

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ DE JIJEL**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT D'ENSEIGNEMENT FONDAMENTALES ET DE LA**  
**TECHNOLOGIE**



**POLYCOPIE DE COURS**

# **PHYSIQUE II**

## **Electricité et Magnétisme**

Par :

**Dr Nabil MAHAMDI OUA**

**Maître de conférences (MCB) à l'université de Jijel**

Ce cours est rédigé à l'intention des étudiants 1ère ANNEE SOCLE COMMUN Domaine Science et

Technologie - Année Universitaire 2016/2017

## Préface

Ce cours de physique 2 et dont l'intitulé est « Electricité et Magnétisme », a été rédigé à l'intention des étudiants de la première année socle commun, qui préparent une licence dans le domaine de « Sciences et Technologie ». Il a été rédigé conformément au programme officiel du même domaine de la matière Physique 2 du 2<sup>ème</sup> semestre, dans le cadre de la réforme L.M.D.

Deux grandes parties sont la constitution de ce cours : la première est l'électricité et la deuxième est le magnétisme.

L'électricité comporte deux grands axes : l'électrostatique et l'électrocinétique où on considère le mouvement des porteurs des charges comme critère pour leur distinction.

Dans l'électrostatique, donnée dans le chapitre I, on étudie les concepts, les phénomènes et les lois réservées à l'électricité des charges localement « immobiles ». C'est dans cette partie qu'on introduit les concepts fondamentaux de charge élémentaire et ponctuelle, du champ et potentiel électrostatiques et du flux du champ. Ces éléments de base nous aident à étudier les dipôles électriques et les conducteurs en équilibre électrostatique à travers l'utilisation du théorème de Gauss. A leur tour, ces derniers sont les prérequis pour l'étude de la pression électrostatique et des capacités des différents conducteurs et condensateurs.

Dans la partie d'électrocinétique, présentée dans le chapitre II, d'autres considérations sont prises en compte sur les conducteurs électriques afin de pouvoir saisir les différentes lois en question. A savoir : la loi d'Ohm, celle de Joule et son effet qui sont à la base, avec les lois de Kirchhoff, de l'étude des circuits électriques et par conséquent des réseaux électriques.

La partie électromagnétisme, introduite dans le chapitre 4, est plus ou moins indépendante des parties précédentes, vu la nature magnétique considérée. On s'est intéressé aux concepts de base et à l'introduction de la notion du champ magnétique, de la force de Lorentz et des lois régissant les différents phénomènes de ce domaine. La loi de Laplace, celles de Faraday et de Biot-Savart font l'ensemble des lois étudiées dans ce chapitre et c'est ce qu'il faut pour l'étude d'un dipôle magnétique.

## Chapitre I

### Rappels mathématiques

I-1	Champ scalaire et champ vectoriel	1
a.	Notion de Champ	1
i.	Champ scalaire	1
ii.	Champ vectoriel	2
I-2	Angle solide	2
I-3	Opérateurs	4
a.	Opérateur « Nabla »	4
b.	Opérateur gradient	4
c.	<b>Opérateur divergence</b>	5
d.	Opérateur rotationnel	5
e.	Opérateur Laplacien	6
f.	Théorème de Stockes et d'Ostrogradsky	6
I-4	Intégrales multiples (double et triple)	7

## Chapitre II

### Electrostatique et conducteurs

#### Partie 1 : Electrostatique

II-1-	Charges et champ électrostatique	9
II-1-1	Charge électrique et distribution de charges	9
a-	Charge électrique élémentaire	9
b-	Propriété de la charge électrique	9
c-	La charge ponctuelle	10
d-	L'électrisation	11
e-	Attraction et répulsion	13
f-	Distribution des charges	14
II-1-2	Champs électrostatique et La loi de Coulomb	15
a-	La loi de Coulomb	15
b-	Principe de superposition	17
c-	Limites de la loi de coulomb	17
d-	Champ électrostatique d'une charge ponctuelle q	18

e-	Ligne de force du champ électrostatique	19
i.	Définition	19
ii.	Cas d'une charge ponctuelle	19
iii.	Tube de champ	20
iv.	Equation de ligne du champ électrostatique	20
v.	Champ électrostatique de plusieurs charges	21
vi.	Champ électrostatique uniforme	21
vii.	Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges	21
•	Cas d'une distribution volumique	21
•	Cas d'une distribution de charge surfacique et linéique	22
f-	Circulation d'un champ de vecteurs	23
II-2	Potentiel électrostatique	24
•	Définition	24
•	Unité du potentiel	25
•	L'électronvolt	25
•	Relation entre potentiel électrique et champ électrique	26
•	Potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle	28
•	Potentiel électrostatique généré par n charges ponctuelles	28
•	Potentiel électrostatique généré par distribution continue en $P$	29
•	Surfaces équipotentielles	30
•	Energie potentielle d'un ensemble de charges ponctuelles dans un espace jussant d'un potentiel $V$	30
▪	Distribution volumique	32
▪	Distribution surfacique	32
▪	Distribution linéique	32
II-3	Dipôle électrique	32
○	Définition	32
○	Dipôle électrique idéal	32
○	Dipôle électrique induit	33
II-4	Flux du champ électrostatique	34
a.	Orientation d'une surface	34
○	Cas des surfaces fermées	34

○ Cas des surfaces curvilignes	35
○ Cas des surfaces planes	35
b. Flux d'un champ de vecteurs	35
c. Vecteur densité du flux d'un champ de vecteurs	36
II-5 Théorème de Gauss	37
a) L'énoncé du théorème et le cas d'une charge ponctuelle	37
b) Examen du cas d'une seule charge ponctuelle	38
c) Considérations sur le choix de la surface de Gauss pour application	38
d) Symétrie de distribution des charges	39
○ Symétrie sphérique	39
○ Symétrie cylindrique	40
e) Calcul du champ électrostatique : application du théorème de Gauss	41
○ Distribution à symétrie sphérique	41
○ Distribution à symétrie de rotation	43

## Partie 2 : Les conducteurs

II - 6 Conducteurs en équilibre électrostatique	45
a) Les conducteurs et les isolants	45
○ Relation « matière-charge »	45
○ Isolant électrique	45
○ Isolant électrique parfait	46
○ Conducteur électrique	46
○ Conducteur électrique parfait	46
b) Conducteurs en équilibre électrostatique	46
c) Conducteur en équilibre électrostatique et son champ électrique interne	47
• Cas d'un conducteur neutre	47
• Cas d'un conducteur chargé	47
• Cas d'un conducteur neutre avec cavité	49
d) Conducteurs en équilibre électrostatique sous un champ électrique	50
• Cas d'un conducteur neutre	50
• Cas d'un conducteur chargé	51
• Cas d'un conducteur chargé avec cavité : la cage de Faraday	51

e) Le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre- Théorème de Coulomb	53
II - 7 Pression électrostatique	54
a) Expression de la pression électrostatique	54
b) Démonstration	54
II – 8 Capacité d'un conducteur et d'un condensateur	56
a) Capacité d'un conducteur	56
b) Electrification d'un conducteur et capacité d'un condensateur	58
• Electrification d'un conducteur par influence	58
• Capacité d'un condensateur	59
c) Capacité d'un système condensateurs en série ou en parallèle	62
• Cas d'un système en série	62
• Cas d'un système en parallèle	63

## Chapitre III

### Electrocinétique

III-1 Conducteur électrique : autres considérations	64
III-2 Loi d'Ohm	65
a) Courant électrique	65
• Définitions	65
○ Courant de conduction	65
○ Courant de convection	66
• Sens conventionnel du courant électrique	66
• Intensité du courant électrique	66
• Courant électrique continue	66
• Courant électrique alternatif	67
• Unité de mesure	67
• Densité du courant	67
b) Chute de tension à travers un conducteur	68
c) Loi d'Ohm	68
• Relation : tension-courant électriques	68

• Résistance électrique	69
• Résistivité électrique	69
• Conductivité électrique	70
III- 3 Loi de Joule	70
a) Effet joule	70
b) La loi de joule	71
• La puissance électrique	71
• Chaleur de l'effet joule	71
III-4 Les circuits électriques	71
a) Force électromotrice	71
b) Définitions et éléments d'un circuit électrique simple	72
• Définition	72
• Éléments constitutants	72
c) Résistance électrique équivalente dans un circuit électrique	73
• Définition de la résistance équivalente	73
• Cas de résistances en parallèle	73
• Cas de résistances en série	74
III-5 Application de loi d'Ohm aux réseaux	75
• Calcul du courant, tension et résistance	75
• Pont diviseur de tension	76
III-6 Lois de Kirchhoff	76
a) La loi des nœuds	76
• Énoncé de la loi des nœuds par G. Kirchhoff	76
• Application	77
b) La loi des mailles	77
• Énoncé de la loi des mailles par G. Kirchhoff	77
• Application	78
III-7 Circuits équivalents	78
d) Théorème de Thévenin	78
• Enoncé	79
• Détermination de $R_{th}$ et $E_{th}$	79
• Application	80
e) Théorème de Northon	81
• Enoncé	81

• Détermination de $R_{th}$ et $E_{th}$ .....	81
f) Théorème de Kennelly .....	81
• Transformation $\Delta$ -Y .....	82
• Transformation Y- $\Delta$ .....	82

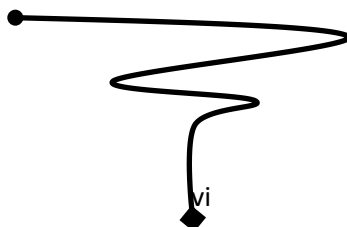
## Chapitre IV

### Electromagnétisme

#### Introduction

.....	83
-------	----

IV-1 Magnétisme et définition du champ magnétique .....	84
1. Le magnétisme .....	84
• Les aimants permanents .....	84
• Les aimants non permanents .....	85
• Les dipôles magnétiques .....	85
• Attraction et répulsion des aimants .....	86
• Origine du magnétisme .....	86
2. Définition du champ magnétique .....	87
• Définition .....	87
• Expression du champ magnétique $\vec{B}$ .....	87
(Force agissant sur une charge plongée dans un champ magnétique)	
• Unité du champ magnétique .....	88
• Principe de superposition .....	88
3. Comportement magnétique d'un matériau .....	88
• Diamagnétisme et matériau diamagnétique .....	88
• Paramagnétisme et matériau paramagnétique .....	89
• Ferromagnétisme et matériau ferromagnétique .....	90
VI – 2 L'électromagnétisme .....	91
1. Force de Lorentz .....	91
2. La loi de Laplace .....	91
3. Loi de Lenz-Faraday .....	92
4. Loi de Biot-Savart .....	93
5. Dipôle magnétique .....	94





## Liste des figures:

### Chapitre 1

Figure I.1 Champ de température sur la surface de la terre

Figure I.2 Distribution de la pression atmosphérique sur la région de l'Europe via les isobares

Figure I.3 Champ de vitesse de l'air autour d'une aile d'avion

Figure I.4 Angle solide

Figure I-5 Exemple d'un domaine d'intégration  $D$  de  $\mathbb{R}^2$

### Chapitre 2

Figure II-1 Flux d'échange de charges

Figure II-2 Constitution schématique d'un atome

Figure II-3: Electrification par frottement

Figure II-4 Electrification par influence

Figure II-5 Electrification par conduction

Figure II-6 Un morceau d'ambre

Figure II-7 Types des interactions entre différentes particules

Figure II-8 Définition plus précise de la distance inter-atomique  $r$

Figure II-9 La force appliquée sur une charge  $q^-$  ou  $q^+$  est égale à la somme de toutes les forces agissantes par les autres charges ((a)Positives ; (b) négatives ; (c)positives et négatives à la fois).

Figure II-10 Ligne du champ électrostatique

Figure II-11 ligne du champ électrostatique dans le cas d'une charge ponctuelle.

Figure II-12 Tube de champ électrostatique

Figure II-13 Champ électrostatique créé par deux plaques chargées

Figure II-14 Circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$

Figure II-15 Potentiel et champ électriques

Figure II-16 Définition de l'énergie potentiel d'un système ; cas de trois charges

Figure II-17 Dipôle idéal de vecteurs de distance  $\vec{L}$  et de moment dipolaire électrique  $\vec{p}$ .

Figure II-18 Dipôle induit

Figure II-19 Quelques exemples montrant le moment dipolaire électrique.

Figure II-20 Surface curviligne et orientation de  $\vec{S}$ ,  $d\vec{S}$  et  $\vec{n}$

Figure II-21 Surface plane et orientation de  $\vec{S}$  et  $\vec{n}$

Figure II-22 Orientation des différents vecteurs associés au flux de  $\vec{E}$  dû à  $q$  ponctuelle

Figure II-23 l'angle solide,  $dS$  et  $d\Omega$  (voir éq. I-39)

Figure II-24 Densité du flux de champ électrostatique

Figure II-25 Distribution de charge : cas de symétrie de rotation

Figure II-26 Trois cas de distributions sphériques de charges

Figure II-27 Champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre : a) neutre, b) chargé positivement, c) chargé négativement

Figure II-28 Direction du champ électrostatique juste à proximité de la surface d'un conducteur chargé positivement et en équilibre

Figure II-29 distribution équitable de la charge sur un conducteur sphérique.

Figure II-30 Conducteur avec cavité en équilibre électrostatique : (a) Cavité contient de la charge ; (b) cavité ne contient pas de charges

Figure II-31 Conducteur électriquement neutre sous un champ électrique : (a) à l'état transitoire et (b) à l'état d'équilibre

Figure II-32 Conducteur chargé négativement en équilibre et sous un champ extérieur  $\vec{E}_{ext}$  : (a) assez faible, (b) assez fort

Figure II-33 Cage de Faraday : (a) cas d'un conducteur neutre avec cavité ; (b) cas d'un conducteur chargé avec cavité.

Figure II-34 Conducteur en équilibre électrostatique et agrandissement d'échelle pour l'application du théorème de Gauss.

Figure II-35 Conducteur en équilibre électrostatique et agrandissement d'échelle pour le calcul de la force  $\vec{F}$  subit par  $dq$  en  $ds$ .

Figure II-36 Conducteur chargé par  $Q_0$  à  $V_0$

Figure II-37 : Sphère conductrice en équilibre

Figure II-38 Influence partielle,  $C_1$  chargé positivement,  $C_2$  neutre : a)  $C_2$  reste neutre avec une répartition non homogène ; b) mise à la terre et  $C_2$  n'est plus neutre ; c) isolation de  $C_2$  chargé

Figure II-39 Electrification pas influence totale: toutes les lignes du champ partant du conducteur

Figure II-40 Capacité d'un condensateur

Figure II-41 Condensateur plan

Figure II-42 Condensateur cylindrique

Figure II-43 Condensateur Sphérique

Figure II-44 Système de condensateurs en série

Figure II-45 Système de condensateurs en parallèle

## Chapitre 3

Figure III-1 Répartition des charges dans un conducteur: (a) en équilibre; (b) sous champ électrostatique (le conducteur est séparé des plaques chargées)

Figure III-2 : Passage en permanence des charges de la plaque positive à la plaque négative.

Figure III-3 : Relation entre la densité du courant  $\vec{j}$  et vecteur unitaire  $\vec{n}$

Figure III-4 : Dimension d'un conducteur pour exprimer la résistivité

Figure III-5 Transformation d'énergie par effet joule

Figure III-6 : Force électromotrice

Figure III-8 : Exemple d'un circuit électrique comportant : 6 branches, 3 mailles et 4 nœuds

Figure III-9: Représentation de la mise à la terre

Figure III-10 : Circuit électrique à deux bornes : (a) les résistances sont en parallèle ; (b) résistance équivalente.

Figure III-11 : Résistance en série et résistance équivalente.

Figure III-12 application de loi d'Ohm, l'inconnu pour : la tension  $U$  , (b) le courant et (c) la résistance

Figure III-13 : Pont de diviseur de tension

Figure III-14 Schématisation d'un nœud : (a) cas de trois courants arrivants ; (b) cas plus général.

Figure III-15 Circuits pour application de la loi des mailles : (a) circuit à une maille ; (b) circuit contenant trois mailles.

Figure III-16 Circuits pour application de la loi des mailles : (a) circuit à une maille ; (b) circuit contenant trois mailles.

*Figure III-17 : Equivalence circuit complexe-circuit de Thévenin*

*Figure III-18 : (a) Circuit équivalent de Thévenin ; (b) Calcul de  $E_{Th}$  ; (c) Calcul de  $R_{Th}$ .*

*Figure III-19 : Equivalence circuit complexe-circuit de Norton*

*Figure III-20 : Transformation de Kennelly*

## **Chapitre 4**

*Figure IV – 1 La magnétite –  $Fe_2O_3$*

*Figure IV-2 Aimants artificiels*

*Figure IV-3 En subdivisant les aimants, les nouveaux petits aimants gardent toujours la polarité : Nord-Sud*

*Figure IV-4 Répulsion et attraction entre aimants*

*Figure IV-5 Effet du champ magnétique externe sur un matériau paramagnétique*

*Figure IV-6 Domaines magnétiques sous l'action d'un champ magnétique faible puis fort dans un matériau ferromagnétique*

*Figure IV-7 Force de Lorentz subie par une charge positive*

*Figure IV-8 Configuration des sens de la force, du champ et du courant électrique figurant dans la loi de Laplace*

*Figure IV-9 Schéma du dispositif de l'expérience qui a conduit Faraday à établir sa loi.*

*Figure IV-10 Champ magnétique élémentaire créé par le passage d'un courant dans un fil, donné par la loi de Biot-Savart.*

*Figure IV-11 : Dipôle magnétique et champ magnétique dipolaire*

# **Chapitre I**

## **Rappels mathématiques**

Dans ce chapitre ...

I-5 Champ scalaire et champ vectoriel

- b. Notion de Champ
  - i. Champ scalaire
  - ii. Champ vectoriel

I-6 Angle solide

I-7 Opérateurs

- a. Opérateur « Nabla »
- b. Opérateur gradient
- c. **Opérateur divergence**
- d. Opérateur rotationnel
- e. Opérateur Laplacien
- f. Théorème de Stokes et d'Ostrogradsky

I-8 Intégrales multiples

## I-9 Champ scalaire et champ vectoriel

### c. Notion de Champ

#### Définition :

En physique, un champ est l'ensemble des valeurs d'une grandeur physique qui peuvent être attribuées aux points de l'espace à l'instant  $t$ . Il peut être scalaire ou vectoriel. A chaque point de l'espace est associée une seule valeur de cette grandeur.

#### i. Champ scalaire

##### Définition :

Un champ scalaire est un champ dont la valeur attribuée à chaque point de l'espace est associée à une grandeur physique indépendante de la direction. Analytiquement, elle est représentée par une fonction scalaire. Dans le cas général cette fonction est à plusieurs variables, telle que :  $f(x,y,z)$ . Schématiquement, elle est représentée par un dégradé de couleurs, où on représente par le rouge les valeurs les plus élevées et par le bleu les valeurs les plus basses (Ex : champ de température). Elle peut être aussi schématisée par des lignes des valeurs constantes de la grandeur (ex : champ de pression).

##### Exemple :

##### Champ de température :

La figure I-1 représente un champ de température sur la surface de la terre entre -25 et 45 °C. La représentation du champ ici est basée sur les couleurs.

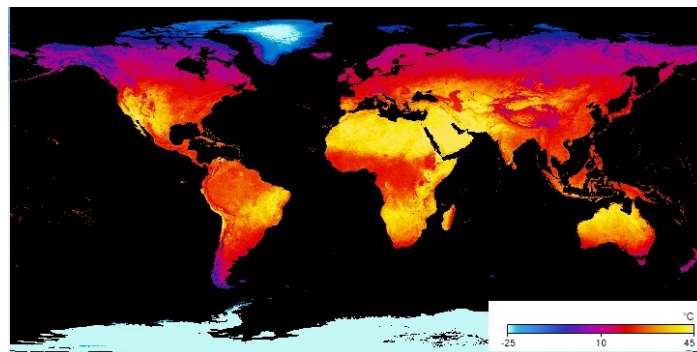


Figure I.1 Champ de température sur la surface de la terre

##### Champ de pression atmosphérique

La figure I-2 montre une distribution de la pression atmosphérique sur la région de l'Europe. Les lignes continues sont des lignes de pression constante (isobares) de la météo. Les chiffres sur chaque ligne indiquent la hauteur, par rapport à la surface de la mer, sur laquelle l'isobare est considérée.

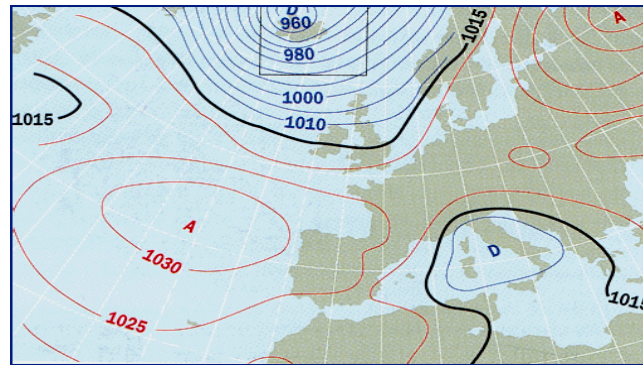


Figure I.2 Distribution de la pression atmosphérique sur la région de l'Europe via les isobares

(<http://eduscol.education.fr/obter/applied/circula/theme/images/pression.gif>)

## ii. Champ vectoriel

### Définition :

Un champ vectoriel est un champ dont la valeur attribuée à chaque point de l'espace est associée à une grandeur physique, pour laquelle la direction est une propriété fondamentale. Analytiquement, elle est représentée par une fonction vectorielle. Dans le cas général cette fonction est à plusieurs variables, telle que  $\vec{F}(x, y, z)$ . Schématiquement, elle est représentée par de petits vecteurs aux points juxtaposés de l'espace.

### Exemple :

La figure I.3 montre le champ de vitesse de l'air autour d'une aile d'avion, il est représenté avec des petites flèches plus ou moins longues, proportionnelles à la vitesse et orientées dans le sens de l'écoulement (ici dans le référentiel du sol)

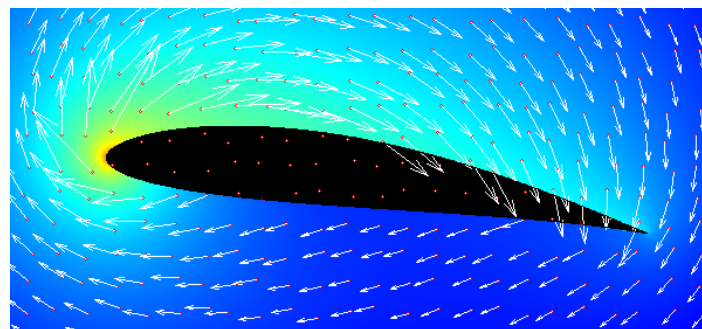


Figure I.3 Champ de vecteur vitesse de l'air autour d'une aile d'avion

([https://sciencetonnante.files.wordpress.com/2014/03/champ\\_vitesse.png](https://sciencetonnante.files.wordpress.com/2014/03/champ_vitesse.png))

## I-10 Angle solide

### Définition :

L'angle solide est l'extension naturelle du sens de l'angle plan. Si ce dernier est défini par la longueur de l'arc du cercle limité par deux demi droites, l'angle solide est défini, dans

l'espace, comme l'angle sous lequel on voit une surface  $S$  distante de  $r$  d'un point d'observation  $O$  ( voir figure I-4).

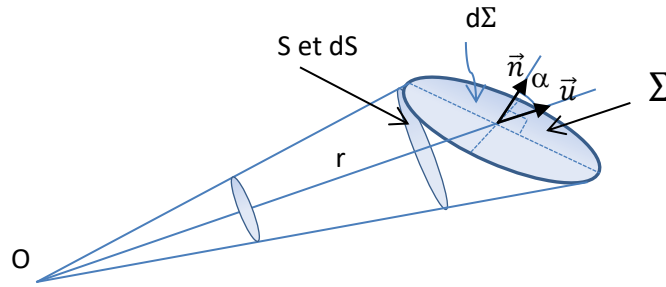


Figure I-4 Angle solide

$\vec{n}$  et  $\vec{u}$  deux vecteurs unitaires,  $\vec{dS}$  vecteur de surface élémentaire :  $\vec{dS} = ds \vec{n}$

Mesure de l'angle solide :

L'angle solide est notée généralement par  $\Omega$ . Sa mesure est donnée comme suit:

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

L'angle solide élémentaire est donné par :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

et si la surface est inclinée comme le montre la figure I-4, alors :

$$d\Omega = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos(\theta)}{r^2}$$

$\vec{dS}$  est une surface élémentaire orientée de la surface  $\Sigma$

Et une surface étendue est donc vue d'un point  $O$  par l'intégration de l'angle solide élémentaire:

$$\Omega = \iint d\Omega$$

L'unité de l'angle solide est le stéradian. Il est noté : sr

Depuis un point  $O$  (le centre d'une sphère de rayon  $r$ ), on peut « voir » toute la surface de celle-ci sous un angle solide  $\Omega = \frac{4\pi \cdot r^2}{r^2} = 4\pi$  (sr). Pour voir tout l'espace, on aura besoin donc d'un angle solide de  $4\pi$  steradians.

## I-11 Opérateurs

### a. Opérateur « Nabla »

Le Nabla est défini en :



- En coordonnées cartésiennes par :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$
- En coordonnées cylindriques par :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$
- En coordonnées sphériques par :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{U}_\varphi$

## b. Opérateur gradient

Le gradient d'une fonction  $f(x, y, z)$  est une fonction vectorielle de  $x, y$  et  $z$  qui donne sa variation par rapport à ces variables. Il est noté par :  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  et est donné, en coordonnées cartésiennes, par l'expression :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{k}$$

En physique,  $f(x, y, z)$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z)$  sont deux grandeurs (ou champs): scalaire et vectorielle respectivement. A titre d'exemple la fonction  $f(x, y, z)$  peut-être la distribution de la température :

$$f(x, y, z) = T(x, y, z)$$

En utilisant l'opérateur Nabla l'expression du gradient est :  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \vec{\nabla} f$

### Quelques propriétés :

Le gradient d'une fonction à plusieurs variables :

- Est orienté dans le sens des valeurs croissantes de la fonction ;
- Indique la direction de variation la plus rapide de la fonction ;
- Indépendant du repère choisit.

### Expression du gradient dans le :

- Système de coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial r} \vec{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial z} \vec{k}$$

$r, \theta$  et  $z$  sont les coordonnées cylindriques ;

$\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$  et  $\vec{k}$  : Vecteurs unitaires du système de coordonnées cylindriques.

- Système de coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \vec{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{U}_\varphi$$

$\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$  et  $\vec{U}_\varphi$  : Vecteurs unitaires du système de coordonnées sphériques.

