un liquide réel, la différence de la charge totale entre deux sections d'une distance dx (Fig. IV.07) est :

$$\begin{aligned} \alpha_e \frac{U^2}{2g} + h + z = & \left[\alpha_e \frac{U^2}{2g} + d \left(\alpha_e \frac{U^2}{2g} \right) \right] + [h + dh] + [z + dz] \\ & + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} dx + \frac{1}{g} \frac{\tau_0}{\rho} \frac{dP}{dS} dx \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Les différents termes représentent :

- $\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} dx$: le terme de l'énergie due à l'accélération dans la direction selon x .
- $\frac{1}{g} \frac{\tau_0}{\rho} \frac{dP}{dS} dx = h_r$: le terme de la perte de charge due au frottement.

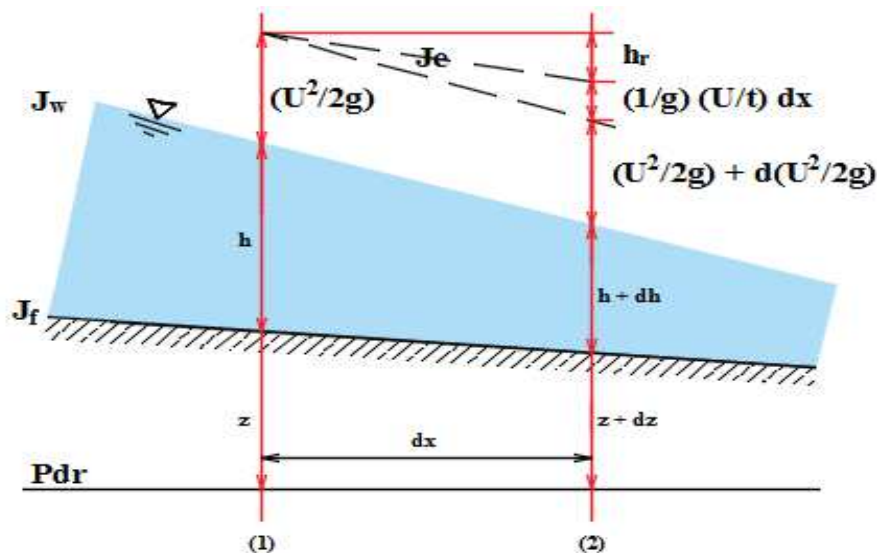


Figure IV.07 : Schéma pour l'équation de l'énergie entre deux sections.

Les forces dues au frottement font apparaître une dissipation de l'énergie totale en énergie thermique. dP est le périmètre de l'élément de surface dS et τ_0 est la tension due aux forces de frottement agissant sur la surface $dPdx$. Le terme intégral qui représente l'effet dû au frottement s'écrit couramment h_r .

Le coefficient de correction de l'énergie cinétique α_e est dû à la répartition non uniforme de la vitesse dans la section (Fig. IV.07). Les valeurs numériques pour un écoulement turbulent sont très proches de l'unité. Dans les cas usuels, la hauteur due à la vitesse est donc prise comme suit :

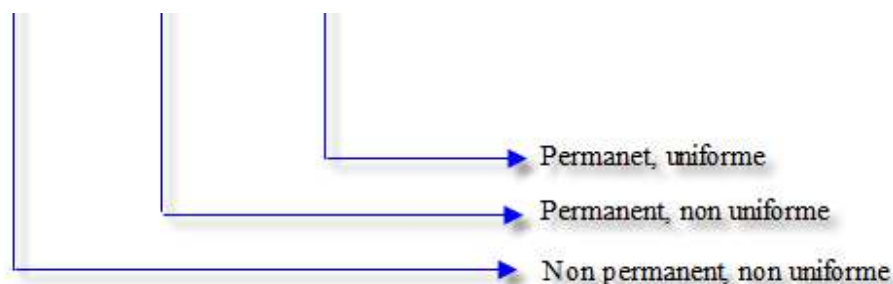
$$\alpha_e \frac{U^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} \quad (\text{IV.17})$$

Où U est la vitesse moyenne dans la section. L'équation de l'énergie (équation IV.16) s'écrit ainsi :

$$d \left(\frac{U^2}{2g} + h + z \right) = -h_r + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} dx \quad (\text{IV.18})$$

En la divisant par dx et en utilisant des différentielles partielles, on a :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} dx + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - J_f = -J_e \quad (\text{IV.19})$$



Où $h_r = J_e dx$ et $J_f = - (dz/dx)$; J_e est la pente énergétique.