### c. Opérateur divergence

Soit une grandeur vectorielle dépendant de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , notée  $\vec{A}(x, y, z)$ .

Alors,  $\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$

Dorénavant, on écrit :  $\vec{A}(x, y, z) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$  sachant qu'implicitement  $A_x, A_y$  et  $A_z$  sont des fonctions de  $x, y$  et  $z$ .

On appelle divergence du vecteur  $\vec{A}(x, y, z)$  le scalaire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

On note :  $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

L'opérateur  $\text{div}\vec{A}$  est défini en :

- Coordonnées cylindrique par :  $\frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- Coordonnées sphériques par :  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$

### d. Opérateur rotationnel

Soit un champ de vecteurs  $\vec{A}(x, y, z) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ . On appelle rotationnel du vecteur  $\vec{A}$  le produit vectoriel :

$$\vec{\text{Rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \gg$$

- Le rotationnel est indépendant du choix du système de coordonnées.
- La condition nécessaire est suffisante pour qu'un champ de vecteur  $\vec{A}$  dérive d'un potentiel scalaire  $U(x, y, z)$ , est que son rotationnel soit nul.

$$\vec{\text{Rot}}\vec{A} = \vec{\text{Rot}}(-\vec{\text{grad}}U) = \vec{\nabla} \wedge (-\vec{\nabla}U) = \vec{0}$$

Le rotationnel est défini :

- En coordonnées cylindriques par :

$$\overrightarrow{Rot\vec{A}} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{U}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{U}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{k}$$

En coordonnées sphériques par :

$$\overrightarrow{Rot\vec{A}} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_\varphi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{U}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right) \vec{U}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{U}_\varphi$$

## e. Opérateur Laplacien

### ▪ Laplacien d'un vecteur

On appelle Laplacien d'un vecteur  $\vec{A}$  le vecteur :

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k}$$

Avec  $\Delta$  est un nouvel opérateur défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\Delta = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- En coordonnées cylindriques :
- En coordonnées sphériques :

### ▪ Laplacien d'un scalaire $\Delta U$

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{grad} U) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} U = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} U) = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

- En coordonnées cylindriques :  $\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$
- En coordonnées sphériques :  $\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta})$

## f. Théorème de Stokes et d'Ostrogradsky

On considère un volume  $V$  délimité par une surface fermée  $S$  et un champ de vecteur arbitraire  $\vec{A}$  de composantes à dérivées continues. Le théorème d'Ostrogradsky se résume en :

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A} dV$$

## I-12 Intégrales multiples

Si l'intégral simple s'applique lorsque les fonctions à intégrer sont des fonctions à une seule variable, les intégrales multiples s'appliquent lorsque les fonctions en question sont de plusieurs variables.

### a. Intégrales double et triple

L'intégrale double de la fonction  $f(x,y)$  sur un domaine  $D$  est noté :  $\iint_D f(x,y) dx dy$

L'intégrale triple de la fonction  $f(x,y,z)$  sur un domaine  $D$  est noté :  $\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$

#### Propriété de linéarité :

- $\iint_D C \cdot f(x,y) dx dy = C \cdot \iint_D f(x,y) dx dy$  ;
- $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)] dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy + \iint_D g(x,y) dx dy$
- Si  $D = D_1 + D_2$  :  $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy$

Ces propriétés sont aussi valables pour l'intégrale triple.

#### Calculs des intégrales doubles et triples par réduction à l'intégrale simple :

##### Cas de l'intégrales double :

On se base dans cette section sur des exemples pour rappeler le lecteur comment réduire à l'intégrale simple des intégrales doubles et triples. Pour plus d'information, le lecteur peut se référer aux hypothèses du critère de Lebesgue et à l'énoncé du théorème de Fubini, sur lesquels se base l'exemple suivant.

Soit un domaine simple  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  délimité par les courbes  $C_1$  et  $C_2$  (définis par deux fonctions  $g(x)$  et  $h(x)$ ) et par les verticales  $C_4$  et  $C_2$  donnés sur la figure I.5.

L'intégrale d'une fonction continue  $f(x,y)$  sur ce domaine est :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

**Application :** Calculer l'intégrale d'une fonction

$f(x,y) = \frac{1}{2}x + y$  ; sachant que le domaine d'intégration  $D$  est défini par :

$$\frac{1}{2}x \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 0.5.$$

$$\text{Solution : } \iint f(x,y) dx dy = \int_0^{0.5} \left( \int_{\frac{1}{2}x}^1 \left( \frac{1}{2}x + y \right) dy \right) dx = \int_0^{0.5} \left[ \frac{1}{2}x \cdot y + \frac{1}{2}y^2 \right]_{\frac{1}{2}x}^1 dx =$$

$$\int_0^{0.5} \left( \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2}x \cdot \left( \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}x \right)^2 \right) \right) dx = \int_0^{0.5} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \right) dx =$$

$$\int_0^{0.5} \left( -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \Big|_0^{0.5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{19}{64}$$

##### Cas de l'intégrale triple :

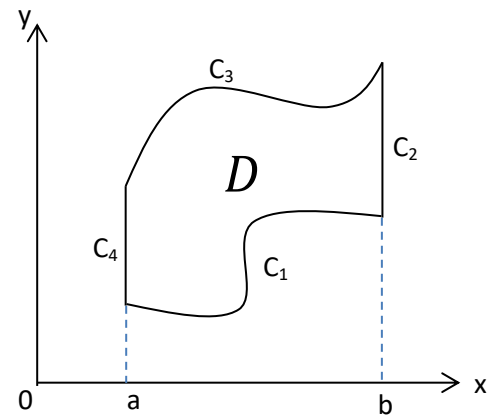


Figure I-5 Exemple d'un domaine d'intégration  $D$  de  $\mathbb{R}^2$

Soit un domaine simple  $T$  de  $R^3$  défini par :

$$a(x, y) < z < b(x, y); g(x) < y < h(x); a < x < b$$

L'intégrale d'une fonction continue  $f(x, y)$  sur ce domaine est :

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} \left( \int_{a(x, y)}^{b(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

**Exemple :**

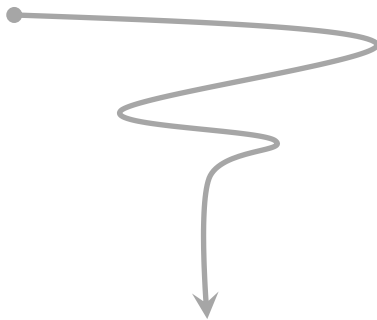
Calculer l'intégrale triple  $I$  de la fonction  $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$  dans un volume  $V$  délimité par les plans :  $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} y = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$  ;  $\begin{cases} z = 0 \\ z = 1 - x - y \end{cases}$

**Solution :**

Alors le volume est délimité en haut par  $z = 1 - x - y$  et en bas par  $z = 0$ , sachant que sa projection  $D$  sur le plan  $(XOY)$  est le triangle délimité par les droites  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $y = 1 - x$  (c.-à-d. :  $z=0$ )

Donc :

$$I = \iint_D \left( \int_0^{1-x-y} x \cdot y \cdot z \, dz \right) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} x \cdot y \cdot z \, dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{720}$$



# **Chapitre II**

## **Electrostatique et conducteurs**

**Dans ce chapitre ...****Partie 1 : Electrostatique****II-1- Charges et champ électrostatique****II-1-1 Charge électrique et distribution de charges**

- g- Charge électrique élémentaire
- h- Propriété de la charge électrique
- i- La charge ponctuelle
- j- L'électrisation
- k- Attraction et répulsion
- l- Distribution des charges

**II-1-2 Champs électrostatique et La loi de Coulomb**

- g- La loi de Coulomb
- h- Principe de superposition
- i- Limites de la loi de coulomb
- j- Champ électrostatique d'une charge ponctuelle  $q$
- k- Ligne de force du champ électrostatique
  - i. Définition
  - ii. Cas d'une charge ponctuelle
  - iii. Tube de champ
  - iv. Equation de ligne du champ électrostatique
  - v. Champ électrostatique de plusieurs charges
  - vi. Champ électrostatique uniforme
  - vii. Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges
    - Cas d'une distribution volumique
    - Cas d'une distribution de charge surfacique et linéique
- l- Circulation d'un champ de vecteurs

**II-2 Potentiel électrostatique**

- Définition
- Unité du potentiel
- L'électronvolt
- Relation entre potentiel électrique et champ électrique
- Potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle
- Potentiel électrostatique généré par  $n$  charges ponctuelles
- Potentiel électrostatique généré par distribution continue en  $P$
- Surfaces équipotentielles
- Energie potentielle d'un ensemble de charges ponctuelles dans un espace jouissant d'un potentiel  $V$ 
  - Distribution volumique

- Distribution surfacique
- Distribution linéique

### II-3 Dipôle électrique

- Définition
- Dipôle électrique idéal
- Dipôle électrique induit

### II-4 Flux du champ électrostatique

- d. Orientation d'une surface
  - Cas des surfaces fermées
  - Cas des surfaces curvilignes
  - Cas des surfaces planes
- e. Flux d'un champ de vecteurs
- f. Vecteur densité du flux d'un champ de vecteurs

### II-5 Théorème de Gauss

- f) L'énoncé du théorème et le cas d'une charge ponctuelle
- g) Examenation du cas d'une seule charge ponctuelle
- h) Considérations sur le choix de la surface de Gauss pour application
- i) Symétrie de distribution des charges
  - Symétrie sphérique
  - Symétrie sphérique
- j) Calcul du champ électrostatique : application du théorème de Gauss
  - Distribution à symétrie sphérique
  - Distribution à symétrie de rotation

## Partie 2 : Les conducteurs

### II - 6 Conducteurs en équilibre électrostatique

- f) Les conducteurs et les isolants
  - Relation « matière-charge »
  - Isolant électrique
  - Isolant électrique parfait
  - Conducteur électrique
  - Conducteur électrique parfait
- g) Conducteurs en équilibre électrostatique
- h) Conducteur en équilibre électrostatique et son champ électrique interne
  - Cas d'un conducteur neutre
  - Cas d'un conducteur chargé
  - Cas d'un conducteur neutre avec cavité
- i) Conducteurs en équilibre électrostatique sous un champ électrique
  - Cas d'un conducteur neutre
  - Cas d'un conducteur chargé



- Cas d'un conducteur chargé avec cavité : la cage de Faraday

j) Le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre-  
Théorème de Coulomb

## II - 7 Pression électrostatique

- c) Expression de la pression électrostatique
- d) Démonstration

## II – 8 Capacité d'un conducteur et d'un condensateur

- d) Capacité d'un conducteur
- e) Electrification d'un conducteur et capacité d'un condensateur
  - Electrification d'un conducteur par influence
  - Capacité d'un condensateur
- f) Capacité d'un système condensateurs en série ou en parallèle
  - Cas d'un système en série
  - Cas d'un système en parallèle

## Partie 1 : Electrostatique

### II-Charges et champ électrostatique

#### II-1-1 Charge électrique et distribution de charges

La charge électrique (notée  $q$ ) est une grandeur caractéristique de certaines particules. C'est une propriété fondamentale de la matière constituée par ces particules. Elle leur permet de s'interagir mutuellement à distance, en produisant et en subissant des forces dites électriques (notée).

##### a- Charge électrique élémentaire

La plus petite quantité de charge que l'on puisse isoler est appelée la charge élémentaire. Les expériences les plus récentes et les plus fines n'ont pas pu isoler une charge élémentaire qui ne représente pas un système de charges plus fondamentales. Le proton par exemple, qui est une charge élémentaire, est constitué de 3 particules chargées dit quarks.




Dans le système international d'unités (SI), la charge électrique est exprimée en coulomb (noté C). La charge élémentaire, et qui correspond à la charge du proton, vaut :

$$q_{proton} = e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C} \dots\dots\dots (\text{eq.I-1})$$

##### b- Propriété de la charge électrique

• **Charge et masse** : Toute charge n'existe que sur une particule chargée qui possède une masse non nulle.

• **Charge positive et charge négative** : L'expérience montre qu'il y a deux types de charges électriques dites charge positive et charge négative. L'électron a une charge négative qui vaut la charge  $e$  en valeur absolue. Il est à noter que le choix positif et négatif, pour le proton et l'électron respectivement, est purement conventionnel. Le neutron est une particule non chargée. Elle est donc électriquement neutre. Dans ce cours nous représentons les différentes particules et corps chargés ou neutres par :

Proton de charge $q = e$	(Charge positive) .....	
Electron de charge $q = -e$	(charge négative).....	
Neutron de charge $q = 0$	(neutre).....	

- **La charge électrique est une grandeur extensive :** Cela veut dire que la charge totale d'un corps constitué de  $n$  charges élémentaires est la somme de ces charges constituant.

$$Q_{\text{Totale}} = \sum_i^n q_i \dots\dots\dots (\text{eq.I-2})$$

- **Conservation de la charge électrique :** c'est un principe dont le sens est que la charge ne s'annihile pas et ne se crée pas. Elle est donc constante dans un système isolé. Dans un système qui échange des charges avec le milieu extérieur on a (voir figure II-1):

Bilan d'échange de charge s'exprime comme suit :

*Flux globale de charge échangée = flux de charge entrant- flux de charge sortant.*

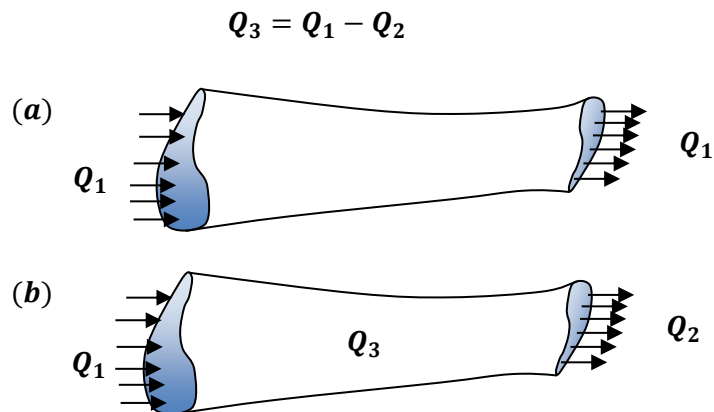


Figure II-1 : Flux d'échange de charges

**Quantification de la charge (principe de la quantification de la charge):** la charge électrique d'un système ne peut exister que sous forme de multiples entiers de la charge élémentaire  $e$  définie au-dessus. Elle ne peut varier alors que par ces multiples et par conséquent les flux d'échange définie dans la section précédente ne seront que par les multiples en question.

**La charge d'un système, peut s'exprimer donc par :**

$$Q = Z \cdot e ; \quad \text{avec } Z : \text{Nombre entier} \dots\dots\dots (\text{eq.I-3})$$

La charge élémentaire  $e$  est appelée aussi le **quanta** de la charge électrique.

- **Invariance de la charge :** En changeant de référentiel galiléen, la charge est invariante.

### c- La charge ponctuelle

C'est une charge accumulée dans un volume  $V$ , dont les dimensions sont très petits devant les dimensions considérés dans l'étude. Les charges élémentaires sont considérées des charges ponctuelles dans toute étude où les distances caractéristiques sont de l'ordre du pico-mètre ou supérieur ( $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$ ). C'est le cas des électrons, des protons, des noyaux dans des études à l'échelle atomique.

Ce n'est pas le cas dans les études subatomiques (l'ordre du femto-mètre,  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ), où on ne peut pas considérer les protons comme des charges ponctuelles. On en parlera avec les conséquences plus tard.

La considération d'une charge ou d'un ensemble de charge, en tant que charge ponctuelle ou pas, dépend directement de la comparaison entre les dimensions géométriques de ces charges.

### d- L'électrisation

- **Atome et électron :**

Les études de structure de la matière montrent qu'elle est constituée des systèmes élémentaires qu'on les appelle atomes. Un atome est constitué d'un noyau entouré d'un nombre d'électrons et qui « tournent » dans des couches bien déterminées. La figure II-2 montre un schéma explicatif. Ce noyau est aussi constitué par le même nombre que celui des électrons, mais des neutrons chargés positivement. *Seuls les électrons de la couche la plus extérieurs qui participe aux phénomènes d'électrisation* (expliqué ci-dessous).

L'atome, bien évidemment, est un système électriquement neutre. En perdant un électron, il devient un cation qui est ion positif et en capturant un électron, il devient un anion qui est un ion négatif.

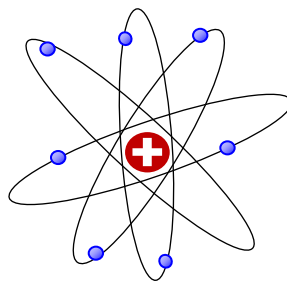
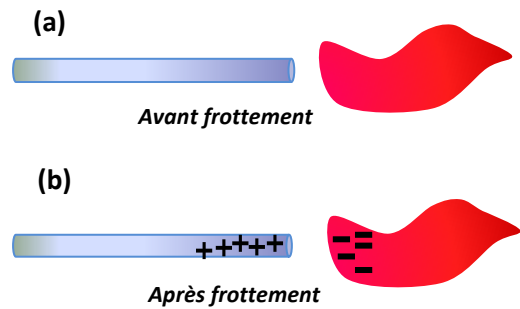


Figure II-2 Constitution schématique d'un atome

- **Electrisation par frottement :**

Considérons deux matériaux neutres : une tige en verre et morceau de soie comme il est montré sur la figure II-3 :



Avant frottement les deux matériaux sont neutres. Un simple frottement de la tige de verre avec la soie entraîne un arrachement des électrons de leurs atomes accompagné d'un transfert de ces électrons vers le morceau de soie. La tige devient chargée positivement et la soie négativement. Les deux corps sont dits électrisés ou chargés d'électricité.

Figure II-3: Electrisation par frottement

On appelle ce phénomène l'électrisation par frottement.

- **Electrisation par influence :**

Considérons la configuration présentée sur la figure II-4.

La boule chargée positivement influence sur les électrons libres dans la tige conductrice (voir section ----). Elle les attire vers elle et « repousse » les charges positives vers l'autre côté. En fait, les charges positives ne se sont pas repoussées mais la migration des électrons, sous l'influence de la charge de la boule, laisse les atomes perdant des charges négatives comme des ions positifs.

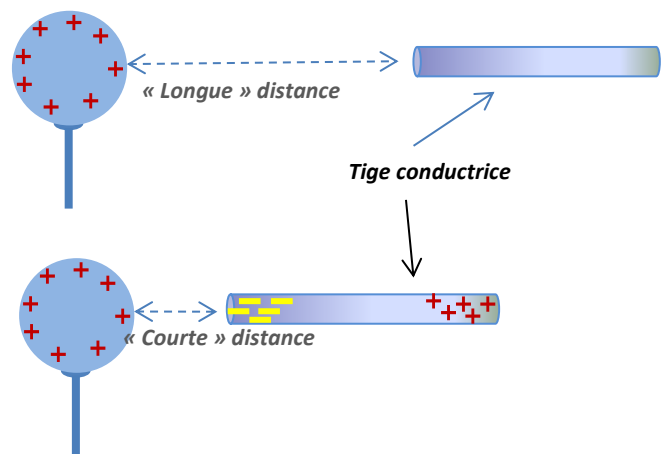


Figure II-4 Electrisation par influence

On appelle ce phénomène l'électrisation par influence.

- **Electrisation par conduction :**

Si maintenant on relie entre la boule chargée positivement et la tige électriquement neutre par un fil métallique (voir figure II-5), on constate alors que la tige se trouve électrisée positivement et que l'électrisation de la boule a diminuée par une charge égale à celle de la tige. La charge électrique a été transmise par le fil métallique. On dit que le fil est un conducteur électrique et que la tige est électrisée par conduction (un conducteur est un matériau où la charge circule facilement (§ sec. Du chapitre II)).

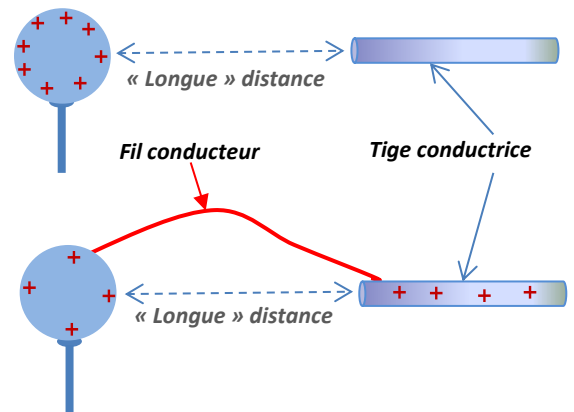


Figure II-5: Electrisation par conduction

On appelle ce phénomène l'électrisation par conduction.

### e- Attraction et répulsion

Les premières remarques de l'attraction électrique remonte à environ 600 av. J.-C.. Ce sont les remarques du philosophe grec Tales de Milet à l'attraction de certaines plumes vers un morceau d'ambre (fig. II-6). La figure II-7 explique le comportement électrique des différents éléments constituant de l'atome.



Figure II-6 : Un morceau d'ambre

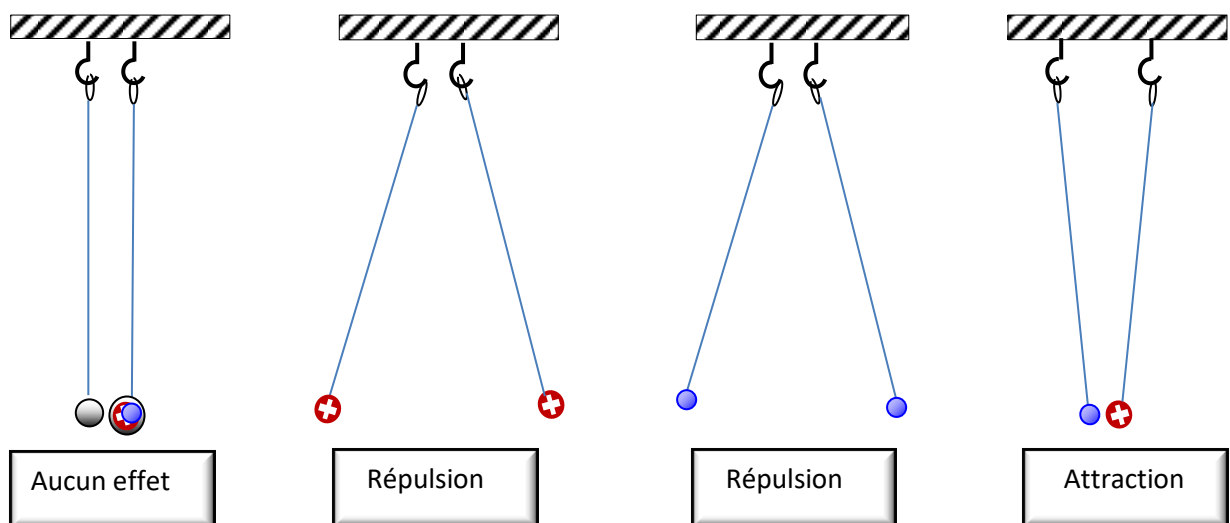


Figure II-7 : Types des interactions entre différentes particules ; : signifie l'un des charges positive ou négative

**f- Distribution des charges :**

- **Notion de microscopie et distribution discontinue**

La microscopie dans ce contexte signifie l'échelle atomique, c.-à-d. aux environ de  $10^{-10}m$ . A cette échelle, les charges sont portées par des particules constituant de l'atome, comme nous l'avons signalé au-dessus : les protons et les électrons. Bien évidemment, ces particules sont séparées les uns des autres, et par conséquent leurs charges. De même, les protons sont accumulés dans noyaux à une échelle qui ne dépasse pas le femtomètre. Ils sont bien séparés à leur échelle. Cette séparation entraîne une notion de discontinuité de distribution de la charge à l'échelle microscopique et même « femtoscopique ».

- **Macroscopie et distribution continue de la charge**

Dans la section précédente, nous avons montré que la distribution des charges est discontinue à l'échelle microscopique. Cependant et en grandissant l'échelle de l'observation, on constate que la charge est quasiment distribuée d'une manière continue, à une approximation suffisante. En effet, si les distances inter-charges sont négligeables devant les distances de l'observation, on peut considérer que la distribution des charges est continue à l'échelle macroscopique. Cela ressemble à une distribution des spectateurs dans les tribunes d'un stade ou la distribution des arbres dans une forêt étalée sur une large surface. En s'éloignant sur un hélicoptère, on constate au fur et mesure que les distance d'observation dominant les distances inter-arbres ou inter-spectateurs, que la distribution devienne de plus en plus continue. Une telle distribution continue, entraîne la notion de la densité pour caractériser la distribution de la charge.

- **Distribution de charge et sa densité**

La densité de charge donne la quantité de charge par unité de mesure. Cette dernière dépend directement de la manière par laquelle la charge est distribuée. Une distribution sur un fil amène à une densité linéique, une distribution sur une surface amène à une densité surfacique et une distribution volumique amène à une densité de charge volumique.

▪ **Densité linéique** : c'est le cas d'une distribution de charges sur un fil, rectiligne ou curviligne, et la densité est dite linéique. Elle notée généralement par  $\lambda$ . Sa dimension est :  $C.L^{-1}$ . Son unité est Coulomb/mètre (C/m) et elle donnée par l'équation :

$$q = \lambda \cdot l \quad \text{ou} \quad dq = \lambda \cdot dl \quad \dots\dots\dots (\text{eq.I-4})$$

où  $l$  est la distance sur laquelle est distribuée la charge  $q$

▪ **Densité surfacique** : c'est le cas d'une distribution de charges sur une surface, rectiligne ou curviligne. La densité de charge est dite surfacique. Elle notée généralement par  $\sigma$ . Sa dimension est :  $C \cdot L^{-2}$ . Son unité est Coulomb/mètre ( $C/m^2$ ) et elle donnée par l'équation I-5:

$$q = \sigma \cdot S \quad \text{ou} \quad dq = \sigma \cdot ds \quad \dots\dots\dots (\text{eq.I-5})$$

où  $S$  est la surface sur laquelle est distribuée la charge  $q$

▪ **Densité volumique** : c'est le cas d'une distribution de charges sur un volume, comme dans le cas d'une solution ionique. La densité est dite Volumique. Elle notée généralement par  $\rho$ . Sa dimension est :  $C \cdot L^{-3}$ . Son unité est Coulomb/mètre ( $C/m^3$ ) et elle donnée par l'équation I-6:

$$q = \rho \cdot V \quad \text{ou} \quad dq = \rho \cdot dV \quad \dots\dots\dots (\text{eq.I-6})$$

où  $V$  est le volume dans lequel est distribuée la charge  $q$

Remarque :

*Dans les équations I-4,5 et 6 les éléments de longueur, de surface et de volume doivent être, d'une part suffisamment petit pour pouvoir les considérés des charges ponctuelles et ainsi on appliquer les lois concernant les charges ponctuelles, et d'autre part suffisamment grand afin de pouvoir contenir un très grand nombre de particules élémentaire chargés de telle sorte qu'on puisse considérer la distribution continue.*

## II-1-2 Champs électrostatique et La loi de Coulomb

L'électrostatique est la partie de l'électricité où on étudie l'interaction électrique entre des charges au repos ou, au plus, se déplacent lentement dans un référentiel d'inertie galiléen, lié à l'observateur. Le sens du repos et de déplacement long ici ne considère pas, bien évidemment, les charges élémentaires, mais les charges ponctuelles caractérisées dans le cas des distributions continues par leur longueur, surface ou volume élémentaire.



### m- La loi de Coulomb

« L'interaction électrique entre deux particules chargées est proportionnelle au carré de leur distance, sa direction se trouvant le long de la droite joignant les deux charges. »

Cette loi a été formulée pour la première fois par le Français Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806).

L'expression mathématique de la loi de Coulomb est donnée par l'équation I-7

$$\vec{F}_{q/q'} = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \vec{U}_r \dots\dots\dots (\text{eq. I-7})$$

Avec :

$\vec{F}_{q/q'}$  : La force électrique agissant par la charge  $q$  sur la charge  $q'$ .

$r$  : La distance entre les deux charges  $q$  et  $q'$ .

$\vec{U}_r$  : Vecteur unitaire porté sur la droite définie par les positions de  $q$  et  $q'$ , et dirigé de la charge agissante  $q$  à la charge obéissante  $q'$ .

$K$  : Constante de proportionnalité.

Suite à ces définitions on aura :

$$\vec{F}_{q/q'} = -\vec{F}_{q'/q}$$

Différentes configurations peuvent exister donc selon le signe des charges  $q$  et  $q'$ . La figure 1-5bis explique ces configurations.

Dans le système international et si l'interaction s'effectue dans le vide, la constante de proportionnalité  $K$ , dite *constante de Coulomb*, est donnée par l'expression :

$$K = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} = 8,987\,551\,787\,368\,176\,4 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \dots\dots\dots (\text{eq. I-8})$$

Avec  $\epsilon_0$  : la permittivité électrique du vide.

Elle vaut dans le système international :

$$\epsilon_0 \approx 8,854\,187\,82 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$$

Si l'interaction s'effectue dans un milieu non conducteur et de permittivité électrique constante  $\epsilon$ , tel que l'air ou un liquide diélectrique, la constante  $K$  est donnée par :

$$K = \frac{1}{4 \pi \epsilon} \dots\dots\dots (\text{eq. I-9})$$

et la loi de coulomb devient:

$$\vec{F}_{q/q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \vec{U}_r \dots\dots\dots(\text{eq. I-10})$$

Remarque: la loi de Coulomb est conçu pour s'appliquer à des objet sphérique. Le rayon  $r$  est la distance entre les deux centres des deux spheres comme le montre la figure II-8.

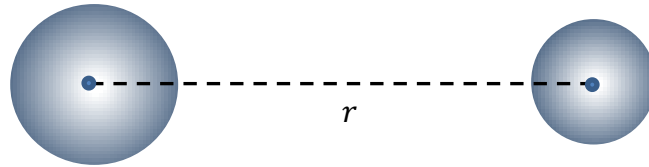


Figure II-8 Definition plus precise de la distance inter-atomique  $r$

### n- Principe de superposition

Considérons les configurations présentées sur la figure II-9. On dispose alors de trois configurations de plusieurs charges ponctuelles qui agissent sur une seule charge ponctuelle  $q^-$  ou  $q^+$ . Quel que soit la nature de toutes ces charges, la force totale agissant sur l'une de ces charges égales la somme de toutes les forces induit les charges en question, une par une comme si les autres n'existent pas.

$$\vec{F} = \sum_i^n \vec{F}_i \dots\dots\dots(\text{eq. I-11})$$

$n$  : le nombre de charges outre que la charge agissante.

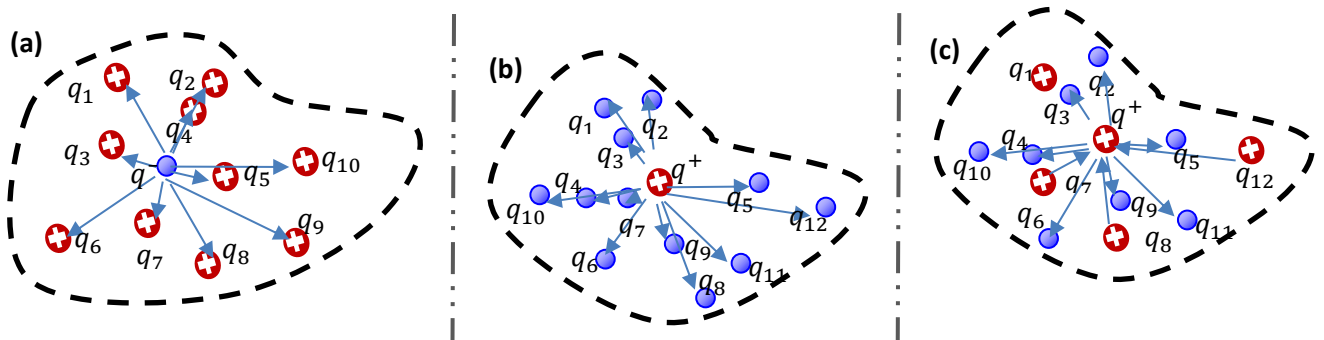


Figure II-9 La force appliquée sur une charge  $q^-$  ou  $q^+$  est égale à la somme de toutes les forces agissantes par les autres charges ((a)Positives ; (b)négatives ; (c)positives et négatives à la fois).

### o- Limites de la loi de coulomb

Selon les travaux de Coulomb, sa loi s'applique à des corps sous forme de petites boules qui sont loin d'être « ponctuelles ». De légitimes questions peuvent être posées : Il y a-t-il des limites, d'application de cette loi, liées aux dimensions considérées dans l'étude ?

Cette loi s'applique-t-elle à l'échelle atomique, entre les électrons et les noyaux ? et si elle ne s'applique pas, c'est à cause des conditions d'application qui ne se vérifient pas ou par principe ?

Différentes expériences dans le domaine de l'électrostatique, notamment celles effectuées en se basant sur la mécanique ondulatoire, montrent que la loi de Coulomb s'applique entre les électrons ou entre les électrons et les noyaux dans les atomes. Cependant les expériences de déviation des particules  $\alpha$  par les noyaux montrent que la loi de Coulomb n'est plus valable pour les distances de l'ordre de  $10^{-14}$  et  $10^{-15}$  m. Des expériences plus récentes confirment que le domaine d'application s'étend de l'atome à l'univers.

De ce qui précède, on dit que la loi de Coulomb ne s'applique pas dans le domaine subatomique à cause de l'impossibilité de considérer les particules comme des charges ponctuelles. Cela ne veut pas dire qu'elle n'est plus valable dans son principe.

### **p- Champ électrostatique d'une charge ponctuelle q**

L'introduction d'une charge électrique dans un espace induit une modification de ses propriétés physiques. Cette modification permet à cet espace d'agir « électriquement » par une force sur n'importe quelle charge y entre. La région où règne cette interaction est le champ où règne l'effet de la présence de la charge en question. On appelle cet effet le champ électrique.

De ce qui précède, le champ électrique caractérise l'effet de la présence d'une charge dans un espace géométrique. Il est donc une grandeur physique. Puisque son interaction se manifeste d'une force sur une charge, qui est une grandeur physique scalaire, on peut déduire que le champ électrique est une grandeur vectorielle. Ainsi et plus précisément on l'appelle : le vecteur du champ électrique. S'il est créé par une charge ponctuelle et statique on l'appelle encore vecteur du champ électrostatique. Il est donc stationnaire et il est donné par l'expression :

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{U}_r \quad \dots\dots\dots(\text{eq. I-12})$$

Prenons l'éq. (I-11), on en déduit :

$$\vec{F}_{q/q'} = q' \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{U}_r \right) = q' \cdot \vec{E} \quad \dots\dots\dots(\text{eq. I-13})$$

### **Remarques**

- 1) Le champ électrique est une grandeur physique qui règne dans un espace. On peut le mesurer dans tout point de cet espace.
- 2) Le champ électrique permet une analyse de l'interaction électrique à distance, entre les particules chargées.
- 3) Le concept de charge ponctuelle limite les dimensions de la charge, cela induit une limitation de la définition du champ électrique en point. En effet,  $\vec{E}_q$  n'est pas défini lorsque  $r$  tend vers zéro.
- 4) La force agissant sur une charge négative est opposée au vecteur champ électrostatique

### q- Ligne de force du champ électrostatique

#### i. Définition :

La ligne de force du champ électrostatique est une courbe orientée de l'espace sur laquelle le vecteur de ce champ est tangent en tout point. L'orientation de cette courbe est dans le même sens que celui du champ. La figure II-10 montre la ligne de champ et l'orientation de ce dernier en tout point de la ligne.



Figure II-10 Ligne de champ électrostatique

#### ii. Cas d'une charge ponctuelle

Partons de l'éq. (I-12), on peut établir la configuration ci-contre (figure II-11). les lignes du champ sont des droites centrées, issues de la charge et se perdent à l'infini. Les lignes dues à une charge positives sont orientées vers l'extérieur et celles dues à une charge négative sont orientées vers la charge. La direction du champ électrique précise l'orientation des courbes. On peut rajouter aussi que dans l'espace, il y a une infinité de ligne du champ. Il passe par chaque point de l'espace une seule ligne. On dit qu'une

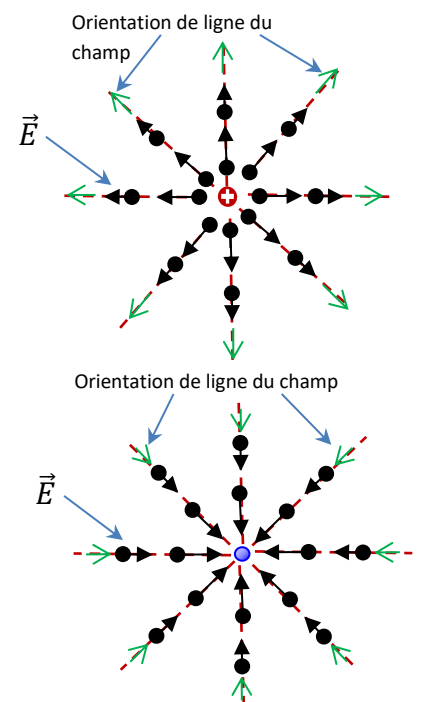


Figure II-11 Ligne du champ électrostatique dans le cas d'une charge ponctuelle.

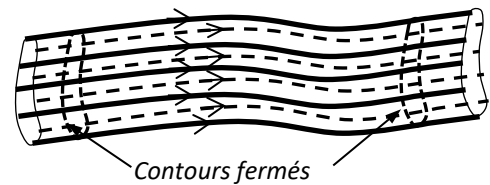
telle configuration de distribution du champ et de ses lignes a une symétrie radiale.

On peut constater aisément que la visualisation de quelques lignes du champ permet de connaître la répartition du champ électrostatique sur l'ensemble de l'espace.

En un point où se rencontrent deux lignes de champ,  $\vec{E}$  est soit nul soit indéfini. Cela revient au fait qu'il doit être tangent à deux lignes différentes.

### iii. Tube de champ

Considérons la configuration présentée sur la figure II-12. L'ensemble des lignes du champ qui s'appuient sur un contour fermé est appelé tube du champ. Il représente un élément important en la



matière de topographie du champ lui-même, notamment lors de l'étude des flux de charges dans l'électrocinétique.

Figure II-12 Tube de champ électrostatique

### iv. Equation de ligne du champ électrostatique

Le champ électrostatique est tangent à la ligne du champ en un point quelconque de cette ligne. Il suffit donc de poser la condition :

$$\vec{E} // \vec{dl}$$

Cela conduit à l'établissement de l'équation de la ligne du champ:

$$\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0} \quad \dots \dots \dots (eq. I - 14)$$

#### Exemple :

Trouver les lignes de champ électrostatique créée par une charge ponctuelle positive  $q$  placée à l'origine (O).

#### Solution :

Suite à la répartition radiale des lignes du champ présenté sur la figure (I-9), la distribution du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle positive à une symétrie sphérique. Il est donc plus convenable de choisir le système de coordonnées sphérique.

$$\text{Alors : } \vec{dl} = dr \vec{U}_r + r d\theta \vec{U}_\theta + r \sin\varphi \vec{U}_\varphi$$

Et 
$$\vec{E}_q = K \cdot \frac{q}{r^2} \vec{U}_r$$

$$\vec{E} \wedge d\vec{l} = K \frac{q}{r^2} r d\theta \vec{U}_\varphi - k \frac{q}{r^2} r \sin(\theta) d\varphi \vec{U}_\theta = \vec{0}$$

Donc :  $K \frac{q}{r^2} r d\theta = 0$  et  $k \frac{q}{r^2} r \sin(\theta) d\varphi = 0$

$\Rightarrow [d\theta = 0 \text{ donc } \theta = \text{Cst} \text{ et } d\varphi = 0 \text{ donc } \varphi = \text{Cst}]$

Ainsi les lignes sont des droites qui forment un faisceau de sommet.

## v. Champ électrostatique de plusieurs charges

Considérons maintenant une distribution discrète de  $n$  charges  $q_i$ . Le champ résultant  $\vec{E}_{tot}$ , en un point  $P$ , est additif suite au principe de superposition. Il est donc donné par :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \vec{E}_q = \sum_i^n (K \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{U}_{r_i}) \dots \dots \dots (eq. I - 15)$$

Avec :  $q_i$  est la charge qui crée  $\vec{E}_i$  et  $r_i$  la distance entre  $q_i$  et  $P$

## vi. Champ électrostatique uniforme

### Définition :

On dit qu'un champ électrique est uniforme s'il possède une même grandeur et même direction dans tout point de l'espace étudié.

### Exemple :

Le champ électrique créé par deux plaques parallèles chargées uniformément est un champ uniforme dirigé de la plaque chargée positivement à celle chargée négativement (voir fig. II-13)

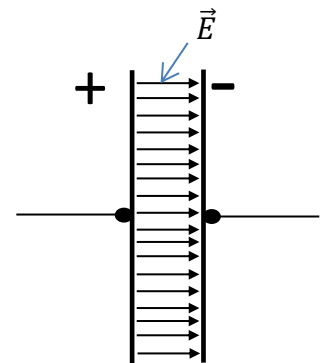


Figure II-13 Champ électrostatique créé par deux plaques chargées

## vii. Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

### • Cas d'une distribution volumique

Considérons une distribution volumique continue de charges dans un volume  $V$  et cherchons le champ électrostatique créé par cette charge. Une telle distribution est défini par sa densité volumique  $\rho$ .

Prenons d'abord une charge ponctuelle  $dq$  située au sein d'un volume infinitésimal  $dV$  de en un « point »  $P$  du volume  $V$  suffisamment éloigné de  $M$  là où on veut étudier le champ électrostatique  $d\vec{E}$ .

La charge  $dq$  est donnée donc par :

$$dq = \rho(P) \cdot dV$$

Et le champ créé par  $dq$  et donné par :

$$d\vec{E} = k \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{U}_r = k \cdot \frac{\rho(P) \cdot dV}{r^2} \vec{U}_r \quad \dots \dots \dots (eq.I - 14)$$

$$\text{Avec : } r = \|\vec{PM}\| \text{ et } \vec{U}_r = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$$

Le principe de superposition nous permet de passer à l'intégrale, pour calculer le champ total  $\vec{E}_{tot}$  :

$$\vec{E}_{tot} = \int_V k \cdot \frac{\rho(P) \cdot dV}{r^2} \vec{U}_r \quad \dots \dots \dots (eq.I - 14)$$

### • Cas d'une distribution de charge surfacique et linéique

Dans le cas d'une distribution linéique avec une densité de charge linéique au point  $P$  :  $\lambda(P)$  on a :

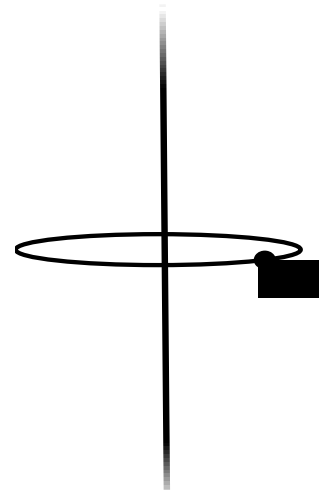
$$\vec{E}_{tot} = \int_L k \cdot \frac{\lambda(P) \cdot dl}{r^2} \vec{U}_r \quad \dots \dots \dots (eq.I - 15)$$

De même pour le d'une distribution surfacique de densité  $\sigma(P)$ , on a :

$$\vec{E}_{tot} = \int_S k \cdot \frac{\sigma(P) \cdot dS}{r^2} \vec{U}_r \quad \dots \dots \dots (eq.I - 16)$$

### Exemple :

Soit un fil rectiligne infini chargé uniformément d'une charge électrique positive. Trouver l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}$  en un point  $P$  situé sur l'anneau défini sur la figure ci-contre.



### Solution :

Puisque la répartition uniforme de charge est sur un fil rectiligne, il convenable d'utiliser les coordonnées cylindriques, de sorte que l'axe (oz) soit superposé sur le même fil.

Prenons un élément de longueur  $dl$  du fil chargé et considérons la configuration présentée sur la figure ci-contre. Puisque le fil est « infini », on trouve pour chaque élément  $dl$  en un point M un élément  $dl$  en un point  $M'$  symétrique par rapport à (O).

$d\vec{E}_M$  et  $d\vec{E}_{M'}$  sont les vecteurs du champ électrique créée par  $dq$  en M et  $dq$  en  $M'$  respectivement. Leurs projections sur l'axe Oz ont un sens opposé et par conséquent la résultante sur le même axe est nulle.  $d\vec{E}$  est la résultante des deux champs. Elle est donc dans la direction de  $\vec{U}_r$ .

Par définition :

$$d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{dq}{\|\vec{MP}\|^2} \frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|} \text{ et } d\vec{E}_{M'} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{dq}{\|\vec{M'P}\|^2} \frac{\vec{M'P}}{\|\vec{M'P}\|}$$

La distribution de charge est linéique, alors :  $dq = \lambda dl = \lambda dz$

Dans le système de coordonnées cylindrique :  $\vec{MP} = r \vec{U}_r - z \vec{k}$ ,

donc :  $\|\vec{MP}\| = \sqrt{r^2 + z^2} = R$

$$\text{Et } d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\lambda dl}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r \vec{U}_r - z \vec{k})$$

Suite à la symétrie mentionnée au-dessus, la composante de E dans la direction de (Oz) est nulle ; alors :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \int \frac{\lambda}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r \vec{U}_r dz ; \text{ avec } r = \text{cst}$$

$$\text{Par intégration : } \vec{E} = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{z}{r^2(r^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \vec{U}_r = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon r^2} \vec{U}_r$$

$$\text{Ainsi : } \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon r} \vec{U}_r$$

### r- Circulation d'un champ de vecteurs

Le déplacement d'une force le long d'une courbe donne un travail. Par analogie le

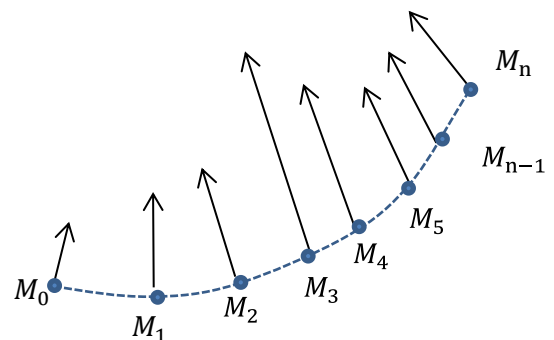
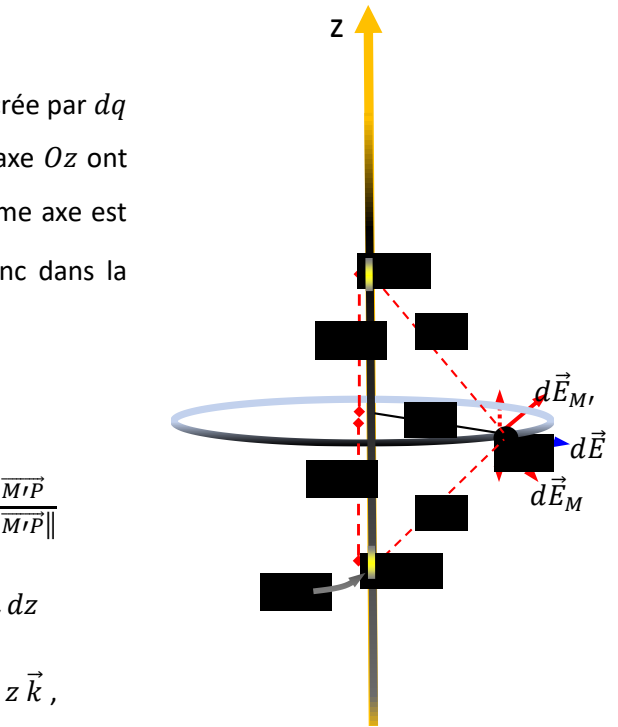


Figure I-14 Circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$



déplacement d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  donne une circulation de ce champ.

On considère la configuration donnée sur la figure II-14. Analytiquement la circulation  $C$  du champ  $\vec{A}$  le long de  $\overline{M_0M_1}$  est donnée par  $C_{01} = \vec{A}(M_0) \cdot \overline{M_0M_1}$  et le long de  $\overline{M_1M_2}$  par :  $C_{12} = \vec{A}(M_1) \cdot \overline{M_1M_2}$ .

La circulation le long de la courbe  $\overline{M_0M_n}$  est donc la somme des circulations élémentaires précédentes :

$$C_{0n} = \vec{A}(M_0) \cdot \overline{M_0M_1} + \vec{A}(M_1) \cdot \overline{M_1M_2} + \dots + \vec{A}(M_{n-1}) \cdot \overline{M_{n-1}M_n}$$

Si les éléments sont de plus en plus petits, chacun d'eux est donc  $\overline{dM} = d\vec{l}$  et la circulation devient :

$$C_{0n} = \int_{M_0}^{M_n} \vec{A}(M) \cdot d\vec{l} \dots \dots \dots (eq.I - 30)$$

Dans le cas du champ électrostatique  $\vec{E}$  la circulation le long d'une courbe  $L$  est donc donnée par :

$$C_L = \int_L \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \dots \dots \dots (eq.I - 31)$$

$$\text{Et que} \quad \delta C = \vec{E} \cdot d\vec{l} \dots \dots \dots (eq.I - 32)$$

L'analogie entre la force  $\vec{F}$  et le champ  $\vec{E}$  pour la considération de la circulation  $C$  nous conduit à conclure que :

- L'élément de circulation de  $\vec{E}$  est une différentielle totale, ainsi :  $\delta C = dC = -dV$
- La circulation de  $\vec{E}$  le long d'un contour fermé est nulle :  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint dC = 0$
- $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = \vec{0}$
- La circulation est conservative, elle ne dépend pas donc du chemin parcouru.

## II-2 Potentiel électrostatique

### • définition

On considère une charge  $q$  placée dans un espace où règne un champ électrostatique  $\vec{E}$ .

Elle est donc sous l'action d'une force  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ . En laissant la charge libre, la force  $\vec{F}$  déplace la charge d'un point à un autre en effectuant ainsi un travail  $W$ . Cependant, point de vue énergétique, la charge  $q$  a « tendance » à se déplacer soit même. On dit qu'elle jouit d'une énergie potentielle.

En fait, la charge a acquit cette énergie à partir du point qu'elle l'occupe. Ce dernier, lui-même, jouit d'une propriété dérivée du champ électrostatique (c-à-d. grace au champ électrostatique) comme tous les points de l'espace où il reign. Cette propriété est dite : potentiel électrique. Il est noté par  $V$ .

Le potentiel électrique est généré par une ou plusieurs charges électriques en un point  $P$  de l'espace. Sa valeur correspond à l'énergie potentielle électrique  $E_p$  acquise par une charge  $q = 1C$  en un point  $P$ , grace à la présence des mêmes charges. Sans expression en fonction de  $E_p$  est donc :

$$V = \frac{E_p}{q} \quad \text{ou} \quad E_p = q \cdot V \quad \dots \dots \dots (eq.I - 16)$$

Le choix du zero pour l'énergie potentielle est arbitraire. En général, il est à l'infini. Le choix du zero pour le potentiel électrique correspond au zero de l'énergie potentielle électrique. Il est donc en général à l'infini.

#### • Unité du potentiel

Dans le système international, le potentiel est exprimé en volt. On l'a donné ce nom à l'hommage de l'inventeur italien de la pile voltaïque Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (1745-1827). Il est noté par (V)

$$\text{D'après la définition du potentiel : } 1V = 1m^2.Kg.s^2.C^{-1} = 1J/C$$

#### • L'électronvolt

L'unité de l'énergie potentielle électrique est le joule dans le SI. Dans le cas des petites quantités d'énergie et pour des raison pratique, il est préférable d'utiliser l'électronvolt (eV).

L'électronvolt est donc une unité dérivée du joule pour exprimer de petites quantités d'énergie. Elle est donnée par :

$$1 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J \quad \dots \dots \dots (eq.I - 17)$$

Cette équivalence sert comme un moyen de conversion : *électronvolt*  $\leftrightarrow$  *Joule*

### • Relation entre potentiel électrique et champ électrique

Soit une charge  $q$  qui se déplace sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}$  d'un point  $A$  à un autre  $B$ . Voir la configuration sur la figure II-15

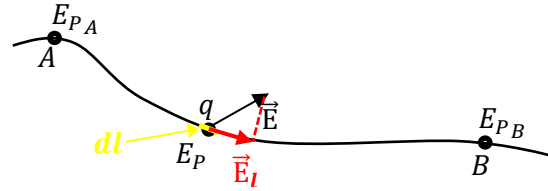


Figure II-15 Potentiel et champ électriques

La différence de son énergie potentielle est :

$$\Delta E_P = E_{PA} - E_{PB}$$

$$\text{Et on a : } E_P = \frac{V}{q}$$

$$\text{Alors : } \Delta E_P = q \cdot (V_A - V_B) \quad \dots \dots \dots (eq.I - 18)$$

$$\text{Mais aussi } \Delta E_P = W_{A \rightarrow B} ,$$

$$\text{donc } V_A - V_B = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q} \quad \dots \dots \dots (eq.I - 19)$$

Ainsi : la différence de potentiel entre  $A$  et  $B$  est le travail fourni par la force due à  $E$  pour déplacer une charge  $q = 1C$  entre ces mêmes points.

$$\text{Et pour un très petit déplacement } dl: \quad dV = \frac{dW}{q} \quad \dots \dots \dots (eq.I - 20)$$

$$\text{Mais } \vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad \text{alors} \quad W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \dots \dots \dots (eq.I - 21)$$

$$Eq.(I - 19) \text{ et } (I - 21) \Rightarrow \frac{W_{A \rightarrow B}}{q} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Ainsi :} \quad V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \dots \dots \dots (eq.I - 22)$$

$$\text{Si } A \equiv B \text{ on aura :} \quad \oint_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \dots \dots \dots (eq.I - 23)$$

Donc le champ électrostatique correspond à une force dérivée d'un potentiel.