L'équation IV.19 est l'équation dynamique pour un écoulement non permanent et non uniforme dans un canal découvert.

La perte de charge h_r doit être déterminée au moyen d'une formule du type Weisbach-Darcy, Chézy ou autre. Ces formules sont strictement valables pour l'écoulement permanent uniforme, mais il est en général admis qu'elles sont aussi valables pour l'écoulement non permanent ou non uniforme.

On appelle l'équation de continuité (équation IV.11) et l'équation dynamique du mouvement (équation IV.19), ensemble les équations de Barré de Saint-Venant. Bien que des simplifications aient faites pour obtenir les équations de Saint-Venant, les solutions en sont souvent extrêmement compliquées. Dans certains cas physiquement simples mais réalistes, des solutions explicites sont possibles.

Pour l'étude d'un écoulement permanent mais non uniforme, l'équation IV.19 devient :

$$\frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - J_f = -J_e \quad (\text{IV.20})$$

Pour l'étude d'un écoulement permanent et uniforme, l'équation IV.19 se traduit à :

$$J_f = J_e \quad (\text{IV.21})$$

La pente de fond J_f se confond avec la pente énergétique J_e mais aussi avec la pente piézométrique J_w . La vitesse moyenne U et la profondeur d'eau h sont constantes ; l'équation de continuité est donnée par l'équation IV.12.

L'équation dynamique du mouvement (équation IV.19) peut aussi être obtenue en utilisant le théorème de quantité de mouvement. On obtiendra pratiquement le même résultat, c.-à-d. l'équation IV.19.

IV.4.3 Conditions d'écoulement uniforme :

Dans le cas d'un écoulement en régime uniforme, il s'établit une pression constante, en général, celle atmosphérique. C'est pourquoi, pour ces courants la pente piézométrique égale à la pente de la surface et égale à la pente hydraulique (Fig. IV.08).

$$J_f = J_w = J_e \quad (\text{IV.22})$$

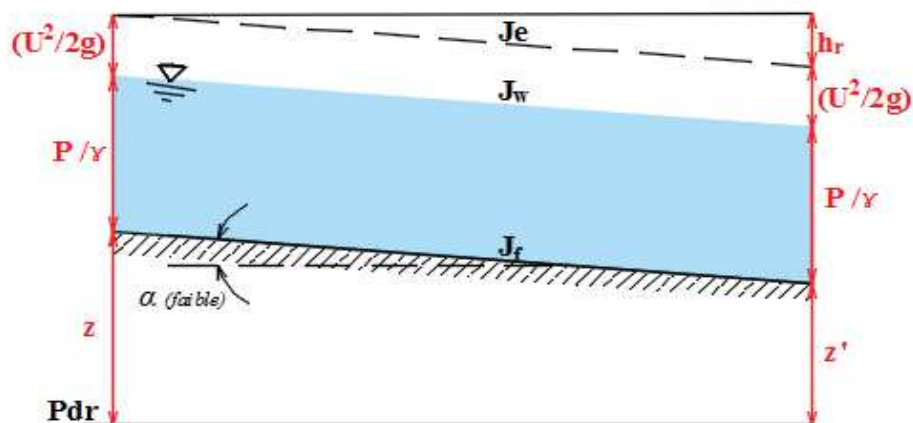


Figure IV.08 : Conditions d'écoulement uniforme.

Donc on peut dire qu'un écoulement uniforme est possible si les conditions suivantes sont assurées :

- Le débit du canal est constant ($Q = Cte$).
- Le canal est prismatique.
- La profondeur du courant h est constante en toute sa longueur.
- La pente du fond J_f est constante.
- La rugosité du fond et des parois du canal est constante en longueur ($n = Cte$).
- Les résistances locales sont absentes.

Il découle de ces conditions que l'écoulement uniforme doit remplir les égalités suivantes :

$$S = Cte ; P = Cte ; R_h = S/P = Cte ; J_w = J_f$$

Avec :

- S : La section transversale.
- P : Le périmètre mouillé.
- R_h : Le rayon hydraulique.
- J_w : La pente de la surface libre.
- J_f : La pente du fond du canal.