Considérons  $\vec{E}_t$  la composante de  $\vec{E}$  suivant la trajectoire (en rouge sur la figure I-14), l'eq.I-22) devient :

$$V_A - V_B = \int_A^B E_l dl$$

On peut donc écrire :

$$\int_A^B E_l dl = -(V_B - V_A) = -\int_{V_A}^{V_B} dV \dots \dots \dots (eq. I - 24)$$

Si A est très proche de B on considère la forme différentielle :

$$E_l \cdot dl = -dV \quad \text{ou encore} \quad E_l = -\frac{\partial V}{\partial l} \dots \dots \dots (eq. I - 25)$$

On peut conclure que  $E_l$  est la variation de V par unité de longueur dans la direction de  $l$  même.

Dans la direction de  $x$ , ça sera donc  $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$  et de même, dans les directions de  $y$  et  $z$  :

$$\text{Alors} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\text{Cela nous conduit à conclure que : } \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

Donc :

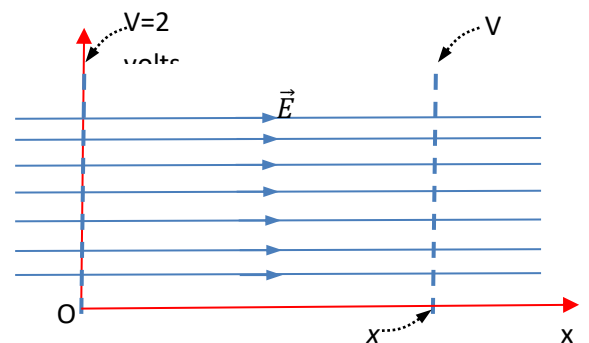
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \dots \dots \dots (eq. I - 26)$$

L'éq. I-26 nous permet de calculer le champ électrostatique  $\vec{E}$  en sachant  $V$ , et de calculer le potentiel  $V$ , à des constantes près, en sachant le vecteur du champ électrostatique  $\vec{E}$ .

### Exemple :

La configuration sur la figure ci-contre donne la distribution du champ électrostatique  $\vec{E}$  en 2D avec les valeurs de du potentiel dans deux cas particuliers.

On demande de représenter sur deux diagrammes les deux grandeurs  $E(x)$  et  $V(x)$ .



### Solution :

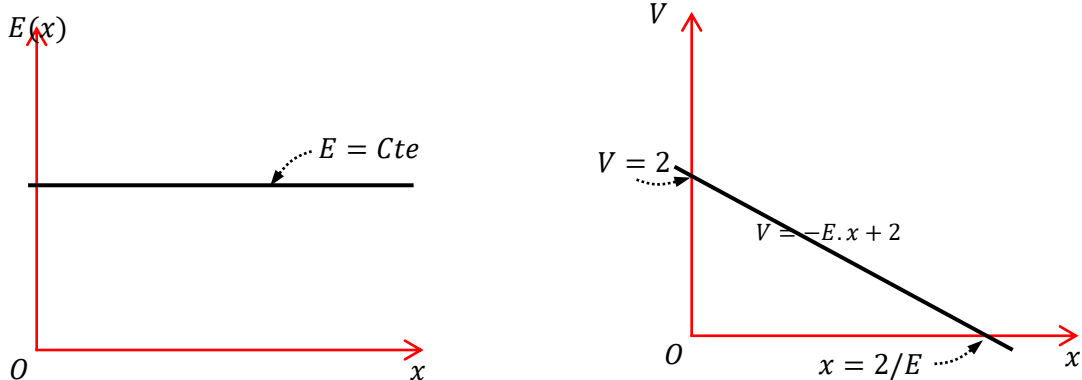
D'après la configuration le vecteur du champ électrostatique est uniforme, ce qui implique que :  $\vec{E} = \overrightarrow{Cte} = Cte. \vec{i}_x$

Mais aussi :  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x} = Cte$

$$\Rightarrow \int_2^V dV = -\int_0^x E dx = -E \int_0^x dx \Rightarrow V - 2 = -E \cdot x$$

$$\Rightarrow V = -E \cdot x + 2; \quad \text{à } x = 0, V = 2$$

Donc les diagrammes seront comme suit :



### • Potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle

Dans cette section, nous cherchons l'expression du potentiel électrostatique généré par une charge  $q$  ponctuelle placée en point P, en un point M quelconque de l'espace. Comme nous l'avons vue au-dessus (section II-1-2-e), la distribution du champ électrostatique généré par une charge ponctuelle a une symétrie radiale.

Nous savons que  $E_l = -\frac{\partial V}{\partial l}$  d'après (eq. I - 25) et que  $E$  ne dépend que de  $q$ ,  $\epsilon$  et  $r = \overline{PM}$ . Le  $\partial$  dans l'expression de  $E_l$  sera remplacé par le  $d$ , et le  $dl$  par  $dr$ .

$$\text{On aura donc : } E_l = E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int dV = -\int E \cdot dr$$

$$\text{Mais } E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \text{ alors } \int dV = -\int E \cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{r^2} \cdot dr \Rightarrow V = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{-1}{r} + C$$

Si on considère la convention que le potentiel est nul à l'infini alors :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \dots \dots \dots (eq. I - 27)$$

on rappelle que  $\varepsilon$  est la permittivité électrique du milieu.

### • Potentiel électrostatique généré par n charges ponctuelles

Considérons maintenant n charges électriques ponctuelles. Le potentiel électrique généré par cet ensemble de charges  $V_{tot}$ , en un point P de l'espace est, selon le principe de superposition, la somme des potentiels de ces n charges générés individuellement. C-à-d. :

$$V_{tot} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_n} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_i} \quad \dots \dots \dots (eq. I - 28)$$

$r_i$  est la distance entre la position de  $q_i$  et le point P

### • Potentiel électrostatique généré par distribution continue de charge en P

Considérons cette fois une distribution continue de charge et prenons une charge ponctuelle  $dq$  de cette distribution. Le potentiel généré par de telle charge est élémentaire et noté  $dV$  :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} \quad \dots \dots \dots (eq. I - 29)$$

Ici  $r$  est la distance entre la position de  $dq$  et le point P.

▪ Cas d'une distribution volumique :  $dq = \rho dv$ ,  $dv$  ici est l'élément de volume  $vol$

$$\text{Alors : } V = \int_{vol} \frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon.r}$$

▪ Cas d'une distribution surfacique :  $dq = \rho dS$ ,  $dS$  ici est l'élément de surface  $S$

$$\text{Alors : } V = \int_S \frac{\rho dS}{4\pi\varepsilon.r}$$

▪ Cas d'une distribution linéique :  $dq = \rho dl$ ,  $dl$  ici est l'élément de longueur  $L$

$$\text{Alors : } V = \int_L \frac{\rho dl}{4\pi\varepsilon.r}$$

**Remarque** : on a considéré dans ces trois dernières expressions que le potentiel à  $\infty$  est nul. Si ce n'est pas le cas, on doit rajouter la constante de l'intégrale.

### • Surfaces équipotentielles :

L'étude des surfaces équipotentielles est une étude topographique du potentiel électrostatique. Une configuration topographique d'un champ de vecteurs, tel que le champ de vecteurs électrique, récapitule un nombre très important des caractéristiques de ce champ. Elle est donnée par ses lignes de champ. Une configuration topographique d'un champ scalaire, tel que le potentiel électrostatique, est donnée par des courbes appelées de niveau. Pour les surfaces constituées uniquement des courbes pour lesquelles le potentiel est constant, on les appelle les équipotentielles. Autrement dit, ce sont des surfaces qui ont le même potentiel électrostatique en tout point.

$$\text{Alors} \quad V = \text{Cte ou } dV = 0$$

$$\text{Mais } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Donc en tout point de l'équipotentielle :  $\vec{E} \perp d\vec{l} \Rightarrow$  les lignes du champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

### Remarques :

- Les équipotentielles entourent les charges ;
- Les équipotentielles sont constituées des lignes fermées (dans certains cas se ferment éventuellement à l'infini).

### • Énergie potentielle d'un ensemble de charges ponctuelles dans un espace jouissant d'un potentiel $V$

Nous avons déjà vu brièvement la définition de l'énergie potentielle  $E_p$  associée à une charge ponctuelle  $q$  dans un espace où tout point jouit d'un potentiel  $V$ . Elle est égale au travail fourni pour amener la charge de l'infini à sa position.

$$E_p = q \cdot V$$

- Cas d'une distribution de charges discontinue :

Considérons maintenant un système constitué de  $n$  charges ponctuelles  $q_i$  de même signe. Chaque charge crée un champ électrostatique en tout point. Chaque point de l'espace jouit d'un potentiel total égale à la somme des potentiels dû à chacune des  $n$  charges.

L'énergie potentielle totale du système à  $n$  charges placées en  $M_i$  est égale à la somme des travaux fournis pour amener toutes ces charges, charge après charge, à leurs positions  $M_i$ .

Prenons le cas d'un système constitué de trois charges, et commençons par l'ordre  $q_1, q_2, q_3$  pour amener ces trois charges (figure II-16).

Le travail  $W_1$  fourni pour amener la charge  $q_1$  à sa position est nul, parceque il n'y a pas de potentiel et de champ électrostatiques : les charges  $q_2$  et  $q_3$  sont à l'infini.

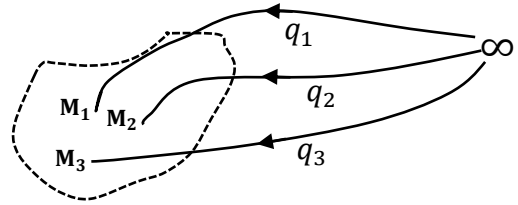


Figure I-16 Définition de l'énergie potentiel d'un svstème : cas de trois charges

Le travail fourni pour amener la charge  $q_2$  à sa position  $M_2$  est :  $W_2 = q_2 \cdot V_{2,1}$ .  $V_{2,1}$  est le potentiel dans la position  $M_2$  dû à la charge  $q_1$ . La charge  $q_3$  ne crée pas de potentiel, elle est à l'infini.

Le travail fourni pour amener la charge  $q_3$  à sa position est :  $W_3 = q_3 \cdot (V_{3,1} + V_{3,2})$ .

Donc le travail total pour amener les trois charges est :

$$W_{tot} = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + q_2 \cdot V_{2,1} + q_3 \cdot V_{3,1} + q_3 V_{3,2} \dots\dots\dots (*)$$

Inversons maintenant l'ordre pour amener les charges tel que :  $q_3, q_2, q_1$  et suivons le même raisonnement, on trouve que :

$$W_{tot} = 0 + q_2 \cdot V_{2,3} + q_1 \cdot V_{1,3} + q_1 V_{1,2} \dots\dots\dots (**)$$

$$(*) + (**) \Rightarrow 2 \cdot W_{tot} = q_1 (V_{1,2} + V_{1,3}) + q_2 (V_{2,1} + V_{2,3}) + q_3 (V_{3,1} + V_{3,2})$$

Mais en se basant sur le principe de superposition dans le cas des potentiels, on constate que :  $V_{1,2} + V_{1,3}$  est le potentiel en  $M_1$  dû aux charges  $q_2$  et  $q_3$ . On se permet donc d'écrire :  $V_{1,2} + V_{1,3} = V_1$  ,  $V_{2,1} + V_{2,3} = V_2$  et  $V_{3,1} + V_{3,2} = V_3$

$$\Rightarrow E_P = W_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i \cdot V_i$$

Généralisons ce cas à  $n$  charges :



$$E_P = W_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot V_i \quad \dots \dots \dots (eq.I - 33)$$

$E_P$  : est l'énergie potentielle électrostatique d'un système de  $n$  charges ponctuelles discontinuellement distribuées.

- Cas d'une distribution de charges continue :

- **Distribution volumique :**

$$E_P = W_{tot} = \frac{1}{2} \int_{q_{tot}} V \cdot dq = \frac{1}{2} \int_{v_{tot}} V \cdot \rho \, dv \quad \dots \dots \dots (eq.I - 34)$$

$V$  : le potentiel ;  $v$  : le volume chargé

- **Distribution surfacique :**

$$E_P = W_{tot} = \frac{1}{2} \int_{q_{tot}} V \cdot dq = \frac{1}{2} \int_{S_{tot}} V \cdot \rho \, dS \quad \dots \dots \dots (eq.I - 35)$$

$S$  : la surface chargée

- **Distribution linéique :**

$$E_P = W_{tot} = \frac{1}{2} \int_{q_{tot}} V \cdot dq = \frac{1}{2} \int_L V \cdot \rho \, dl \quad \dots \dots \dots (eq.I - 36)$$

$L$  : la partie linéaire chargée

## II-3 Dipôle électrique

- **Définition :**

On appelle dipôle électrique un système électriquement neutre formé de charges séparées de sorte qu'on puisse avoir un excès de charges positives d'un côté (pôle positif) et un excès de charges négatives de l'autre côté (pôle négatif).

- **Dipôle électrique « idéal » :** le dipôle électrique « idéal » est un ensemble formé de deux charges  $-q$  (en un point N) et  $+q$  (en un point P).

Le dipôle électrique idéal est caractérisé par son moment dipolaire électrique donnée par :

$$\vec{p} = q \cdot \vec{L} = q \cdot \overrightarrow{NP} \text{ avec } q = |-q| = |+q| \dots\dots\dots \text{ I-15}$$

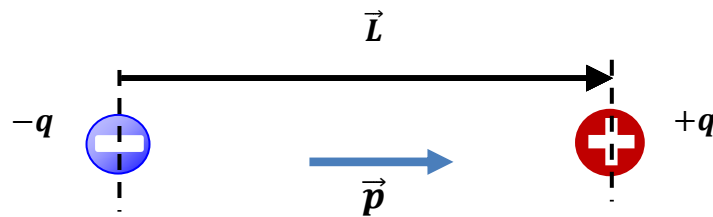


Figure II-17 Dipôle idéal de vecteurs de distance  $\vec{L}$  et de moment dipolaire électrique  $\vec{p}$ .

### ○ Dipôle électrique induit :

La séparation de charge dans un matériau qui contient des charges libres sous l'influence d'un champ électrostatique crée par un matériau chargé induit un dipôle électrique comme le montre la configuration de la figure II-18.

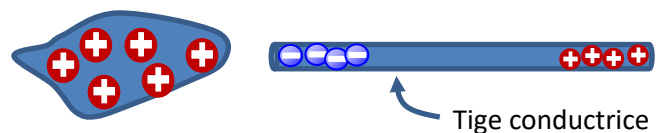
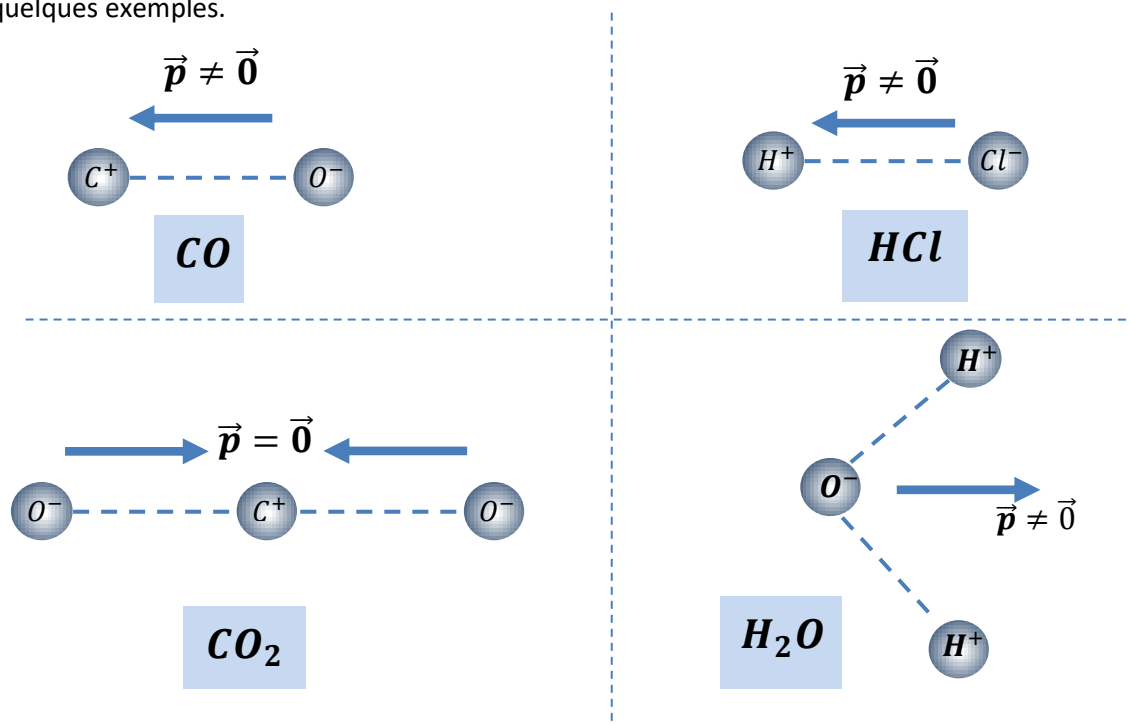


Figure II-18: Dipôle induit

Le dipôle électrique montre une grande importance dans les études des matériaux notamment celles des mesures expérimentale de leur constante diélectrique. Cette importance apparaisse surtout dans le cas où le barycentre des charges positives et négatives ne se superpose pas. A titre d'exemple les molécules d'eau, d'acide chlorhydrique, d'ammoniac etc. La figure II-19 montre quelques exemples.



La figure II-19 Quelques exemples montrant le moment dipolaire électrique.

## II-7 Flux du champ électrostatique

### g. Orientation d'une surface

Les débits ou les flux sont toujours associés aux surfaces à lesquelles traversent. Les surfaces considérées doivent être clairement orientées pour enlever toute ambiguïté.

Contrairement aux surfaces planes, l'orientation des surfaces curvilignes dépend de la position de chaque point où on veut la déterminer. On ne peut pas donner une seule orientation pour toute la surface.

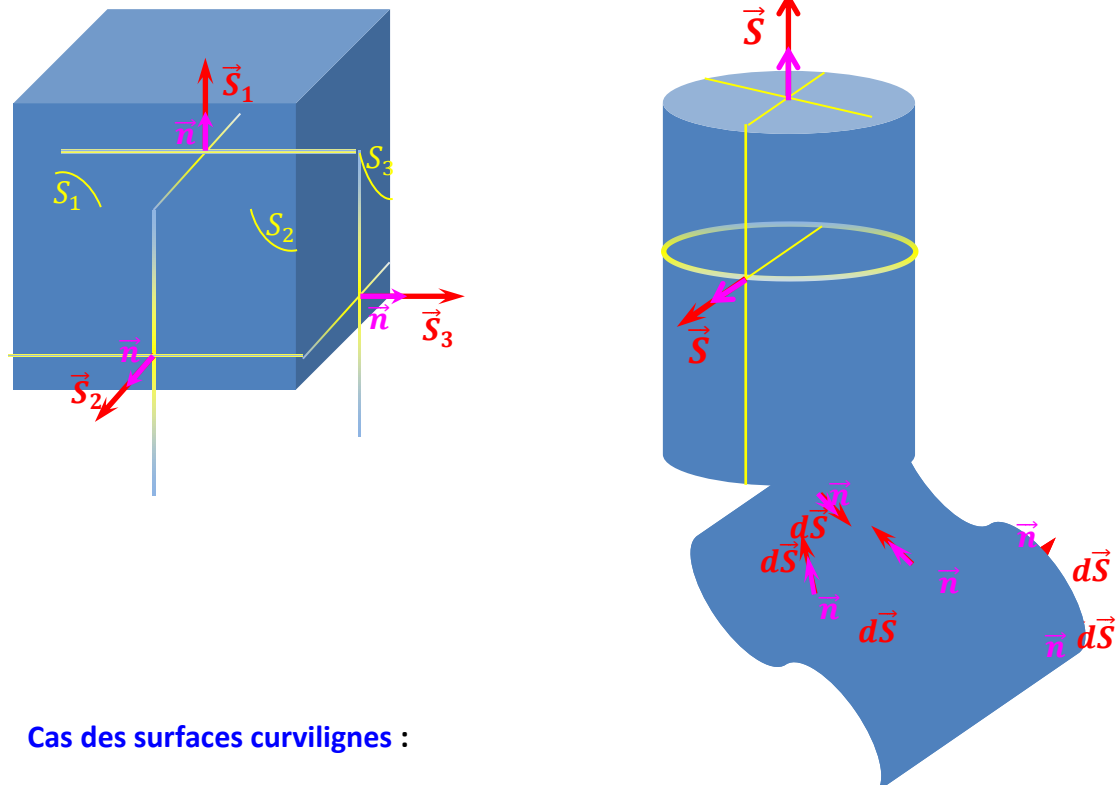
#### ○ Cas des surfaces fermées :

Dans ce cas l'orientation de la surface est par convention de l'intérieur vers l'extérieur, même si les surfaces sont planes.  $d\vec{S}$  et  $\vec{S}$  sont toujours perpendiculaires à la surface  $dS$  ou  $S$ . Elles sont exprimées par :

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{S} = S \cdot \vec{n}$$

avec  $\vec{n}$  est la normale sur la surface  $S$  ou  $dS$ .

**Exemple :**



#### ○ Cas des surfaces curvilignes :

Figure II-20 Surface curviligne et orientation de  $\vec{S}$ ,  $d\vec{S}$  et  $\vec{n}$

Dans ce cas l'orientation de la surface est par convention de la partie concave à la partie convexe.  $d\vec{S}$  et  $S$  sont toujours perpendiculaire à la surface.

○ **Cas des surfaces planes :**

La configuration présentée sur la figure ci-contre, montre la manière par laquelle on doit choisir le sens positif de la normale  $\vec{n}$  ou  $\vec{S}$  en utilisant la méthode Maxwell (dite aussi de la main droite).

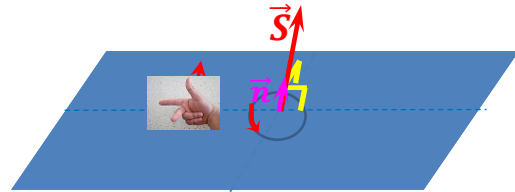


Figure II-21 Surface plane et orientation de  $\vec{S}$  et  $\vec{n}$

**h. Flux d'un champ de vecteurs**

Prenons une surface  $S$ , ouverte ou fermée. Orientons la selon les règles présentées au-dessus et considérons un champ de vecteur  $\vec{A}$ . Le flux du champ de vecteurs  $A$  à travers la surface orientée  $S$  est donnée par :

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS \quad \dots \dots \dots (eq. I - 37)$$

$\Phi$ : Flux du champ de vecteurs.

On note que le flux d'un champ de vecteurs est une grandeur scalaire.

○ **Cas du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle**

Le flux du champ électrostatique, créé par une charge ponctuelle  $q$  placée en un point (O), à travers une surface sphérique de centre (O) est donnée par l'eq. I-37 après substitution du champ  $\vec{A}$  par le champ  $\vec{E}$ . On aura donc :

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Mais le champ est créé par une charge ponctuelle, donc :

$$\vec{E} = K \cdot \frac{q}{r^2} \vec{U} \quad \text{et} \quad \vec{U} = \vec{U}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\text{Aussi} \quad d\vec{S} = dS \cdot \vec{n} = dS \cdot \vec{U}_r$$

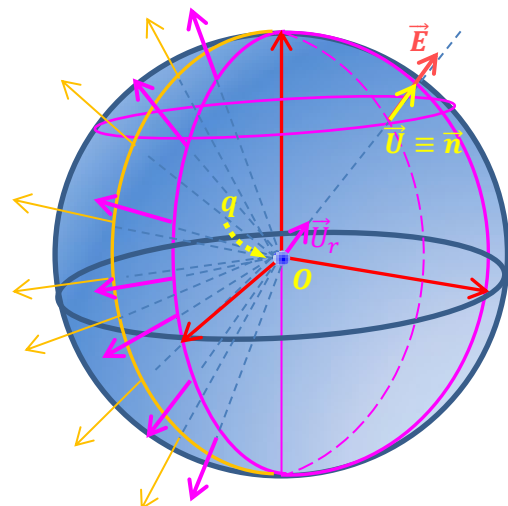


Figure II- 22 Orientation des différents vecteurs associés au flux de  $\vec{E}$  dû à  $q$  ponctuelle

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Phi &= \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = K \cdot q \int_S \frac{\vec{U}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \cdot dS = K \cdot q \int_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} \cdot dS \\ &= K \cdot q \left( \int_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} \cdot dS \right) = K \cdot q \cdot \Omega \dots \dots (eq. I - 38)\end{aligned}$$

Avec  $\Omega$  est l'angle solide telque :

$$d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} dS = \frac{dS \cdot \cos(\theta)}{r^2} = \frac{d\Sigma}{r^2} \dots \dots (eq. I - 39)$$

$\Sigma$  : est la surface de la section présentée sur la figure II-22

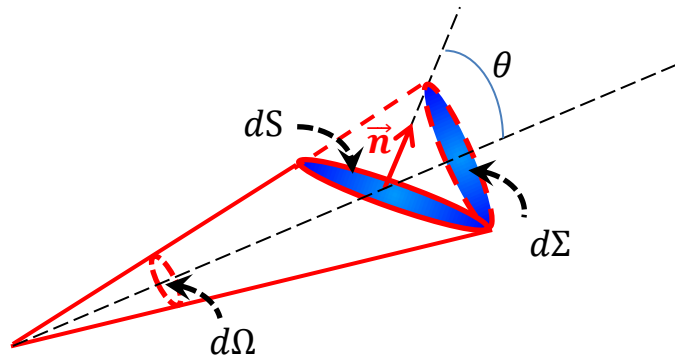


Figure II-23 L'angle solide,  $dS$  et  $d\Sigma$  (voir éq. I-39)

### Remarque :

L'unité du flux du champ électrostatique est le (V.m). On l'a pas associée de noms, car en électrostatique le flux lui-même n'est qu'un intermédiaire de calcul.

### **i. Vecteur densité du flux d'un champ de vecteurs**

Dans le but de mettre en évidence le caractère vectoriel du flux et son « intensité », on a défini une grandeur scalaire nommée densité du flux électrostatique. Elle est notée  $\vec{D}$ . Sa direction et son sens sont déterminés par les lignes du flux, voir figure II-24. Elle est aussi appelée « induction électrique » ou encore « champ déplacement électrique »0 son unité est le coulomb par mètre carré ( $C \cdot m^{-2}$ ). Son expression est donnée par l'éq. I-40 :

$$\vec{D} = \frac{d\Phi}{dS} \vec{n} \dots \dots \dots (eq. I - 40)$$

avec  $\Phi$ : Flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  ; la surface traversée par le flux ;  $\vec{n}$  : la normale à  $dS$  (voir figure I-21).

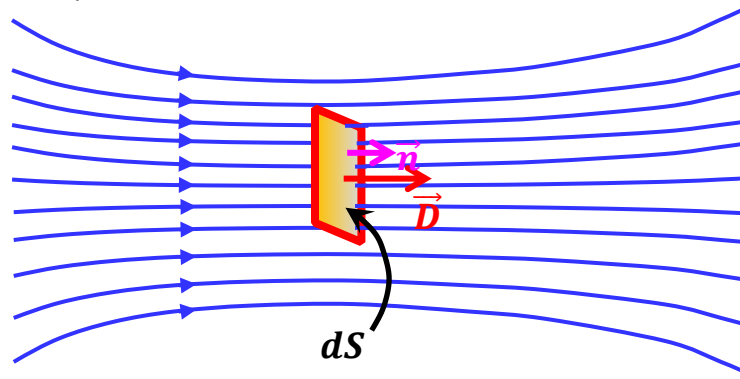


Figure II-24: Densité du flux de champ électrostatique

Dans l'exemple précédent, le flux et la densité du flux ont la même direction et le même sens. Cependant, dans le cas général, ils font un angle  $\theta$  entre eux et on aura :

$$d\Phi = \vec{D} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n} = D \cdot dS \cdot \cos(\theta) = \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad \dots \dots \dots (eq. I - 41)$$

## II-8 Théorème de Gauss

### k) L'énoncé du théorème et le cas d'une charge ponctuelle

Le théorème de Gauss établit une relation entre le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée et la charge dans le volume délimitée par cette surface. Il s'énonce comme suit :

Le flux traversant une surface fermée contenant des charges électriques est égal au produit par  $\frac{1}{\epsilon}$  de la somme algébriques des charges intérieures à cette surface.

$$\text{c.-à-d. : } \Phi = \int_{S_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i(\text{intérieure})}{\epsilon} \quad \dots \dots \dots (\text{eq. I - 42})$$

42)

$\sum_{i=1}^n q_i(\text{intérieure})$  : est la somme des charge dans le volume délimité par la surface fermée.

$S_{\text{fermée}}$  : est appelée aussi surface de Gauss. Elle est notée :  $S_G$

### l) Examen du cas d'une seule charge ponctuelle

Prenons le cas d'une charge ponctuelle  $q$  située en  $(O)$ , et calculons le flux du champ électrostatique à travers une sphère de centre  $(O)$  et de rayon quelconque  $r$ .

$$\text{Le flux } \Phi = \oint_{S_{\text{sphère}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{\text{sphère}}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_{S_{\text{sphère}}} \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Mais dans ce cas particulier :  $\vec{U}_r = \vec{n}$  et  $r = \text{Cte}$  sur la sphère ;

$$\text{Alors : } \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \oint_{S_{\text{sphère}}} dS ; \text{ mais la surface d'une sphère de rayon } r \text{ est : } 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow : \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon} ; \text{ avec } \epsilon : \text{ est la permittivité électrique du milieu.}$$

Donc pour une charge ponctuelle  $q$ , on a :

$$\Phi = \int_{S_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}$$

Cette dernière équation peut être généralisée pour avoir l'équation (I-42) associée au théorème de Gauss.

Remarque :

Dans le cas du vide la permittivité électrique du milieu  $\epsilon$  est remplacée par la permittivité du vide  $\epsilon_0$ . Elles sont reliées par :  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$  ; avec  $\epsilon_r$  est la permittivité relative.

### **m) Considérations sur le choix de la surface de Gauss pour application**

L'application du théorème de Gauss a pour but de simplifier le calcul du champ électrostatique. Cet objectif ne sera pratique qu'à des cas où la symétrie de distribution du champ soit exploitable. Dans ce cas, on doit faire attention au choix de la surface de Gauss.

La seule condition imposée sur la surface de Gauss est qu'elle soit fermée. Cependant et pour une meilleure exploitation le choix de la surface fermée dans le théorème de Gauss est très important. On vise à choisir une surface fermée constituée d'éléments de surfaces de sorte que :

1. Le vecteur du champ  $\vec{E}$  soit :
  - a. perpendiculaire à  $S$  ou  $dS$  de  $S_G$  ou d'une partie d'elle (c.-à-d. parallèle au vecteur  $d\vec{S}$  ou  $\vec{S}$ ) et ainsi  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$  ;
  - b. parallèle à  $S$  ou  $dS$  de  $S_G$  ou d'une partie d'elle (c.-à-d. perpendiculaire au vecteur  $d\vec{S}$  ou  $\vec{S}$ ) et ainsi  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$  ;

2. l'intensité de  $\vec{E}$  soit constante sur  $S_G$  ou d'une partie d'elle et ainsi :

$$\int E \cdot dS = E \cdot \int dS$$

La capacité de choisir de telles surfaces nécessite de savoir la distribution du champ ou la topographie des lignes du champ et d'avoir des cas à des symétries de distribution. Ces dernières reposent directement à la symétrie de distribution des charges.

### **n) Symétrie de distribution des charges**

Dans cette section nous abordons les symétrie de distribution des charges les plus rencontrées dans la pratique.

#### **○ Symétrie de rotation**

C'est le cas d'une distribution rectiligne uniforme de charge ou d'une distribution surfacique ou volumique, de sorte que  $\sigma$  ou  $\rho$  ne dépendent pas de la rotation autour de l'axe de symétrie. Elle peuvent être fonction uniquement de la distance de l'axe de rotation.

Exemples : Considérons les configurations présentées sur la figure II-25 : 1) Une très longue tige métallique chargée, 2) Un très long cylindre métallique creux chargé, 3) un très long cylindre en plastique remplie uniformément d'une solution ionique.



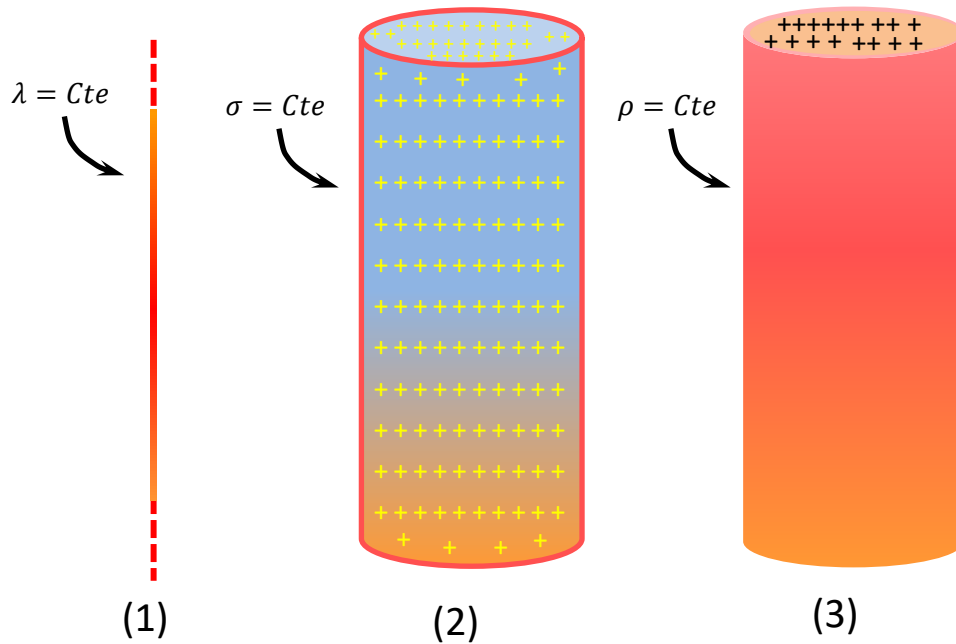


Figure II-25 : Distribution de charge : cas de symétrie de rotation

### ○ Symétrie sphérique

C'est le cas où la densité de la charge ne dépend que de la distance  $r$  d'un point ( $o$ ). Ce dernier représente le centre de la « sphère de symétrie ». Une sphère creuse est l'un des cas particuliers de cette symétrie. Une charge ponctuelle est aussi un cas particulier. Quelques autres exemples sont présentés sur la figure I-23.

#### Exemples :

Consulter d'abord la figure II-26, et constater :

**Cas (a) :** une sphère électriquement et uniformément chargée  $\rho = Cte$ ,  $\rho$  ne dépend pas de  $\theta$  et  $\varphi$  ;

**Cas (b) :** une sphère électriquement et chargée, la densité de charge est uniformément décroissante :  $\rho(r) = f(r)$ ,  $\rho$  ne dépend pas de  $\theta$  et  $\varphi$  ;

**Cas (c) :** deux sphères électriquement chargées, la densité de charge de la première ( $r < R_1$ ) est uniformément décroissante, celle de la deuxième ( $r = R_2$ ) est uniquement chargée à sa surface d'une densité  $\sigma = Cte$  :  $\rho(r) = f(r)$ ,  $\rho$  ne dépend pas de  $\theta$  et  $\varphi$  ;

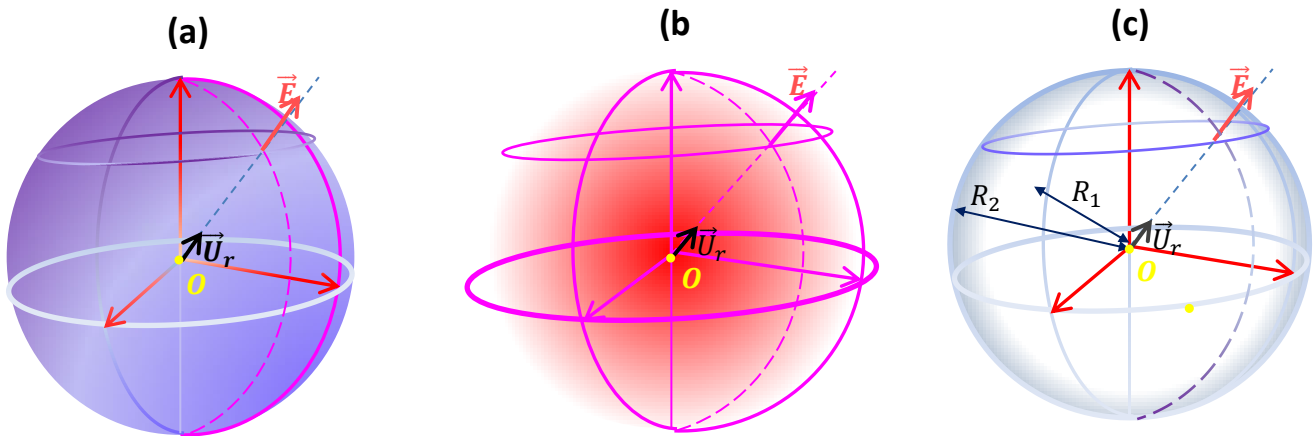


Figure II-26 Trois cas de distributions sphériques de charges

### ○ Symétrie plane

C'est le cas d'une distribution de charge uniforme sur une « très » grande surface plane. Dans ce cas :  $\sigma = Cte$ . La symétrie ici est par rapport un plan, dit de symétrie.

## o) Calcul du champ électrostatique : application du théorème de Gauss

Nous distinguons trois cas souvent rencontrés. On se base sur la symétrie de distribution de leur vecteur du champ électrostatique cette fois. Cette dernière suit en général la symétrie de distribution de charge. Pour cela, dans cette section, on entend par « distribution », la distribution du champ électrostatique.

### ○ Distribution à symétrie sphérique

Les cas suivants, et d'autres similaires, nous fournissent des distributions à symétrie sphérique :

1. Une charge ponctuelle ;
2. Charges distribuées uniformément dans corps sphériques ;
3. Charges distribuées uniformément sur une sphère ou des sphères concentriques ;
4. Charges distribuées par une densité volumique de charge de sorte que :  
 $\rho = \rho(r)$  ;

5. Un système constitué d'un ensemble de ce qui précède à condition qu'ils soient concentriques ;

Dans tous ces cas, le vecteur du champ électrostatique est radial. Il est donc perpendiculaire à tout point d'une surface sphérique qui a le même centre (voir figure I-23). Le système de coordonnées convenable à de telles situations est celui des coordonnées sphériques. Alors :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{U}_r$$

En plus, sur la surface de la même sphère et par effet de la symétrie :

$$\|\vec{E}\| = Cte \quad \dots \dots \dots (eq.I - 43)$$

Alors on aura toujours :

$$\Phi = \oint_{S_{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{sphère}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_{S_{sphère}} E \cdot dS = E \oint_{S_{sphère}} dS = E \cdot 4\pi r^2$$

Donc quel que soit la distribution à symétrie sphérique

On aura :  $\Phi = E \cdot 4\pi r^2$

Mais selon le théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{Q_i}{\epsilon}$$

Avec  $Q_i$  : est la charge à l'intérieur de la surface fermée qui est dans ce cas la sphère choisie concentrique avec celle(s) chargée(s).

$$\text{Alors } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon \cdot r^2} \quad \dots \dots \dots (eq.I - 44)$$

En substituant dans l'éq. I-43 :

$$\vec{E} = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon \cdot r^2} \cdot \vec{U}_r \quad \dots \dots \dots (eq.I - 45)$$

Ce résultat est juste quel que soit  $Q_i$ .

○ **Distribution à symétrie de rotation**

Les cas suivants, et d'autres similaires, nous fournissent des distributions à symétrie de rotation :

1. Charges uniformément distribuées sur un long fil droit (de section à dimension négligeable devant sa longueur), même s'il n'est pas conducteur;
2. Charges distribuées uniformément dans un long volume cylindrique ;
3. Charges distribuées dans un long volume cylindrique de sorte que sa densité volumique ne dépend que de  $r$  distance à son axe de rotation :  $\rho = \rho(r)$  ;
4. Charges distribuées uniformément sur la surface d'un long volume cylindrique ;
5. Systèmes constitué d'un ensemble de ce qui précède à condition qu'ils soient coaxiaux ;

Le système de coordonnées adéquat à de telles situations est celui des coordonnées cylindriques. Pour pouvoir exploiter le théorème de Gauss, il est commode de choisir la surface de Gauss, des cylindres d'axes de rotation qui coïncident avec ceux des cylindres de symétrie.

Dans ce cas, la surface de Gauss est constituée de trois parties. Deux bases qui sont deux disques parallèles ( $S_1$  et  $S_2$ ) et une surface latérale courbe ( $S_L$ ). Sur cette dernière, le champ électrostatique  $\vec{E}$  est perpendiculaire à la surface élémentaire  $dS$  en un point  $P$ . On peut écrire donc :

$$\vec{E} \parallel d\vec{S} \text{ alors } \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$$

Sur les deux bases

$$\vec{E} \perp d\vec{S} \text{ alors } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Et le flux :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L$$

Avec  $\Phi_1, \Phi_2$  et  $\Phi_3$  sont le flux à travers les trois surfaces  $S_1$  ,  $S_2$  et  $S_L$  respectivement.

$$\Rightarrow \Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad , \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_3 = \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_3} E \cdot dS$$

Aussi, par effet de la symétrie :

$$\|\vec{E}\| = \text{Cte} \Rightarrow \Phi_3 = E \int_{S_3} dS = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L$$

Ici  $r$  et  $L$  sont respectivement le rayon et la longueur de la surface de Gauss.

Le flux sur la surface fermée (de Gauss) :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L = 0 + 0 + E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L$$

Dans tous les cas où on trouve une symétrie de rotation on a donc :  $\Phi = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L$

Suite au théorème de Gauss :  $\Phi = \frac{Q_i}{\epsilon}$

$\Rightarrow$

$$E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{Q_i}{\epsilon}$$

..... (eq. I - 46)

$Q_i$  est la charge à l'intérieur de la surface  $S_G$ .

**Exemple :**

Considérons un conducteur chargé positivement de longueur infini. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique en un point quelconque M de l'espace.

**Solution :**

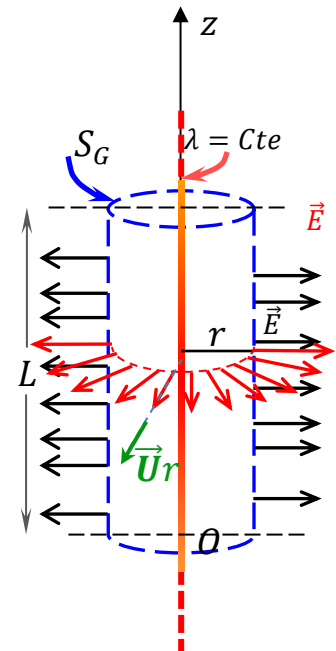
La distribution du vecteur du champ électrostatique  $\vec{E}$  a une symétrie de rotation. Donc, on utilise les coordonnées cylindriques :  $\vec{E} = E \cdot \vec{U}_r$

Suite à l'éq. I - 46 :  $E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{Q_i}{\epsilon}$  ..... ( $\Delta$ )

$Q_i$  est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss. La charge à l'extérieur n'en fait pas partie :  $Q_i = \int_L \lambda \cdot dl = \int_0^L \lambda \cdot dz =$

On substitue dans ( $\Delta$ ) :  $E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot r \cdot \epsilon}$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot r \cdot \epsilon} \vec{U}_r$$



## Partie 2 : les Conducteurs

Nous allons voir maintenant, dans ce qui suit, la définition d'un conducteur et de son équilibre électrostatique. Nous allons examiner la répartition de ses charges lorsqu'il n'y a pas de champ électrique extérieur et lorsqu'il est plongé dans un champ électrique, dans deux cas : chargé ou neutre. Aussi nous allons montrer la topographie du champ électrostatique à l'intérieur et immédiatement à l'extérieur des conducteurs dans tous ces cas.

### II - 6 Conducteurs en équilibre électrostatique

Avant d'entamer l'étude de l'état des conducteurs en équilibre électrostatique, il est primordial de donner les définitions aussi bien des conducteurs que des isolants, et d'en faire une petite comparaison entre eux après avoir survoler la relation matière-charges.

#### a) Les conducteurs et les isolants

##### ○ Relation « matière-charge »

Ici, nous entendons dire par matière tous ce qui nous entoure et qui a une masse et occupe un volume. Il s'agit des matériaux solides, des liquides et même des gaz et des plasmas. L'étude de la structure de la matière montre que cette dernière est constituée d'un nombre « très » élevé de particule chargées positivement (les protons) et négativement (les électrons)(§section I-1-1). Cependant, le plasma fait l'exception par définition.

La matière, dans son état normale, contient autant de charges positives que de charges négatives. On dit qu'elle est électriquement neutre. Une matière à laquelle on a ajouté ou enlevé de la charge électrique, de même signe, est dite électriquement chargée.

La « liberté » de la circulation des charges dans la matière est le critère fondamental sur lequel on se base pour classer électriquement les matériaux en : isolant ou conducteur. En fait et de point de vu électrique, les matériaux ne sont pas tous classés dans seulement ces deux types. Dans la pratique, on trouve aussi des matériaux supraconducteurs, semi-conducteurs, conducteur (ou isolant) avec certaine résistivité (ou conductivité) ...

Dans ce chapitre, on se limite à des matériaux conducteurs parfaits et matériaux isolants parfaits.

##### ○ Isolant électrique

Un isolant électrique est constitué d'un matériau dans lequel la charge électrique circule très difficilement : le papier, le caoutchouc, le bois, le verre, l'air, le plastique, les tissus, l'eau pure sont de bons isolants.

- **Isolant électrique parfait**

C'est un matériau dans lequel aucune charge ne peut y circuler. C'est un matériau parfait qui n'existe pas.

- **Conducteur électrique**

Un conducteur électrique est constitué d'un matériau dans lequel la charge électrique circule facilement. Il est l'opposé de l'isolant électrique. Un matériau conducteur possède un nombre très élevé de charges « libres ». La majorité des métaux sont de bons conducteurs. L'or, le platine, l'argent et le cuivre sont les meilleurs conducteurs. L'argent, le platine et l'or sont très chers. On les utilise uniquement en petites quantités, comme dans les circuits intégrés, en électronique. L'eau deviendra un bon conducteur dès qu'elle contient des impuretés notamment métalliques. A titre d'exemple, l'eau salée est un bon conducteur. En pratique, tous les conducteurs possèdent une résistance, même si elle est très faible, au déplacement des charges.

- **Conducteur électrique parfait**

C'est un matériau dans lequel la circulation des charges ne présente aucune résistance. C'est un matériau parfait où les charges circulent en liberté totale. Ça n'existe pas en réalité. Bien qu'on présente parfois les matériaux supraconducteur comme des matériaux à zéro résistance, ils ne le sont pas parce qu'ils présentent comme même une très faible résistance (même de l'ordre  $10^{-7}\Omega$ ).

## **k) Conducteurs en équilibre électrostatique**

On dit qu'un conducteur est en équilibre électrostatique s'il ne présente pas de « déplacement » de charges. Nous entendons dire, ici, par déplacement de charges: une circulation ordonnée des charges au sein ou à la surface du conducteur. En effet, tout conducteur possède un grand nombre de charges « libres », qui sont en agitation à toute température supérieure à zéro kelvin. Cependant, si on prend un volume élémentaire, on trouve statistiquement autant de charges entrant que de charges sortant à travers tout « point » de sa surface. Ainsi, on n'aura pas de migration de charges dans une direction préférentielle et la charge à l'intérieur du volume élémentaire reste constante en un laps de temps extrêmement court. C'est l'état d'équilibre électrostatique d'un conducteur électrique.

## I) Conducteur en équilibre électrostatique et son champ électrique interne

### • Cas d'un conducteur neutre

Suite à la définition de l'équilibre ci-dessus, le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur doit nécessairement être nul. Sinon, il y aura du déplacement des charges libres sous l'effet du champ électrique, même s'il est supposé extrêmement faible, tant que les porteurs de charges (électrons dans le cas des métaux) sont des particules aussi extrêmement légères.

**Conducteur neutre en équilibre électrostatique  $\Leftrightarrow$  Champ électrostatique interne nul**

$$\vec{E}_{int} = \vec{0}$$

### • Cas d'un conducteur chargé

En fait, la définition précédente est valable pour les conducteurs neutres ou chargés, plongés dans un champ électrique ou non, à l'intérieur ou sur leurs surfaces.

En plus, dans le cas d'un conducteur chargé en équilibre, la charge supplémentaire (positive : cas d'un déficit d'électrons, ou négative : cas d'un excès d'électrons) doit nécessairement se répartir sur sa surface. Effectivement, s'il y aurait le cas contraire, il y aurait des lignes de champ qui arriveraient (ou partiraient, selon le signe de charges) aux charges, et ainsi on aurait un champ à l'intérieur du conducteur. Ce qui ramènera le conducteur hors équilibre électrostatique (voir figure II-27).

**La charge supplémentaire d'un conducteur en équilibre électrostatique doit nécessairement se répartir sur sa surface.**

$$\rho_{int} = 0$$

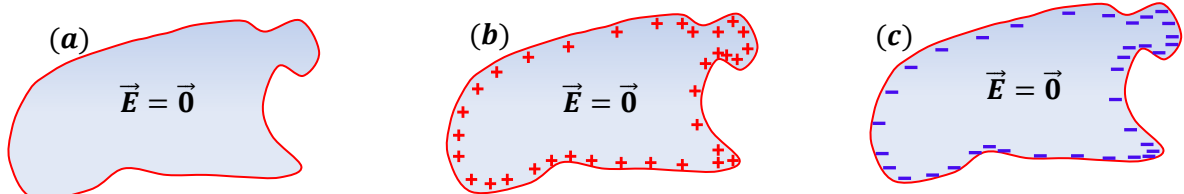


Figure II-27 Champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre : a) neutre, b) chargé positivement, c) chargé négativement



En outre le champ électrostatique créé par un conducteur en équilibre est perpendiculaire à la surface juste à proximité d'elle. En effet si ce n'est pas le cas, la composante tangentielle du champ travaille pour déplacer les charges sur la surface et on n'aura pas l'état d'équilibre. La figure II-28 présente une configuration schématique de la direction du champ électrostatique juste à proximité de la surface d'un conducteur chargé positivement et en équilibre. Le champ à l'intérieur du conducteur est nul.

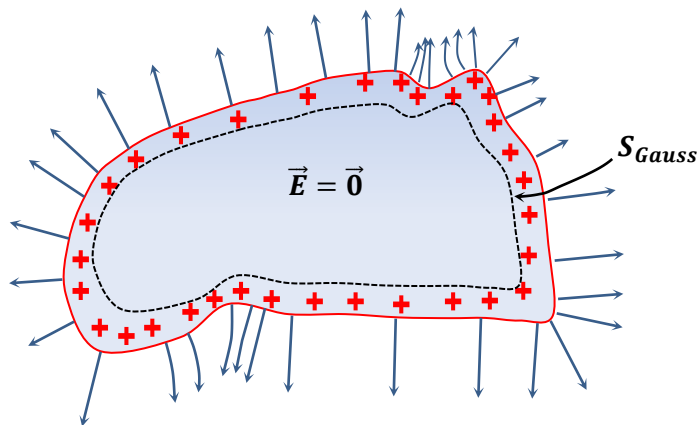


Figure II-28 Direction du champ électrostatique juste à proximité de la surface d'un conducteur chargé positivement et en équilibre

Ce résultat peut être démontré en utilisant le théorème de Gauss. En effet, choisissant la surface de Gauss une surface fermée qui entoure le conducteur juste à proximité inférieure de sa surface. C'est celle représentée par un trait noir discontinu sur la figure II-2

$$\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \vec{0} \text{ en équilibre}$$

Alors :  $Q_{int} = 0$  donc la charge en excès est sur la surface du conducteur

Prenons maintenant le cas d'un conducteur sphérique chargé négativement en l'absence d'un champ électrique externe. En équilibre électrostatique, la distribution de la charge sur la surface est équitable (figure II-29). Cela revient à la symétrie sphérique du conducteur. Les lignes du champ, juste à proximité extérieur du conducteur sont perpendiculaires en tout point de sa surface. Le champ électrostatique à l'intérieur est bien sûr nul dans ce cas.