IV.4.4 Équation du régime uniforme :

IV.4.4.1 L'équation de Chézy :

La formule de calcul principale pour un écoulement uniforme de l'eau est la formule de Chézy :

$$U = C\sqrt{R J_f} \quad (IV.23)$$

Où :

- U : La vitesse d'écoulement.
- C : Coefficient de Chézy.
- R : Le rayon hydraulique.
- J_f : La pente du fond du canal.

En utilisant l'équation IV.08, on obtient :

$$Q = SC\sqrt{R J_f} \quad (IV.24)$$

Ce qui est l'équation de Chézy où le coefficient de Chézy égal à :

$$C = \sqrt{8g/\lambda} (L^{(-1/2)}/T) \quad (\text{IV.25})$$

Où :

- λ : Coefficient de frottement qui dépend de la rugosité du canal et du nombre de Reynolds de l'écoulement (d'une façon similaire au diagramme de Moody).

A partir de données expérimentales, Manning a développé une expression pour le coefficient de Chézy où le coefficient de frottement intervient sans dimension :

$$C = \frac{\alpha R^{(1/6)}}{n} \quad (\text{IV.26})$$

Où :

- n : La rugosité de la paroi de Manning et α est un coefficient d'unité qui vaut 1 en système international.

IV4.4.2 L'équation de Manning :

En remplaçant C dans la formule de Chézy (équation IV.23), on obtient la formule de Manning :

$$U = \frac{1}{n} R_H^{(2/3)} \sqrt{J_f} \quad (\text{IV.27})$$

En introduisant le débit $Q = S \cdot U$, on a :

$$Q = \frac{1}{n} S R_H^{(2/3)} \sqrt{J_f} \quad (\text{IV.28})$$

On trouvera des valeurs typiques du coefficient de Manning au tableau IV.02.

Tableau IV.02 : Quelques valeurs du coefficient de Manning.

Description	n
Parois très lisses : <ul style="list-style-type: none"> - Mortier de ciment et sable très lisses. - Planches rabotées, tôles métalliques sans soudures saillantes. - Mortier lissé. 	0,01 à 0,0111 0,0119
Parois lisses : <ul style="list-style-type: none"> - Planches avec des joints mal soignés, enduits ordinaires, grès. 	0,0125

- Béton lisse, canaux en béton avec des joints nombreux.	0,0134
- Maçonnerie ordinaire, terre exceptionnellement régulière.	0,0142
Parois rugueuses :	
- Terre irrégulière, béton rugueux ou vieux, maçonnerie vieille ou mal soignée.	0,0167
Parois très rugueuses :	
- Terre très irrégulière avec des herbes, rivières régulières en lit rocheux.	0,020
- Terre en mauvais état, rivières en lit de cailloux.	0,025
- Terre complètement à l'abandon, torrents transportant de gros blocs.	0,05 à 0,0667

IV.4.4.3 Autres formules d'écoulements :

Formule de Manning-Strickler :

$$U = K_s R_H^{(2/3)} \sqrt{J_f} \quad (\text{IV.29})$$

$$Q = K_s S R_H^{(2/3)} \sqrt{J_f} \quad (\text{IV.30})$$

$$K_s = 26 \left(\frac{1}{d_{65}} \right)^{(1/6)} \quad (\text{IV.31})$$

Où :

- d_{65} : Le diamètre en mètre correspondant à 65 % passant en poids.

Formule de Darcy-Weisbach :

Parfois, pour les conduites d'égout, on utilise cette forme de l'équation de Darcy-Weisbach :

$$U = \sqrt{\frac{8 g R_h J_f}{\lambda}} \quad (\text{IV.32})$$

IV.4.4.4 L'écoulement critique :

L'écoulement critique apparaît lorsque l'énergie spécifique de l'écoulement est minimale. L'énergie spécifique E est définie comme la somme de la hauteur d'écoulement et de la hauteur de l'énergie cinétique, soit :

$$E = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g S^2} \quad (\text{IV.33})$$

En observant la figure IV.09, on constate que l'énergie spécifique est minimale lorsque la hauteur d'écoulement est égale à h_c la hauteur critique. Cette valeur peut être obtenue par annulation de la dérivée de l'énergie spécifique par rapport à h .