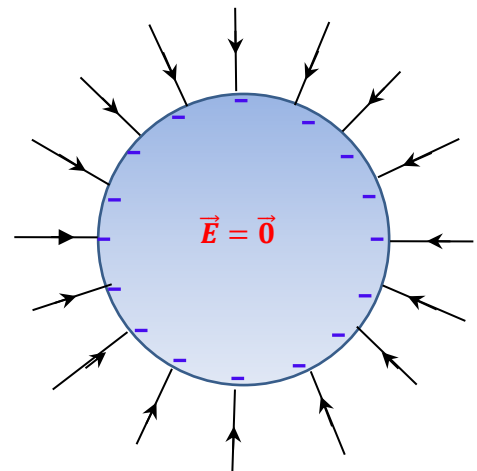


Figure II-29 distribution équitable de la charge sur un conducteur sphérique.

- **Cas d'un conducteur neutre avec cavité**

Considérons maintenant un conducteur neutre avec cavité. Nous distinguons deux cas : La cavité ne contient pas de charges et la cavité contient de la charge. Appliquons le théorème de Gauss, en choisissant les surfaces de gauss comme il est montré sur la figure II-4.

Dans le cas où la cavité ne contient pas de charge, et prenons  $S_{Gauss}$  à l'intérieur de la cavité ou à l'intérieur du matériau, nous aurons :

$$\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{à l'intérieur de la surface de Gauss, en équilibre})$$

Donc :  $Q_{int} = 0 \Rightarrow$  aucune charge en excès ni dans le matériau ni à l'intérieur de la cavité

Dans le cas où la cavité contient une charge  $Q$ , et prenons  $S_{Gauss}$  à l'intérieur de la cavité :

L'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon} \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq \vec{0}$$

Examinons maintenant le champ et la répartition des charges à l'intérieur de la « substance » du matériau.

L'application du théorème de Gauss, en choisissant la surface fermée juste au-dessus de la surface de la cavité, conduit à :

$$\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} = 0 \quad \text{parce que} \quad \vec{E} = \vec{0} \quad \text{à cause de l'équilibre électrostatique.}$$

$$\Rightarrow Q_{int} = 0$$

Mais, on sait qu'il y a  $Q$  à l'intérieur de la cavité  $\Rightarrow$  une charge  $-Q$  est juste sur la surface interne du matériau (surface de la cavité), ce qui implique qu'on a une séparation de charge.

Encore une fois, on applique le même théorème, en choisissant la surface fermée juste en-dessous de la surface extérieure du conducteur, on aura :

$$\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} = 0$$

parce que  $\vec{E} = \vec{0}$  à cause de l'équilibre électrostatique.

Cela conduit à conclure qu'une charge égale à  $Q$  est répartie sur la surface extérieure du matériau. Son origine est la séparation de charge mentionnée ci-dessus.

Cette configuration est récapitulée sur la figure II-30

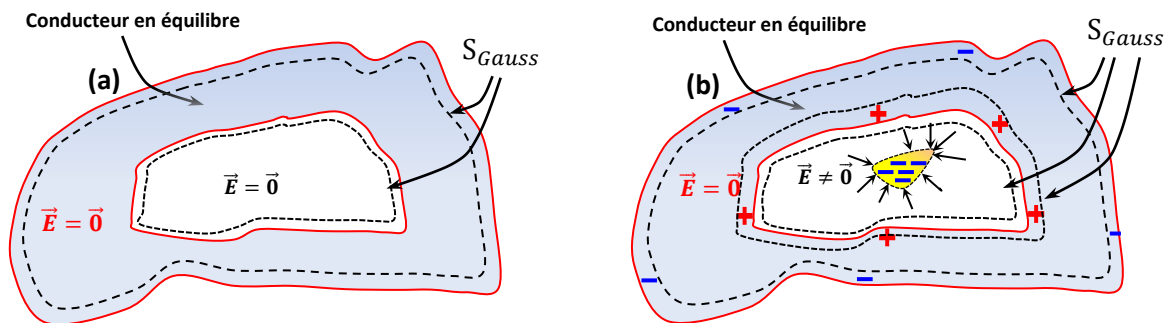


Figure II-30 : Conducteur avec cavité en équilibre électrostatique : (a) Cavité contient de la charge ; (b) cavité ne contient pas de charges

Nous rappelons ici le lecteur que  $\vec{E}$  dans l'équation du théorème de Gauss représente le champ électrostatique sur la surface fermée (de Gauss). Le choix de cette dernière indique le lieu où on cherche l'expression de  $\vec{E}$ . Dans le théorème de Gauss la seule condition imposée pour cette surface est qu'elle soit fermée. Les différents choix qu'on a utilisés, ci-dessus, sont basés sur nos objectifs à chaque fois.

### m) Conducteurs en équilibre électrostatique sous un champ électrique

- Cas d'un conducteur neutre

Appliquons un champ électrostatique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  à un conducteur électrique. Avant l'équilibre, le conducteur passe par une phase transitoire où le champ électrique traverse le conducteur et les charges libres à l'intérieur (les électrons) subissent une force électrique  $\vec{F}_{elec}$ . Une migration collective des électrons s'installe, dans le sens inverse du champ  $\vec{E}_{ext}$ , en un laps de temps extrêmement court, qui durera en général moins d'une nanoseconde pour les bons conducteurs. On aura d'un côté une zone désertée d'électrons et dans l'autre une zone en excès en électrons (voir figure II-31.b).

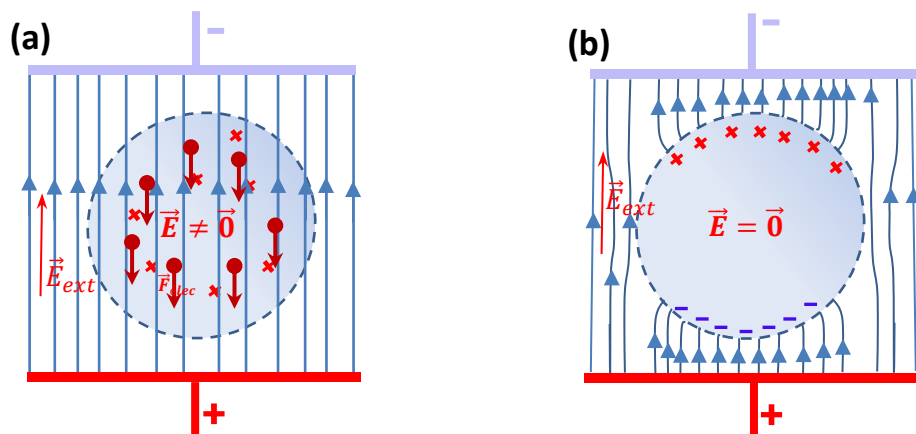


Figure II-31 Conducteur électriquement neutre sous un champ électrique : (a) à l'état transitoire et (b) à l'état d'équilibre

#### • Cas d'un conducteur chargé

Dans le cas d'un conducteur chargé d'une charge  $Q$ , l'application d'un champ électrostatique extérieur faible  $\vec{E}_{ext}$  suffit pour transporter les charges vers l'un des côtés du conducteur. Cependant, une augmentation assez suffisante de  $\vec{E}_{ext}$  peut créer une séparation de charges de sorte que la charge totale du conducteur reste  $Q$ . La figure II-32 (a) montre l'isolation des charges négatives dans le côté droit du conducteur sous l'effet d'un assez faible champ et sur (b), en plus de cette isolation on voit la création d'une séparation de charges sous l'effet d'un champ électrique assez fort.

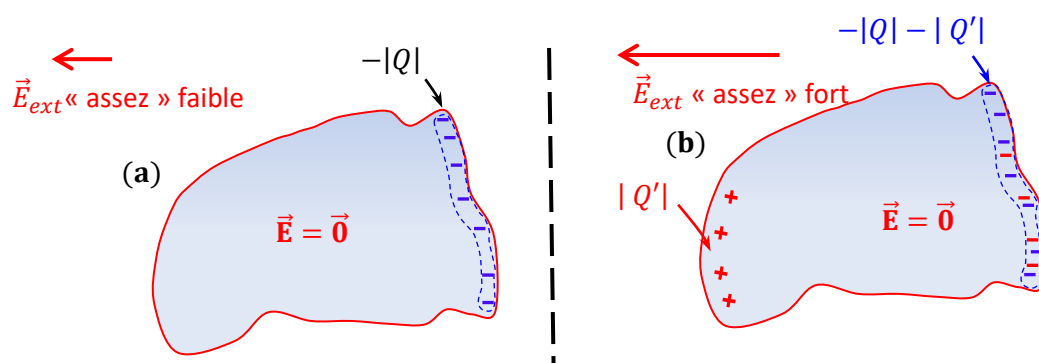


Figure II-32 Conducteur chargé négativement en équilibre et sous un champ extérieur  $\vec{E}_{ext}$ : (a) assez faible, (b) assez fort

Il faut noter ici que les charges en rouge dans la figure II-6 b) sont les charges concernées par la séparation après avoir augmenté le champ extérieur. Les charges positives correspondent à des atomes déficitaires d'électrons transportés au côté droit (en rouge).

- **Cas d'un conducteur chargé avec cavité : la cage de Faraday**

Appliquons maintenant un champ électrostatique à un conducteur *neutre* et qui contient une cavité entièrement entourée par le conducteur. En présence d'un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  et en équilibre, la configuration de séparation des charges est schématisée sur la figure II-33.

L'application du théorème de Gauss de la même manière qu'on a fait ci-dessus conduit à :

- A l'intérieur du conducteur le champ électrostatique est nul ;
- A l'intérieur de la cavité le champ électrostatique est nul ;
- Pas de charges sur la surface interne du conducteur;

On arrive aux mêmes résultats pour le cas d'un conducteur avec cavité chargé et plongé dans un champ électrique.

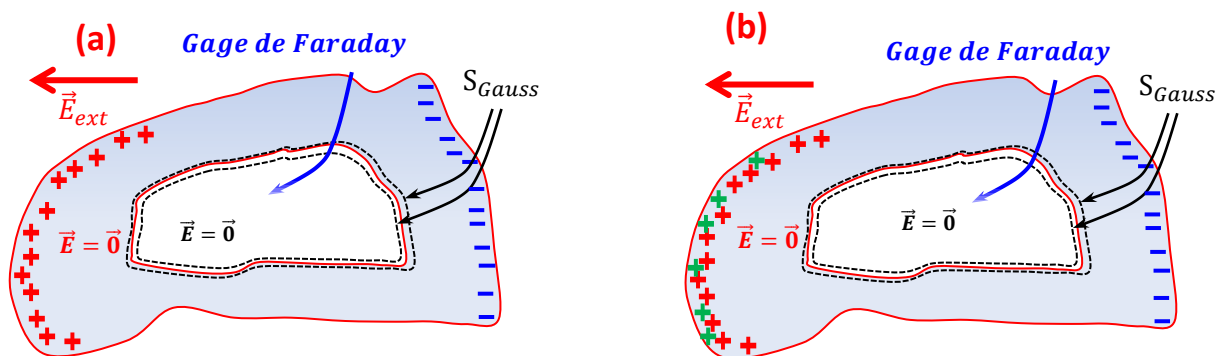


Figure II-33 Cage de Faraday : (a) cas d'un conducteur neutre avec cavité ; (b) cas d'un conducteur chargé avec cavité.

**Remarque :**

La cage de Faraday est utilisée pour la protection des appareils sensibles aux champs électriques.

**En conclusion**

**Le champ électrique ne traverse jamais un conducteur en équilibre électrostatique.**

### a) Le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre-Théorème de Coulomb

Nous avons montré dans la section précédente que le champ électrostatique est perpendiculaire, juste aux points voisins, à la surface du côté extérieur d'un conducteur chargé en équilibre. Aussi nous avons démontré que la charge en excès se répartit sur sa surface. Nous allons calculer maintenant son module.

Considérons un conducteur de forme irrégulière, chargé et en état d'équilibre. La densité de charge n'est pas constante sur l'ensemble de la sa surface comme le montre la figure II-34.

Appliquons le théorème de Gauss localement aux alentours d'un point  $P$ , infiniment voisin de la surface du conducteur. Choisissons la surface de Gauss  $S_G$  sous forme d'un cylindre tel qu'il est montré sur la figure II-34. Elle est constituée de trois surfaces :  $S_1, S_2$  et  $S_3$  :

Alors 
$$S_G = S_1 + S_2 + S_3$$

Nous avons :

$$\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1+S_2+S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

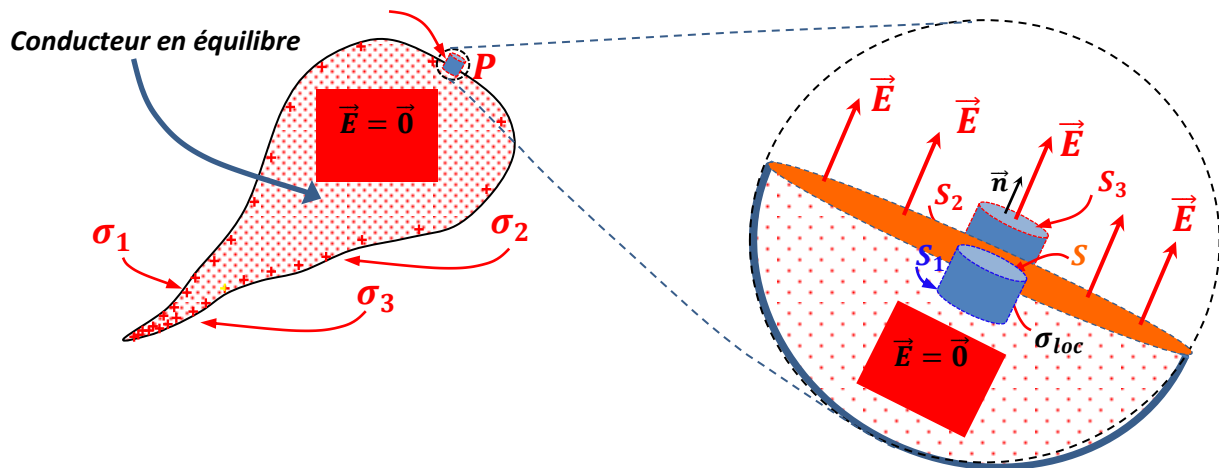


Figure II-34 Conducteur en équilibre électrostatique et agrandissement d'échelle pour l'application du théorème de Gauss.

A l'intérieur du conducteur, le champ:  $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = 0$

Sur la surface  $S_2$  le champ :  $\vec{E} \perp d\vec{S}_2 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = 0$

Ainsi :  $\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$

Sur  $S_3$ :  $\vec{E} \parallel d\vec{S}_3$  ; alors  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = E \cdot dS_3$  et  $\int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \int_{S_3} E \cdot dS_3$

Au voisinage de la surface et sur une très petite surface  $S_3$  le champ reste constant.

Alors :  $\int_{S_3} E \cdot dS_3 = E \int_{S_3} dS_3 = E \cdot S_3$  ; avec  $S_3 = S$

On aura donc :

$$\Phi = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + 0 + E \cdot S_3 = E \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Calculons maintenant  $Q_{int}$  :  $Q_{int} = \int dq = \int_S \sigma_{loc} dS = \sigma_{loc} \int_S dS = \sigma_{loc} \cdot S$

Parce que localement :  $\sigma_{loc} = \text{constante}$

Alors :  $E \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon} = \frac{\sigma_{loc} \cdot S}{\epsilon}$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma_{loc}}{\epsilon} \quad \text{ou encore} \quad \vec{E} = \frac{\sigma_{loc}}{\epsilon} \vec{n} \quad \dots\dots\dots (I-47)$$

**Le champ électrostatique au voisinage (à proximité immédiate) d'un conducteur à l'équilibre et chargé d'une densité de charges surfacique locale  $\sigma_{loc}$ , est :**

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{loc}}{\epsilon} \vec{n}$$

## II - 7 Pression électrostatique

### e) Expression de la pression électrostatique

La pression électrostatique, notée  $P$ , est la force par unité de surface exercée perpendiculairement sur la surface d'un conducteur chargé. Elle est dirigée de l'intérieur vers l'extérieur et tend à arracher les charges du conducteur. Son expression est donnée par l'éq.I-47 :

$$P = \frac{(\sigma_{loc})^2}{2 \cdot \epsilon} \quad \dots\dots\dots (eq.I-47)$$

### f) Démonstration :

Considérons la configuration donnée sur la figure II-35 et définissons les différents éléments y apparaissent. P est un point de la surface extérieure du conducteur, entouré par une surface  $dS$ , considérée chargée positivement. Deux point infiniment voisins  $M$  et  $M'$ .  $\vec{E}_1$  champ créé par  $dq$

dans  $dS$  en  $M$  et  $M'$ .  $\vec{E}_2$  champ créé par les charges du reste du conducteur à l'exception de  $dq$  dans  $dS$  en  $M$  et  $M'$ .

On a :  $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$  et  $\vec{E}_2(M) = \vec{E}_2(M')$  par continuité ( $M$  et  $M'$  sont infiniment voisins).

A l'intérieur du conducteur qui est en équilibre :  $\vec{E} = \vec{E}_1(M') + \vec{E}_2(M') = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{E}_2(M') = -\vec{E}_1(M') = \vec{E}_1(M) = \vec{E}_2(M)$$

Mais en  $M$  :  $\vec{E} = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = 2 \cdot \vec{E}_1(M)$

Aussi on a (théorème de Coulomb) :  $\vec{E} = \frac{\sigma_{loc}}{\varepsilon} \vec{n}$

$$\Rightarrow 2 \cdot \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma_{loc}}{\varepsilon} \vec{n} \Rightarrow \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma_{loc}}{2\varepsilon} \vec{n}$$

Rappelons que  $\vec{E}_1(M)$  est le champ électrostatique créé par l'ensemble du conducteur (sauf  $dq$ ) en un point  $M$  infiniment voisins à  $dq$  sur  $dS$ .

Ainsi la force électrostatique subit par  $dq$  est :

$$d\vec{F} = dq \vec{E} = \sigma_{loc} dS \cdot \frac{\sigma_{loc}}{2\varepsilon} \vec{n}$$

On sait que par définition :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma_{loc} dS \frac{\sigma_{loc}}{2\varepsilon}}{dS} = \frac{(\sigma_{loc})^2}{2\varepsilon}$$

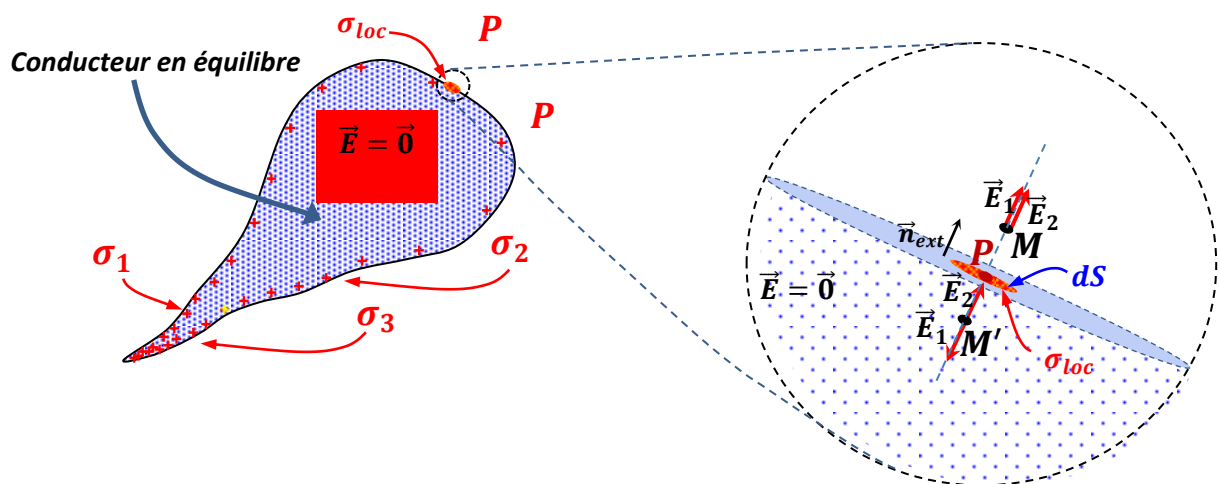


Figure II-35 Conducteur en équilibre électrostatique et agrandissement d'échelle pour le calcul de la force  $\vec{F}$  subit par  $dq$  en  $ds$ .



## II – 8 Capacité d'un conducteur et d'un condensateur

### g) Capacité d'un conducteur

Prenons un conducteur chargé d'une charge  $Q_0$  et considéré à l'équilibre électrostatique. Considérons un point  $P$  de la surface. La charge  $Q_0$  se répartit sur la surface du conducteur en établissant une distribution locale  $\sigma(P)$  de sorte que le potentiel de en tout point du conducteur soit  $V_0$ .

Le potentiel créé par le conducteur chargé en un point  $M$  est donc :

$$V(M) = \int \frac{K \cdot dQ}{PM} = \int \frac{K \cdot dQ}{r} = \iint \frac{K \cdot \sigma \cdot dS}{r};$$

par convention :  $V(\infty) = 0$

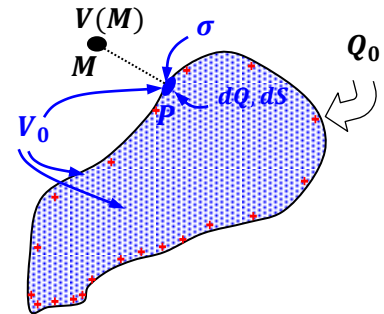


Figure II-36 Conducteur chargé par  $Q_0$  à  $V_0$

Rajoutons maintenant de la charge de sorte que la charge totale du conducteur sera :

$$Q' = \lambda \cdot Q_0 \dots\dots\dots (*)$$

La charge se répartie donc de sorte que le potentiel  $V'(M)$  sera constant, après l'établissement de l'équilibre, et la densité de charge sera :  $\sigma' = \lambda \sigma$  ; Alors :

$$V'(M) = \int \frac{K \cdot dQ'}{r} = \iint \frac{K \cdot \sigma' \cdot dS}{r} = \iint \frac{K \cdot \lambda \sigma \cdot dS}{r} = \lambda \iint \frac{K \cdot \sigma \cdot dS}{r} = \lambda \cdot V(M)$$

$$\Rightarrow V'(M) = \lambda \cdot V(M) \dots\dots\dots (**)$$

Ce nouveau potentiel vérifie les conditions au limites (continuité du la distribution du champ) ; alors :

$$V'(M \in \text{conducteur}) = V'(M \equiv P) = \lambda \cdot V(M \equiv P) = \lambda \cdot V_0 \dots\dots\dots (***)$$

$$(*), (**) \text{ et } (***) \Rightarrow \frac{Q'}{V'} = \frac{Q_0}{V_0} = \lambda = \text{constante} > 0$$

Cette constante est appelée la capacité du conducteur. Elle est la quantité de charge qu'on peut ajouter au conducteur pour élever son potentiel d'une unité. Elle est notée :

$$C = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q_0}{V_0} = \frac{Q}{V} > 0 \dots\dots\dots (I-48)$$

#### Définition

La capacité électrostatique d'un conducteur isolé à l'équilibre est définie par :  $C = \frac{Q}{V}$  ;

Où :  $Q$  est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel  $V$ .

Son unité est le Farade (F) en hommage au physicien et chimiste anglais : Faraday (1791-1867).

Le farade est définie dans le SI comme suit :

$$1F = \frac{C}{V} = \frac{C^2}{J} = \frac{C^2}{N \cdot m} = \frac{s^2 \cdot C^2}{m^2 \cdot kg} = \frac{s^4 \cdot A^2}{V^2 \cdot s^2}$$

**Remarque :**

1. La capacité d'un conducteur isolé est une grandeur positive ;
2. La capacité d'un conducteur isolé est une constante caractéristique de sa géométrie.
3. En pratique, on utilise généralement :

$$\text{le } \mu F = 10^{-6} F; \text{ le } nF = 10^{-9} F \text{ et le } pF = 10^{-12} F$$

**Exemple :**

Calculer la capacité d'un conducteur isolé à l'équilibre, sachant qu'il a la forme d'une sphérique de rayon  $R$  et chargé d'une charge  $Q$ .

**Solution :**

La répartition des charges sur la sphère est uniforme, du fait de la symétrie sphérique :  $\sigma = \text{Cte}$ .

Appliquons le théorème de Gauss, en choisissant la surface de Gauss une sphère de rayon  $r$  et de centre (O) (voir figure ci-contre).

$$\Phi = \oint_{S_{\text{sphère}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{\text{sphère}}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_{S_{\text{sphère}}} E \cdot dS = E \oint_{S_{\text{sphère}}} dS$$

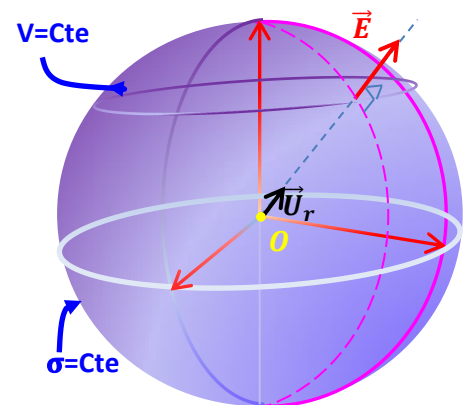


Figure II-37 : Sphère conductrice en équilibre

$$= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon \cdot 4\pi r^2} = \frac{Q}{\epsilon \cdot 4\pi r^2}$$

$$\text{Mais : } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\Rightarrow V = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{\varepsilon \cdot 4\pi r^2} dr = \frac{-Q}{\varepsilon \cdot 4\pi} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot R}$$

$$\text{La capacité de la sphère donc est : } C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot R}} = 4\pi\varepsilon \cdot R \quad \text{.....(I-49)}$$

*La capacité d'un conducteur sphérique est :  $C = 4\pi\varepsilon \cdot R$*

On remarque que la capacité  $C$  de la sphère conductrice ne dépend pas de  $Q$ , ni de  $V$ . Elle ne dépend que de  $R$ , qui est une caractéristique géométrique de la sphère.

## h) Electrification d'un conducteur et capacité d'un condensateur

### • Electrification d'un conducteur par influence

Nous avons déjà vu brièvement l'électrification par influence partielle dans la section (I-1-1 d). Appliquons ce type d'influence sur deux conducteurs  $C_1$  et  $C_2$ .  $C_1$  est chargé d'une charge  $Q > 0$  et  $C_2$  est électriquement neutre (voir figure II-38 a).

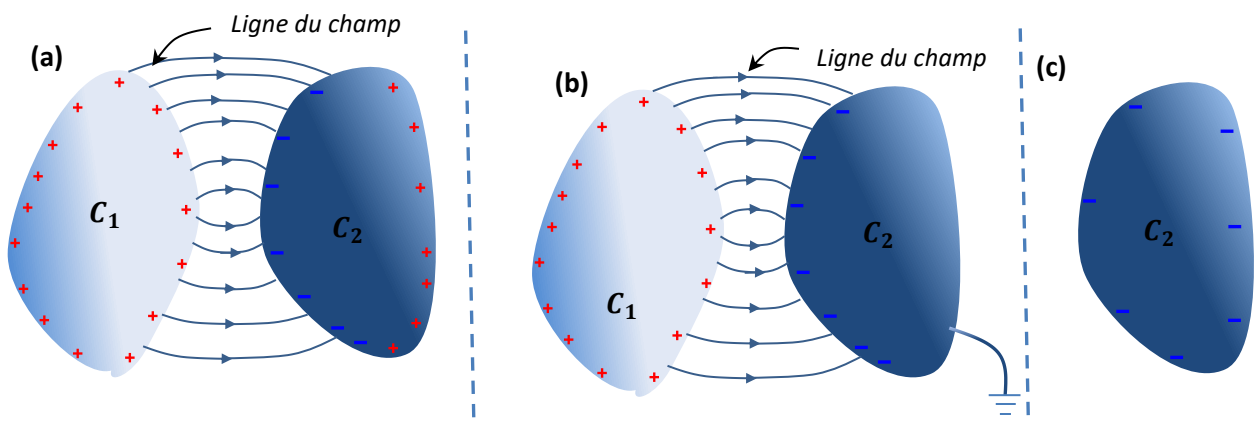


Figure II-38 Influence partielle,  $C_1$  chargé positivement,  $C_2$  neutre : a)  $C_2$  reste neutre avec une répartition non homogène ; b) mise à la terre et  $C_2$  n'est plus neutre ; c) isolation de  $C_2$  chargé

Après la mise à la terre, les charges positives du conducteur  $C_2$  se neutralisent par des électrons parvenant de la terre, et les charges négatives restent maintenues dans le côté gauche par les charges positives du conducteur  $C_1$ .

En supprimant l'influence du conducteur  $C_1$ , les charges  $C_2$  se répartissent sur l'ensemble du conducteur pour atteindre l'équilibre à un potentiel constant en tout point de ce dernier.

Prenons maintenant le cas où le conducteur  $C_1$  entoure  $C_2$ . Toutes les lignes du champ provenant de  $C_1$  atteignent  $C_2$ . On dit que l'influence est totale. On présente sur la figure II-39 la configuration correspondante avec la répartition des charges sur les différentes régions. On remarque une séparation des charges dans le conducteur neutre  $C_2$  de sorte qu'une charge  $-Q$  se répartissent sur la surface de la cavité et une charge  $+Q$  se répartissent sur la surface externe de  $C_2$ . A cause de l'équilibre, les champs dans  $C_1$  et  $C_2$  sont nuls.

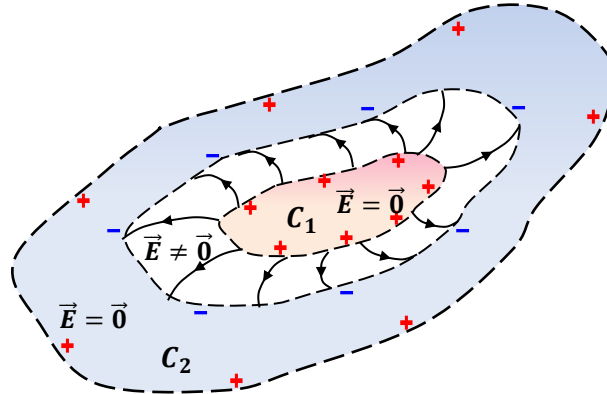


Figure II-39 Electrification pas influence totale: toutes les lignes du champ partant du conducteur

- **Capacité d'un condensateur**

Neutralisant maintenant les charges positives du conducteur  $C_2$  en le reliant à la terre puis en le détachant d'elle. Les deux conducteurs sont alors portés à deux différents potentiels :  $V_1$  et  $V_2$ . L'ensemble constitué de ces deux conducteurs forme un condensateur.

La capacité, notée  $C$ , d'un condensateur constitué de deux conducteurs portés à deux différents potentiels  $V_1$  et  $V_2$  (voir figure II-40), est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\Delta V} \dots\dots\dots (I-50)$$

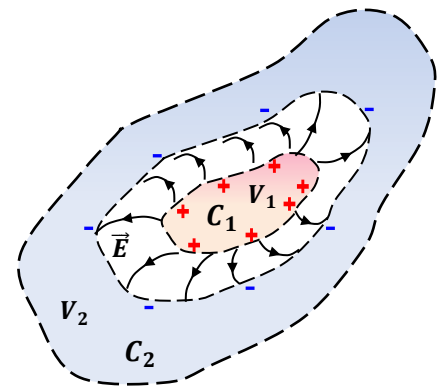


Figure II-40 Capacité d'un condensateur

**Exemple 1: Capacité d'un condensateur plan**

Un condensateur plan est un ensemble constitué de deux plaques planes distantes de  $d$ , de sorte que celle-ci soit négligeable devant les dimensions des plaques. Elles sont séparées d'un isolant de constante diélectrique  $\epsilon$ .

Nous avons déjà démontré que le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur est perpendiculaire et donné par l'éq. I-47. Il est aussi donné par :

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

Mais :  $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$  et  $d\vec{l} = dx \cdot \vec{i}$

et en utilisant l'éq. I-47 on aura :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \vec{i} \cdot dx \cdot \vec{i} = \frac{\sigma}{\epsilon} \int_0^d dx$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot d = \frac{Q}{\epsilon \cdot S} \cdot d$$

donc :  $\frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Rightarrow$

$$C = \frac{S \cdot \epsilon}{d} \dots \dots \dots (I - 51)$$

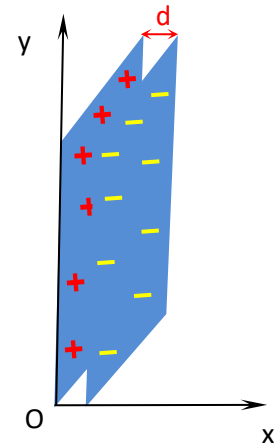


Figure II-41 Condensateur plan

Remarques :

1- La capacité  $C$  ne dépend que des caractéristiques géométriques du condensateur et de la constante diélectrique de l'isolat séparant des armatures.

2- L'éq. I-50 n'est valable qu'après la négligence des effets de bords. Cela est justifié **tant** que :  $d \ll L_1 \text{ et } L_2$

### Exemple 2: Capacité d'un condensateur cylindrique

Prenons un condensateur constitué de deux conducteurs cylindriques et coaxiaux (1) et (2), de rayons  $R_1$  et  $R_2$  respectivement chargés par  $+Q$  et  $-Q$  ( $Q > 0$ ) et porté à  $V_1$  et  $V_2$  (Voir figure II-42). Les dimensions  $R_1, R_2$  et  $L$  sont très grandes devant celle de l'épaisseur de l'isolant séparateur  $d$ . La constante diélectrique du séparateur est  $\epsilon$ .

La capacité de ce condensateur capacité est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\Delta V}$$

Calculons d'abord le champ électrostatique entre les deux armatures. Avec les conditions citées ci-dessus, le champ électrostatique entre les deux cylindres aura une intensité constante et une orientation radiale dirigé de (1) à (2).

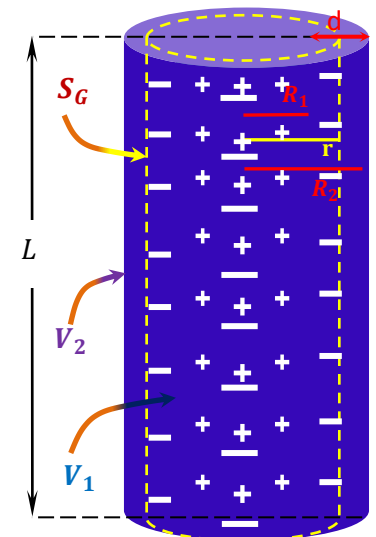


Figure II-42 Condensateur cylindrique

Appliquons le théorème de Gauss en choisissant la surface de fermée comme indiquée sur la figure II-15 :

$$\Phi = \oint_{S_{\text{cylindre}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L + S_1 + S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_{S_L} E \cdot dS = E \cdot \iint_{S_L} dS = E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon}$$

Avec  $S_1, S_2$  et  $S_L$  sont la surface de la base en bas, de la base en haut et la surface latérale du cylindre.

Donc :

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L} \vec{U}_r$$

Mais :  $V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L} \cdot \vec{U}_r \cdot dr \cdot \vec{U}_r = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \ln(r) \Big|_{R_1}^{R_2}$

Alors :  $V_1 - V_2 = \frac{Q}{\epsilon \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$  ; avec  $Q_{\text{int}} = Q$

Ainsi :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi L \epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \dots\dots\dots (I-52)$$

### Exemple 2: Capacité d'un condensateur sphérique

Considérons un condensateur constitué de deux conducteurs sphériques et concentriques (1) et (2), de rayons  $R_1$  et  $R_2$  respectivement ( $R_1 < R_2$ ) chargés par  $+Q$  et  $-Q$  ( $Q > 0$ ) et porté aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  (Voir figure II-43). Les dimensions  $R_1, R_2$  et  $L$  sont très grandes devant celle de l'épaisseur de l'isolant séparateur  $d$ . La constante diélectrique de l'isolant séparateur est  $\epsilon$ .

La capacité de ce condensateur est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\Delta V}$$

Avant d'entamer le calcul de  $\Delta V$ , calculons d'abord le champ électrostatique entre les deux armatures. Avec les conditions citées ci-dessus, le champ électrostatique entre les deux sphères aura une intensité constante et une orientation radiale dirigé de (1) à (2).

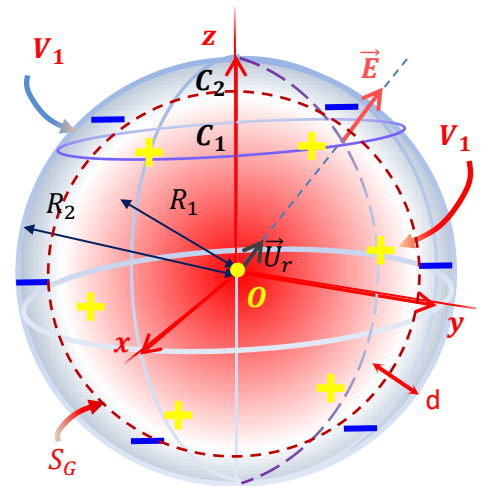


Figure II-43 Condensateur Sphérique

Appliquons le théorème de Gauss, en choisissant la surface fermée comme indiquée sur la figure II-16 :

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_G} (E \cdot \vec{U}_r) \cdot (dS \cdot \vec{U}_r) = \iint_{S_G} E \cdot dS = E \cdot \iint_{S_G} dS = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \vec{U}_r$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \vec{U}_r \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \vec{U}_r \cdot dr \cdot \vec{U}_r = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Alors la capacité d'un condensateur sphérique de rayon  $R_1 < R_2$  est :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

### i) Capacité d'un système condensateurs en série ou en parallèle

Dans la pratique, on trouve des systèmes constitué d'un ensemble de condensateur liés en série ou en parallèle qui peuvent être substitué d'un seul condensateur et vice versa. Les caractéristiques du condensateur équivalent peuvent être déterminées en respectant les règles qui suivent :

- Cas d'un système en série

Considérons un système de condensateurs en série comme il est montré dans la configuration de la figure (II-17).

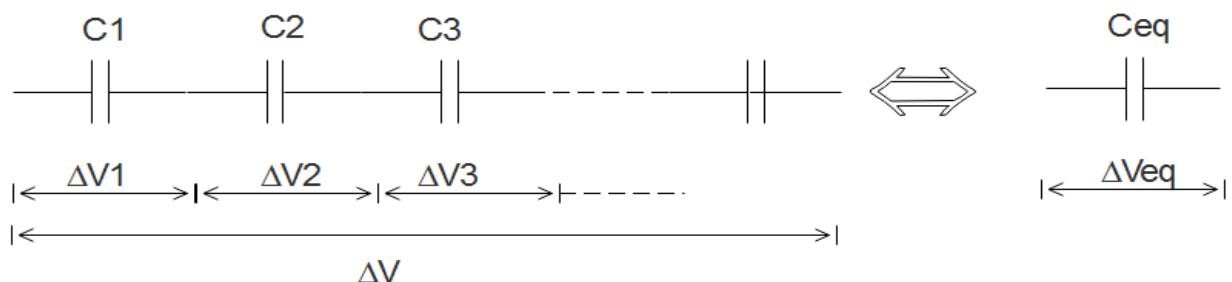


Figure II-44 Système de condensateurs en série

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n$$

Mais :  $\Delta V = \frac{Q}{C}$  et la capacité du condensateur équivalent est  $C$  ; alors :

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_1} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

La capacité  $C_{eq}$  d'un système à n condensateur de capacité  $C_i$  est donnée par :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

• **Cas d'un système en parallèle**

Considérons un système de condensateurs en parallèle tel qu'il est montré sur la configuration de la figure (II-18).

Nous avons :

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_1 + \dots + Q_n$$

Mais :  $Q_i = C_i \cdot \Delta V$  et la capacité du condensateur équivalent est  $Q_{tot} = C_{eq} \cdot \Delta V$  ;

alors :

$$C_{eq} \cdot \Delta V = C_1 \cdot \Delta V + C_2 \cdot \Delta V + \dots + C_n \cdot \Delta V$$

$$\Rightarrow C_{eq} \cdot \Delta V = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \Delta V$$

$$\Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

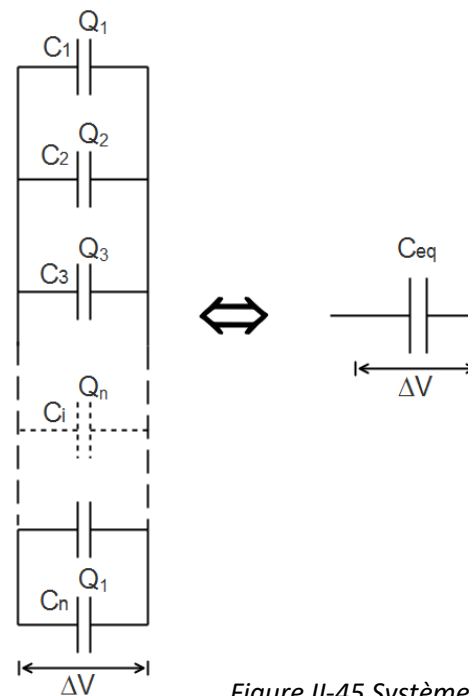


Figure II-45 Système de condensateurs en parallèle

La capacité  $C_{eq}$  d'un système à n condensateur de capacité  $C_i$  est donnée par :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



## **Chapitre III**

### **Electrocinétique**

**Dans ce chapitre ...**

## III-1 Conducteur électrique : autres considérations

## III-2 Loi d'Ohm

## g) Courant électrique

- Définitions
  - Courant de conduction
  - Courant de convection
- Sens conventionnel du courant électrique
- Intensité du courant électrique
- Courant électrique continue
- Courant électrique alternatif
- Unité de mesure
- Densité du courant

## h) Chute de tension à travers un conducteur

## i) Loi d'Ohm

- Relation : tension-courant électriques
- Résistance électrique
- Résistivité électrique
- Conductivité électrique

## III- 3 Loi de Joule

## c) Effet joule

## d) La loi de joule

- La puissance électrique
- Chaleur de l'effet joule

## III-4 Les circuits électriques

## d) Force électromotrice

## e) Définitions et éléments d'un circuit électrique simple

- Définition
- Éléments constitutants

## f) Résistance électrique équivalente dans un circuit électrique

- Définition de la résistance équivalente
- Cas de résistances en parallèle
- Cas de résistances en série

## III-5 Application de loi d'Ohm aux réseaux

- Calcul du courant, tension et résistance
- Pont diviseur de tension

## III-6 Lois de Kirchhoff

## c) La loi des nœuds

- Énoncé de la loi des nœuds par G. Kirchhoff
- Application

## d) La loi des mailles

- Énoncé de la loi des mailles par G. Kirchhoff
- Application

## III-7 Circuits équivalents

## j) Théorème de Thévenin

- Enoncé
- Détermination de  $R_{th}$  et  $E_{th}$
- Application

## k) Théorème de Northon

- Enoncé
- Détermination de  $R_{th}$  et  $E_{th}$

## l) Théorème de Kennelly

- Transformation  $\Delta$ -Y
- Transformation Y- $\Delta$

### III-1 Conducteur électrique : autres considérations

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné les conducteurs électriques en donnant leur définition, en les comparant avec les isolants, en étudiant leur neutralité électrique et son équilibre électrostatique.

On s'est intéressé, dans son étude d'équilibre, surtout à la répartition des charges dans les différents cas qu'on peut fréquenter, notamment lorsque le conducteur est chargé ou sous un champ électrostatique externe, ou encore lorsqu'on est devant une situation d'influence totale ou partielle. Nous avons examiné le champ électrostatique à l'intérieur et juste à proximité externe à l'équilibre quel que soit sa forme géométrique. Nous avons encore étudié son potentiel et sa capacité lorsqu'il est isolé ou proche d'un autre conducteur, neutre ou électriquement chargé.

Dans cette section, aussi bien que dans tous ce chapitre, nous allons présenter d'autres considérations en relation avec le mouvement des charges dans les conducteurs, tout en prenant en compte la nature métallique des conducteurs considérés. Cette considération nous conduit à accepter que le conducteur est constitué d'ions positifs et fixes et des électrons négatifs libres à se déplacer.

La répartition homogène des charges positives et négatives explique la neutralité électrique (locale et complète) du conducteur en l'absence d'un champ électrique externe et en équilibre électrostatique (figure III-1).

Plaçons maintenant le conducteur entre deux plaques différemment chargées, un champ électrostatique s'établit et une force électrique agisse sur les électrons. La configuration finale de la répartition des charges est montrée sur la figure III-1 (b).

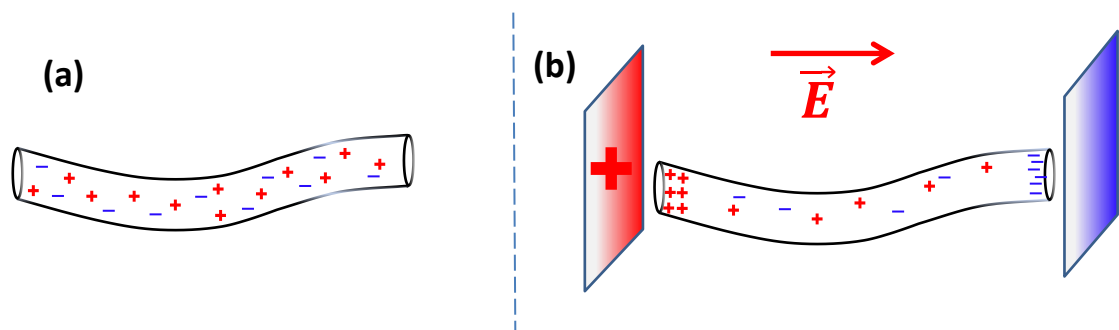


Figure III-1 Répartition des charges dans un conducteur: (a) en équilibre; (b) sous champ électrostatique (le conducteur est séparé des plaques chargées)

On attire l'attention du lecteur sur le fait de ne pas avoir d'échange de charges entre le conducteur et les deux plaques. Le conducteur est bien séparé des plaques. On constate aussi un excès et un déficit d'électrons qui s'établissent à proximité de la plaque positive et celle négative respectivement. Cette configuration s'établit en un laps du temps de l'ordre de grandeur du nanoseconde, après avoir chargé les deux plaques.

## II-2 Loi d'Ohm

### a) Courant électrique

Prenons maintenant le cas montré sur la figure III-1 (b) et accolons le conducteur aux plaques (voir figure III-2). Si les plaques peuvent être considérées comme des sources des charges (positives et négatives), tout en y maintenant une différence de potentiel ( $\Delta V = V_1 - V_2$ ), un passage des électrons s'établit en permanent, partant de la plaque négative vers la plaque positive (voir figure III-2). On appelle ce passage des charges : le courant électrique, et on note  $I$ .

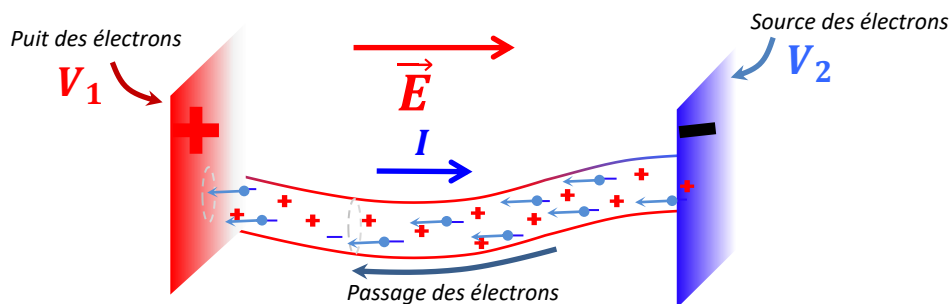


Figure III-2 : Passage en permanent des charges de la plaque positive à la plaque négative.

- **Définition :**

On appelle courant électrique tout déplacement ordonné d'ensemble de porteurs de charges électriques.

On distingue deux types courants électriques :

- **Courant de conduction**

Le courant de conduction est assuré par le déplacement des charges à l'intérieur d'un matériau conducteur. Ce déplacement n'est pas obligatoirement accompagné d'un déplacement du matériau lui-même.

**Exemple :** le passage des électrons dans un métal.

- **Courant de convection**

Le courant de convection est assuré par le passage des charges dans un matériau qui n'est pas obligatoirement conducteur. Les charges sont emportées avec le matériau.

Exemple : 1) une pièce isolante et chargée, sous forme d'un disque et qui tourne autour de son centre. Le passage des charges ici est assuré par la rotation du disque et non pas le déplacement des charges à l'intérieur du disque.

2) Ecoulement d'un fluide (liquide ou gaz) ionisé ou contenant des charges. Le passage des charges est assuré par l'écoulement de tout le fluide et non pas par le déplacement des charges à l'intérieur du fluide.

**Remarque :**

Dans ce cours, on s'intéresse uniquement au courant de conduction assuré par le déplacement des électrons dans métal.

- **Sens conventionnel du courant électrique**

Le sens du courant électrique est dit conventionnel parce qu'il résulte d'une convention. Alors, par convention le courant électrique circule de la source positive vers la source négative de charge. Donc sa direction est dans le sens inverse de celle du mouvement des électrons (voir figure III-1).

- **Intensité du courant électrique**

Dans le domaine de l'électrocinétique, l'intensité du courant électrique est une grandeur principale. Elle est scalaire et définie comme la charge qui traverse une surface  $S$  d'une section du conducteur dans l'unité du temps. Son expression est donnée par l'éq. III-1.

$$I = \frac{dq}{dt} \dots\dots\dots \text{(eq. III-1)}$$

Avec  $q$  est la charge électrique traversant  $S$  en un laps de temps  $dt$ .

- **Courant électrique continu**

Le courant continu est un courant électrique dont le mouvement des charges est quasi continu dans un conducteur, dans une même direction et de façon régulière. Son intensité est donc indépendante du temps. Il peut être abrégé par CC (Courant Continu) et parfois DC (pour Direct Current en anglais).

- **Courant électrique alternatif**

Contrairement au courant continu, le courant alternatif est un courant dont les charges modifient alternativement le sens de leur trajet. Généralement, on trouve dans la pratique celui dit périodique, pour lequel ces charges changent leurs sens de mouvement deux fois par période en transportant des quantités d'électricité alternativement égales dans un sens et dans l'autre. Ce

courant a donc une composante moyenne (continue) nulle. Il peut être abrégé par CA (ou ac pour **a**lternatif **c**urrent en anglais).

- **Unité de mesure**

Dans le système international d'unités (SI), le courant électrique est mesuré par l'Ampère (noté A), attribué en hommage du physicien, mathématicien et chimiste français André-Marie **Ampère** (1775-1836). L'ampère a été défini par le Comité international des poids et mesures comme suit :

Un courant d'un **ampère** correspond au transport d'une charge électrique d'un coulomb par seconde à travers une surface.

Ou plus précisément :

*L'**ampère** est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à  $2 \times 10^{-7}$  newton par mètre de longueur.*

- **Densité du courant**

Nous avons vu que le courant électrique décrit la quantité de charge qui traverse une surface d'un conducteur dans l'unité du temps. La densité de courant décrit la quantité de charge par unité de temps et, en plus, par unité de surface. C'est une description du courant local.

Examinons bien maintenant la surface traversée  $\vec{S}$  par les charges (électrons), leur « débit » et leurs vecteurs vitesses  $\vec{V}$  en un laps de temps  $dt$ . Nous constatons aisément que le courant électrique dépend de l'orientation de  $\vec{S}$  par rapport à celle de  $\vec{V}$  (voir figure III-3). Cette orientation est exprimée par un produit scalaire entre les deux vecteurs, dans l'expression de la densité du courant :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S}; \quad \text{avec } \vec{S} = S \cdot \vec{n} \quad \dots\dots\dots (\text{eq. III-2})$$

Ou encore :

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \cdot \vec{u} \quad \dots\dots\dots (\text{eq. III-3})$$

$\vec{u}$ : Vecteur unitaire porté dans le sens inverse de  $\vec{V}_e$

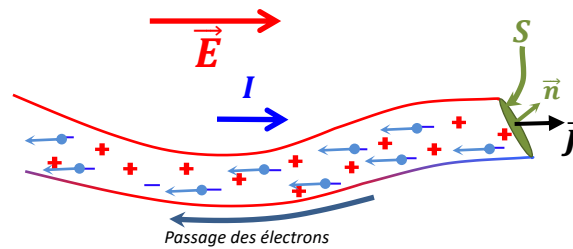


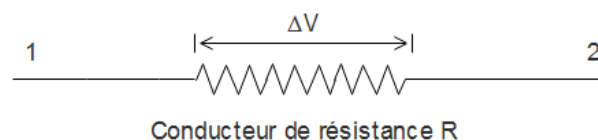
Figure III-3 : Relation entre la densité du courant  $\vec{J}$  et vecteur unitaire  $\vec{n}$

## b) Chute de tension à travers un conducteur

Le passage des électrons dans un conducteur électrique n'est pas totalement libre. Après avoir atteint une certaine vitesse, et par conséquent une certaine énergie cinétique, les collisions inélastiques entre les électrons et les atomes constituant commencent, en établissant un échange d'énergie. L'énergie cinétique perdue par les électrons est acquise par les atomes. De tel phénomène provoque une chute de tension électrique entre les deux bornes du matériau.