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{g S^3} \frac{dS}{dh} \quad (\text{IV.34})$$

Sachant que :

$$dS = B(h)dh \quad (\text{IV.35})$$

L'équation IV.34 devient :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{S^3}{B} \quad (\text{IV.36})$$

Ou encore :

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{S}{2B} \quad (\text{IV.37})$$

En définissant la profondeur hydraulique D_h comme le rapport de l'aire de la section sur la largeur au miroir ($D_h = S/B$), on obtient :

$$\frac{U^2}{\sqrt{g D_h}} = 1 = F_r \quad (\text{IV.38})$$

Ce qui signifie bien, qu'un régime critique le nombre de Froude est égal à 1. Au-delà de cette valeur, l'écoulement est en régime torrentiel et en deçà, il est en régime fluvial (Fig. IV.09).

A partir du nombre de Froude on peut aussi déduire le type d'écoulement :

- ✓ Si $Fr < 1 \rightarrow$ l'écoulement est fluvial.
- ✓ Si $Fr = 1 \rightarrow$ l'écoulement est critique.
- ✓ Si $Fr > 1 \rightarrow$ l'écoulement est torrentiel.

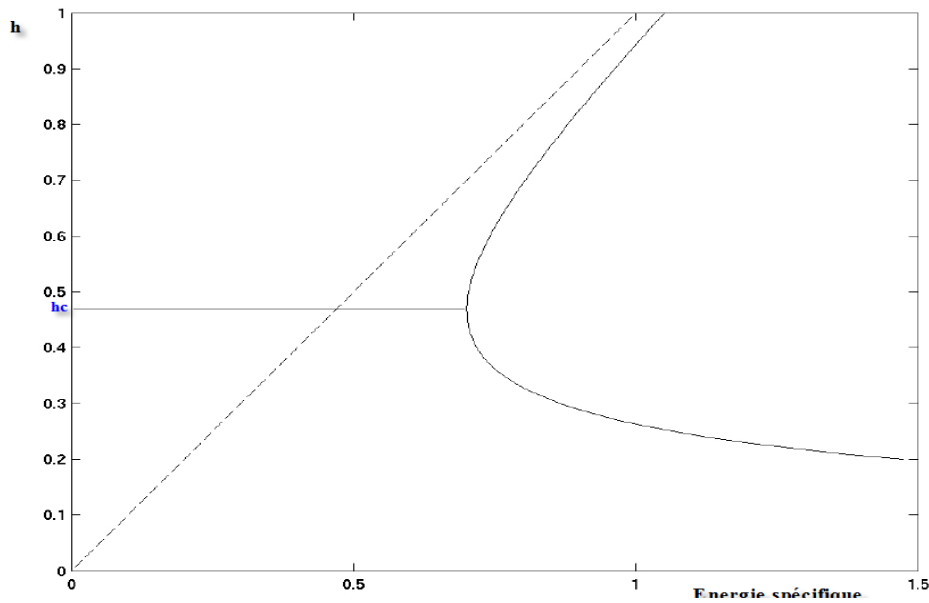


Figure IV.09 : Diagramme d'énergie spécifique.

IV.4.4.5 La hauteur critique :

Pour un débit, il existe, indépendamment de la pente du canal une hauteur critique h_c que l'on peut calculer à partir de l'équation IV.36 et IV.37. La difficulté de calcul dépend de l'expression de S . Pour un canal à section rectangulaire :

$$S = b h_c \quad \text{et} \quad B = b$$

D'où :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{b^3 h_c^3}{b} \quad \text{donc} \quad h_c = \left(\frac{Q^2}{g b^2} \right)^{(1/3)} \quad (\text{IV.39})$$

Dans le cas général, il faut résoudre l'équation : IV.36 et IV.37 pour h_c par une méthode itérative de type Newton-Raphson.

IV.4.4.6 La pente critique:

Une fois la profondeur critique déterminée, on peut aussi calculer la pente d'écoulement pour laquelle un débit donne coulera à la hauteur critique. Avec h_c on calcule S_c et R_c et l'on tire de l'équation de Manning la pente correspondante :

$$J_c = \frac{n^2 Q^2}{\alpha^2 S^2 R^{(4/3)}} \quad (\text{IV.40})$$

IV.4.4.7 Calcul de la hauteur normale:

Pour un débit donné et une pente de canal fixe, l'écoulement s'effectue avec une certaine hauteur d'eau. Cette hauteur d'eau est ce que l'on appelle la hauteur normale. En comparant cette hauteur d'eau avec la hauteur critique, qui n'est pas fonction de la pente du canal, on est en mesure de déterminer si l'écoulement est fluvial, critique ou torrentiel. Cette information sera très utile lorsque l'on voudra évaluer les écoulements variables.

Le principe de base du calcul de la hauteur normale consiste à résoudre une équation d'écoulement en termes de débit (Chézy, Manning ou autre) de telle sorte que seule la profondeur soit inconnue. Dans la suite de cette section, nous nous limiterons à l'équation de Manning.

L'équation d'écoulement n'étant pas linéaire ni quadratique, il n'est pas pratiquement possible de trouver une solution analytique. On a alors recours à une méthode itérative.

Plusieurs volumes d'hydraulique proposent une méthode par essais et erreurs. Bien que cette méthode soit utilisable pour faire une évaluation rapide, il est difficile de l'introduire dans un calcul systématique, surtout si l'on fait effectuer les calculs par un ordinateur.

○ Exemple 01 :

Un canal à section rectangulaire doit transporter un débit $Q=0.40\text{m}^3/\text{s}$ sans dépasser une profondeur $h=0.60\text{m}$. Le canal, dont le coefficient de Manning est $n=0.016$, est installé selon une pente $J_f=0.05\%$

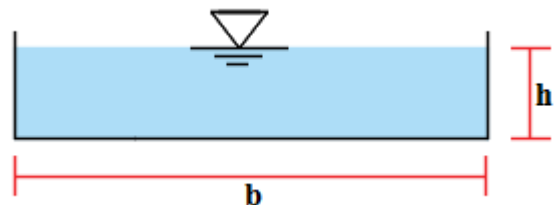


Figure IV.10 : Section de canaux –Rectangle–

Déterminer la largeur b du fond d'un canal.

○ Solution :

- La largeur b du fond d'un canal : $b = 1,1\text{m}$.

○ Exemple 02 :

Un canal ayant une section en forme de trapèze a une largeur au fond $b=5\text{m}$ et une pente longitudinale $J_f=0.2\%$. La pente des berges est $m=1$. Le coefficient de Manning est $n=0.02$. Calculer le débit Q d'écoulement si la profondeur d'eau ne doit pas dépasser $h=1\text{m}$.

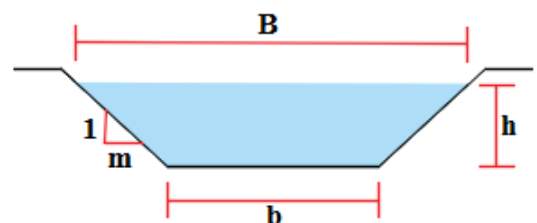


Figure IV.11: Section de canaux –Trapèze–

○ Solution :

- le débit d'écoulement : $Q = 11,23\text{m}^3/\text{s}$.

Références bibliographiques

1. Bennis, S., "Hydraulique et hydrologie", 2^{ème} Edition, Ecole de technologie supérieure, université de Québec, Montréal (Québec), Canada. 2004.
2. Carlier, M., " Hydraulique générale et appliquée ", Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Volume 14, 2^{ème} Edition, Eyrolles, Paris, France. 1980.
3. Ghernaout, R., " Mécanique des fluides et hydraulique ", 3^{ème} Edition OPU, Algérie. 2016.
4. Graf Walter, H., Altinakar, M., "Hydrodynamique une introduction", Volume 14, 2^{ème} Edition, Eyrolles, Paris, France. 1998.
5. Graf Walter, H., Altinakar, M., " Ecoulement permanent uniforme et non uniforme ", Volume 16, 1^{ère} Edition, Presse polytechnique universitaire romandes, Paris, France. 1993.
6. Kreime, N., Schthrenliht D., Alychey, Y., Yakovleva, L., "Hydraulique", 1^{ère} Edition, Traduction française édition MIR, Moscou. 1984.
7. Lencastre, A., "Hydraulique générale", Editions Eyrolles, Paris, France. 1996.
8. Zella, L., " Hydraulique générale - Hydrostatique et hydrodynamique ", 2^{ème} Edition OPU, Algérie. 2015.