En fait ce n'est pas seulement les chocs inélastiques qui sont derrière la chute de tension, mais aussi les différents défauts cristallographiques, les propriétés électroniques des éléments constitutifs, l'état vibratoire des atomes, etc. Tous ces « obstacles » constituent ce qu'on appellera dans les sections suivantes : résistance électrique. Elle constitue une propriété intrinsèque du conducteur et elle conduit à une chute de tension à travers le conducteur.

$$\Delta V = \Delta V_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



## c) Loi d'Ohm

La loi établit une relation entre le courant  $I$  qui traverse un conducteur métallique, à température constante, soumis à une différence de potentiel  $\Delta V$  et permet de définir sa résistance et déterminer sa valeur.

### • Relation : tension-courant électriques;

Les travaux du physicien allemand George Ohm ont conduit à la découverte d'une loi très importante et très utilisée par la suite, entre deux principaux paramètres électriques, en 1828. Ces paramètres sont le courant  $I$  qui traverse un conducteur métallique, à température constante, soumis à une différence de potentiel  $\Delta V$ . Elle est donnée par :



$$\frac{\Delta V}{I} = \text{constante} \dots\dots\dots (\text{eq. III-4})$$

### • Résistance électrique

Nous avons déjà donné les principaux paramètres qui affectent la résistance électrique d'un conducteur. Elle traduit la capacité du matériau à s'opposer au passage des charges électriques. Elle considérée l'une des principales causes de la perte de l'énergie électrique. La résistance électrique est souvent désignée par la lettre  $R$  ou  $r$ . Son expression est donnée par la loi d'Ohm :

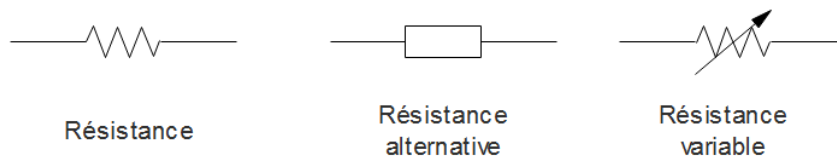
$$R = \frac{\Delta V}{I} \dots\dots\dots (\text{eq. III-5})$$

$\Delta V$  : tension ou différence de potentiel ;  $I$  : le courant traversant le conducteur ;  
L'unité dérivée de la résistance, dans le système international, est l'ohm (symbole  $\Omega$ ). Ce nom est donné en l'honneur du physicien allemand Georg Ohm.

$$\text{L'ohm donc correspond à : } \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} = \frac{V}{A}$$

Ou encore en unités fondamentales :  $1 \Omega = 1 m^2 kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2} = 1 m^2 kg \cdot s \cdot C^{-2}$

Dans les circuits électriques (on en parlera dans les sections qui suivent) la résistance est représenté par :



### • Résistivité électrique

#### Définition :

La résistivité électrique est une caractéristique électrique intrinsèque du matériau. Elle correspond à la résistance d'un tronçon du matériau d'un mètre de longueur et d'un mètre carré de section. Elle est souvent désignée par la lettre grecque Rho ( $\rho$ ). Son expression est donc donnée pour un matériau de longueur  $L$  et de section  $S$ , par :

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \dots\dots\dots (\text{eq. III-6})$$

La résistivité est exprimée en :  $Ohm.m$

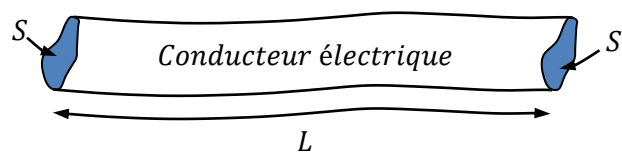


Figure III-4 : Dimension d'un conducteur pour exprimer la résistivité

### • Conductivité électrique

Contrairement à la résistivité, la conductivité est définie comme l'aptitude à laisser les charges électriques à se déplacer librement. C'est l'inverse de la résistivité. Elle est désigné souvent par la lettre grecque sigma (  $\sigma$  ). Son expression est :

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{L}{R \cdot S} \quad \text{ou encore} \quad G = \frac{\sigma \cdot S}{L} = \frac{1}{R} \quad \dots\dots\dots (\text{eq. III-7})$$

Elle est exprimée en : mho par mètre (Symbol  $\Omega \cdot m^{-1}$ ), qui est égale au siemens ou à :  $(\Omega \cdot m)^{-1}$ .

## II- 3 Loi de Joule

### e) Effet Joule

Nous avons expliqué, dans la section III-2-b, une partie de la chute de tension dans un conducteur par les collisions inélastique des électrons et des atomes. Cet effet est accompagné d'une perte d'énergie cinétique des électrons. En fait, cette énergie n'a pas été « perdue », mais une partie s'est transformée en chaleur.

Tout dépend de la quantité d'énergie échangée et de celle éventuellement utilisée par l'atome pour tel ou tel utilisation, l'énergie atteinte par les atomes s'est transformée en quelques éventuelles situations. Elle peut être utilisée pour l'ionisation de l'atome ou pour son l'excitation en déplaçant un électron (ou plus) d'un niveau énergétique à un autres plus haut, ou encore pour le faire vibrer si l'énergie n'est pas assez suffisante. Ce dernier cas se manifeste à l'échelle macroscopique par une augmentation de la température de l'ensemble du conducteur. C'est une **transformation de l'énergie électrique en chaleur (énergie thermique)**. On appelle cet effet : **l'effet Joule**. Il a été nommé par ce nom, à l'honneur du physicien James Prescott **Joule** qui l'a découvert vers 1860.

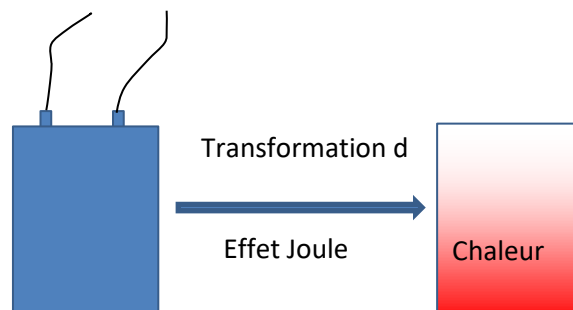


Figure III-5 Transformation d'énergie par effet joule

## f) La loi de joule :

- **La puissance électrique**

### Définitions :

La puissance électrique d'un générateur (ou d'un récepteur) (notée :  $P$ ), est l'énergie électrique échangée entre les charges électriques et le générateur (ou le récepteur) par unité de temps.

S'il s'agit d'une résistance, elle est définie comme l'énergie par unité de temps nécessaire pour maintenir le courant en circulation, elle vaut :

$$P = I \cdot \Delta V \dots\dots\dots (\text{eq. III-8})$$

$P$  : la puissance électrique ;  $I$  : le courant traversant le conducteur ;  $\Delta V$  : la différence de potentiel entre les deux extrémités du conducteur.

Mais on sait (d'après l'eq. III-5) que:  $\Delta V = R \cdot I$  ;

Alors :  $P = I \cdot R \cdot I$

$$\Rightarrow P = R \cdot I^2 \dots\dots\dots (\text{eq. III - 9})$$

Cette dernière équation est appelée la **loi de Joule**.

- **Chaleur de l'effet joule**

La puissance  $P$  est l'énergie consommée par l'élément résistif en une seconde. En une durée de  $\Delta t$ , cette énergie vaut donc :  $P \cdot \Delta t$ . Si l'élément transforme toute l'énergie consommée en chaleur par effet joule, alors la chaleur  $Q_{\text{joule}} = P \cdot \Delta t$

$$\Rightarrow Q_{\text{joule}} = R \cdot I^2 \cdot \Delta t \dots\dots\dots (\text{eq. III - 10}) ;$$

$\Delta t$  est la durée pendant laquelle le courant circule dans l'élément résistif.

## II-4 Les circuits électriques

### a) Force électromotrice

La force électromotrice est une caractéristique fondamentale d'un générateur. Malgré son nom, elle n'est une force c'est une grandeur scalaire homogène à une différence de potentiel et elle s'exprime en volts.

La force électromotrice (f.e.m.) correspond au travail que doit fournir le générateur aux charges pour maintenir le courant, en « circuit ouvert » ou à « vide ». Elle est généralement désignée par  $E$ .

$$E = V_A - V_B = V_+ - V_- \dots \dots \dots \text{(eq. III - 11)}$$

Dans un circuit une force électromotrice est représentée par :

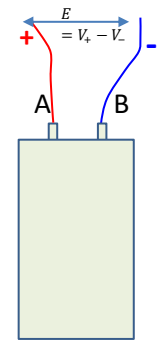


Figure III-6 : Force électromotrice

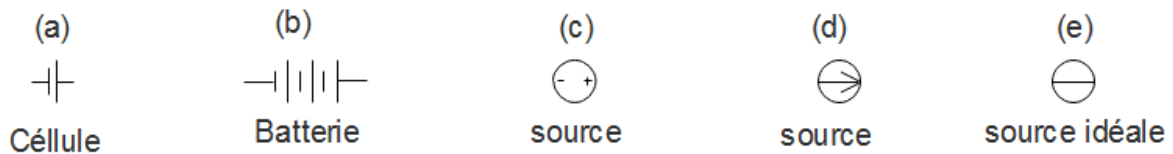


Figure III-7 Représentation d'une source à force électromotrice dans un circuit électrique

Dans ce cour, nous allons utiliser uniquement la représentation donnée sur la figure III-7 (a)

## b) Définitions et éléments d'un circuit électrique simple

### • Définition

Un circuit électrique est un ensemble de composants électriques, appelés dipôles, reliés par des fils conducteurs et formant une structure fermée.

### • Éléments constitutants

Dans un circuit électrique on trouve généralement :

**Nœud** : c'est une interconnexion électrique entre composants où arrivent trois fils connecteurs ou plus ;

**Branche** : c'est une portion de circuit électrique située entre deux nœuds consécutifs ;

**Maille** : c'est chemin (d'un circuit électrique) constitué d'un ensemble de branches formant une boucle fermée ;

### Exemple :

Considérons circuit électrique présenté sur la figure III-8. Il montre et précise schématiquement c'est quoi un nœud, une branche et une maille. Il est constitué de 4 nœuds, 3 mailles et 6 branches.

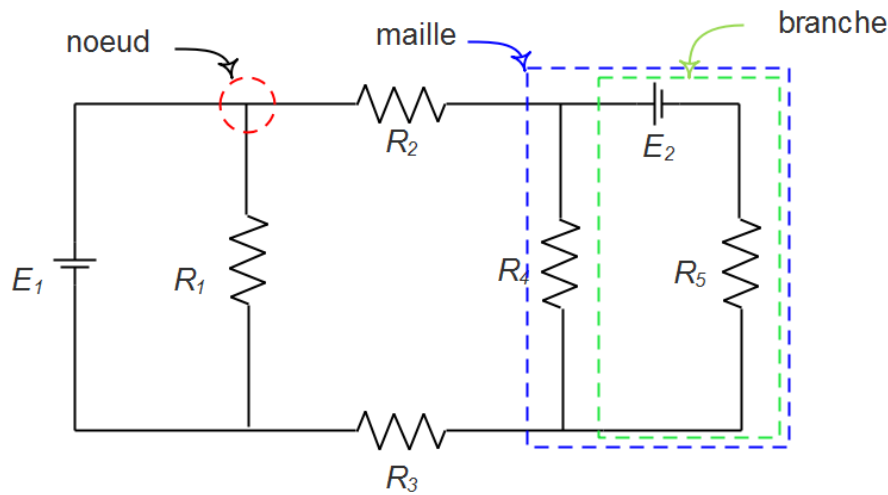


Figure III-8 : Exemple d'un circuit électrique comportant : 6 branches, 3 mailles et 4 nœuds

#### Remarques :

- 1) Les fils interconnectant sont pratiquement des équipotentielles.
- 2) Un circuit électrique peut comporter une mise à la terre représentée par :



Figure III-9: Représentation de la mise à la terre

### c) Résistance électrique équivalente dans un circuit électrique

- **Définition de la résistance équivalente :**

En électricité, la résistance équivalente est la résistance qui peut remplacer un ensemble de résistance dans un (ou dans une portion d'un) circuit constitué de résistance sans modifier le courant ou la tension au reste du même circuit.

Elle constitue un outil de modélisation par lequel on peut calculer pour remplacer un ensemble de résistances connectées. L'objectif c'est de simplifier l'étude du circuit.

- **Cas de résistances en parallèle**

On dit qu'un circuit électrique est en parallèle si ses branches sont connectées à des nœuds communs. Dans un circuit électrique simple à deux bornes, les éléments en parallèle partagent deux nœuds, tandis que dans un autre circuit complexe, les éléments en parallèle partagent tant de nœuds que de bornes y compris. La figure III-10 montre un circuit à deux bornes où l'ensemble des résistances en parallèle partagent une paire de nœuds.

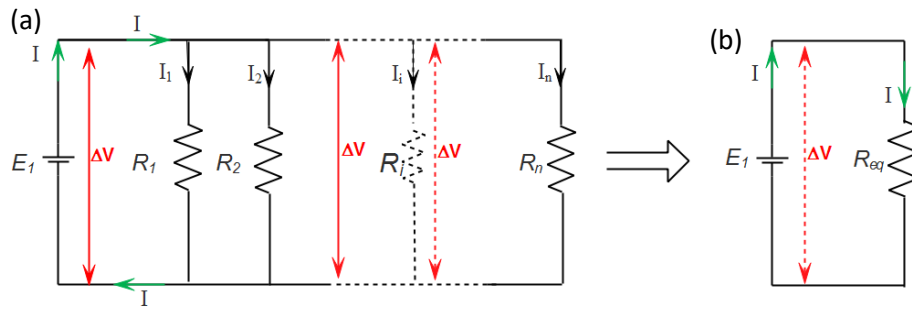


Figure III-10 : Circuit électrique à deux bornes : (a) les résistances sont en parallèle ; (b) résistance équivalente.

Considérons la configuration présentée sur la figure III-10. Le courant total  $I$  s'est partagé sur  $n$  branches et on a ainsi :

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_i + \dots + I_n$$

$$\text{Donc : } \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \dots + \frac{\Delta V}{R_i} + \dots + \frac{\Delta V}{R_n} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Ainsi la résistance équivalente a l'expression suivante :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \dots \dots \dots \text{(eq. III - 10)}$$

- Cas de résistances en série



Figure III-11 : Résistance en série et résistance équivalente.

On dit qu'un circuit électrique est en série si ses éléments appartiennent à la même branche. Tous les éléments en série reçoivent le même courant électrique parcouru. La figure III-11 montre un ensemble de résistance en série. Toutes les résistances sont connectées en série.

Considérons la configuration présentée sur la figure III-11. La différence de potentiel total  $\Delta V_{tot}$  s'est partagée sur  $n$  résistances et le même courant électrique passe par toutes les résistances. Alors on a :

$$\begin{aligned} \Delta V_{tot} &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_i + \dots + \Delta V_n \\ \Rightarrow R_{eq} \cdot I &= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \dots + R_i \cdot I + \dots + R_n \cdot I \\ \Rightarrow R_{eq} &= R_1 + R_2 + \dots + R_i + \dots + R_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \dots \dots \dots \text{(eq. III - 10)}$$

## II-5 Application de loi d'Ohm aux réseaux

### • Calcul du courant, tension et résistance

La loi d'Ohm établie une relation entre le courant  $I$  traversant un élément résistif de résistance  $R$  sous une différence de potentiel  $U = \Delta V$ . Elle peut être formulée sous trois formes :

$$U = R \cdot I ; I = \frac{U}{R} \text{ ou } R = \frac{U}{I}$$

Tout dépend des grandeurs connues dans un circuit et celles à déterminer, l'application de loi d'Ohm nous permet de déterminer :

- La tension  $U$ , en connaissant la résistance  $R$  et le courant  $I$  ;
- Le courant  $I$ , en connaissant la tension  $U$  et la résistance  $R$  ;
- La résistance  $R$ , en connaissant la tension  $U$  et le courant  $I$  ;

#### Exemple :

Calculer l'inconnu (la tension  $U$ , le courant  $I$  et la résistance  $R_i$ ) pour les circuits présentés dans les configurations de la figure III-12 (a), (b) et (c) respectivement.

Sachant que :  $R_1 = 50 \, \Omega$  ;  $R_2 = 80 \, \Omega$  ;  $R_3 = ? \, \Omega$ .

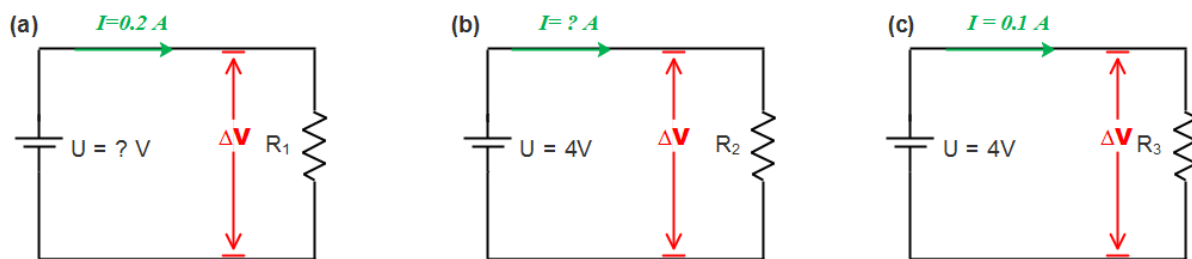


Figure III-12 application de loi d'Ohm, l'inconnu pour la tension  $U$ , (b) le courant et (c) la résistance

#### Solution

(a) En appliquant la loi d'Ohm la tension  $U$  est donnée par :

$$U = \Delta V = R_1 \cdot I = 50 \times 0.2 = 10 \, \text{V}$$

(b) En appliquant la loi d'Ohm le courant  $I$  est donné par :

$$I = \frac{U}{R_2} = \frac{4}{80} = 0.05 \, \text{A}$$

(c) En appliquant la loi d'Ohm la résistance  $R_3$  est donnée par :

$$R_3 = \frac{U}{I} = \frac{4}{0.1} = 40 \, \Omega$$

- **Pont diviseur de tension**

C'est un circuit électrique simple qui sert à déterminer une tension proportionnelle à une autre tension. L'objectif de ce montage est de créer une tension de référence dans un réseau électrique. La figure III-13 montre un schéma d'un pont de diviseur de tension.

Une première application de la loi d'Ohm permet d'écrire :

$$I = \frac{\Delta V_e}{R_1 + R_2}$$

Une deuxième application de la même loi permet d'écrire :  $\Delta V_s = R_2 \cdot I$

En substituant dans l'équation précédente on aura :

$$\Delta V_s = R_2 \cdot \frac{\Delta V_e}{R_1 + R_2} \dots \dots \dots \text{(eq. III - 11)}$$

Ainsi on établit une relation entre une tension d'entrée  $\Delta V_e$  et une tension de sortie  $\Delta V_s$ .

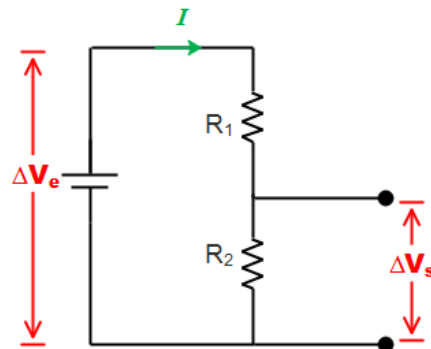


Figure III-13 : Pont de diviseur de tension

## II-6 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff expriment mathématiquement le principe de conservation de la charge et de l'énergie électriques. Elle porte ce nom en hommage du physicien allemand Gustav Kirchhoff (1824-1887), qui les a établies en 1845. Ce sont deux simples lois qu'un étudiant technologue doit les connaître au même titre que la loi d'Ohm. On les appelle : loi des nœuds et loi des mailles.

Ces lois nous permettent de calculer les différences de potentiel aux bornes de chaque résistance ainsi que l'intensité du courant continu circulant dans chaque branche d'un circuit électrique complexe.

### a) La loi des nœuds :

- **Énoncé de la loi des nœuds par G. Kirchhoff en 1845**

#### (1<sup>ère</sup> loi de Kirchhoff )

L'énoncé de la loi des nœuds telle quelle est prononcée par le physicien Gustav Kirchhoff en 1845 est :



**« La somme algébrique des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui en sortent »**

Par convention, on accepte que les arrivants au nœud soient positifs et ceux sortant soient négatifs.

Mathématiquement la loi des nœuds est exprimée comme suit :

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0 \dots \dots \dots \text{(eq. III - 12)}$$

$n$  est le nombre des courants  $I_j$  arrivants (entrants et sortants) à un nœud.

- **Application**

Considérons la configuration présentées sur la figure III-14 et appliquons la 1<sup>ère</sup> loi de kirchhoff :

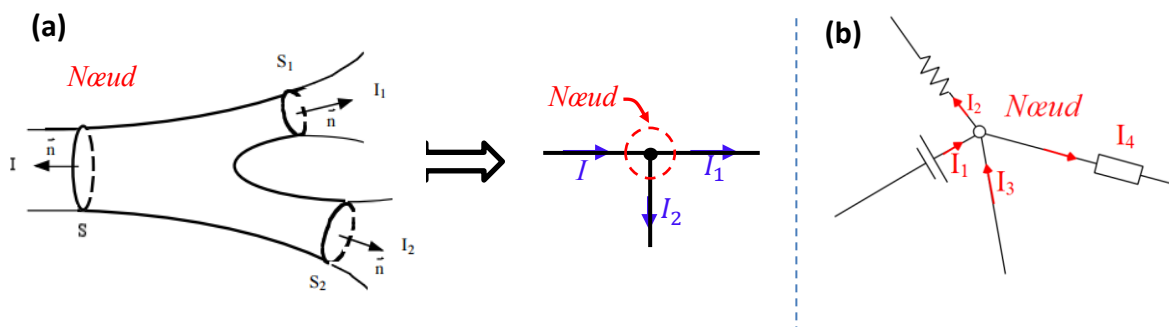


Figure III-14 Schématisation d'un nœud : (a) cas de trois courants arrivants ; (b) cas plus général.

L'application de la loi des nœuds donne :  $I = I_1 + I_2$  ;

Et dans le cas (b) :  $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

## b) La loi des mailles

- **Énoncé de la loi des mailles par G. Kirchhoff en 1845**

### (1<sup>ère</sup> loi de Kirchhoff)

L'énoncé de la loi des mailles telle quelle est prononcée par le physicien Gustav Kirchhoff en 1845 est :

**« Dans une maille d'un réseau électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle »**

Mathématiquement la loi des mailles s'exprime comme suit :

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0$$

$n$  : le nombre des éléments de la maille où apparaissent les chute de tension.

- **Application**

Examinons les deux circuits de la figure III-16 et appliquons la loi des mailles.

Commençons d'abord par le cas (a), on aura:

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0 \Rightarrow \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + (-E) = 0$$

$$\Rightarrow R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I + R_4 \cdot I - E = 0$$

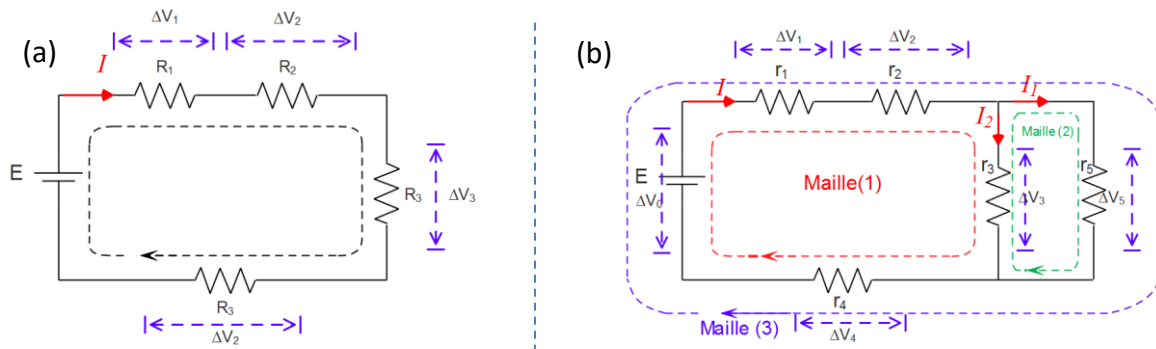


Figure III-16 Circuits pour application de la loi des mailles : (a) circuit à une maille ; (b) circuit contenant trois mailles.

Examinant maintenant le deuxième cas :

**Maille (1) :**

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0 \Rightarrow \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + (-E) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 \cdot I + r_2 \cdot I + r_3 \cdot I_2 + r_4 \cdot I - E = 0$$

**Maille (2) :**  $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0 \Rightarrow \Delta V_1 + \Delta V_5 = 0 \Rightarrow r_1 \cdot I + r_5 \cdot I_1 = 0$

**Maille (3) :**  $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0 \Rightarrow \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_5 + \Delta V_4 + (-E) = 0$

$$\Rightarrow r_1 \cdot I + r_2 \cdot I + r_5 \cdot I_1 + r_4 \cdot I - E = 0$$

## II-7 Circuits équivalents

### a) Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin est modèle mathématique qui se base sur le principe de superposition pour simplifier l'étude des circuits complexe et par lequel on remplace tout un circuit à part la partie à étudier, par un seule générateur de tension  $E_{Th}$  en série avec ue seule résistance  $R_{Th}$ .

- **Enoncé**

*Un réseau électrique linéaire vu de deux points est équivalent à un générateur de tension parfait dont la force électromotrice est égale à la différence de potentiels à vide entre ces deux points, en série avec une résistance égale à celle que l'on mesure entre les deux points lorsque les générateurs indépendants sont rendus passifs.*

- **Détermination de  $R_{Th}$ ,  $E_{Th}$  et de  $I$**

Considérons un circuit constitué de plusieurs sources et plusieurs résistances. Prenons une charge  $R_L$  entre deux points  $A$  et  $B$  (voir la figure III-17).

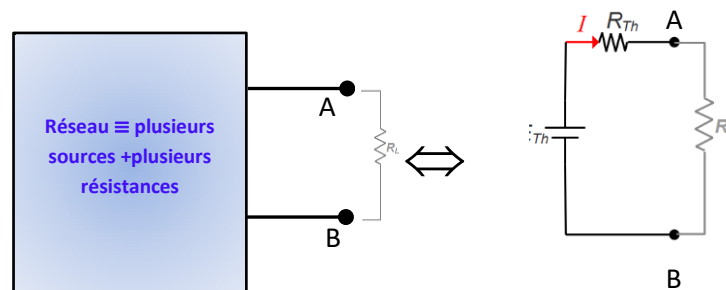


Figure III-17 : Equivalence circuit complexe-circuit de Thévenin

- **Détermination de la tension de Thévenin  $R_{Th}$**

La détermination de la tension de Thévenin s'effectue par le calcul ou par la mesure. On enlève d'abord la partie située entre les bornes  $A$  et  $B$ , puis on calcule ou on mesure la tension entre  $A$  et  $B$ . Cette dernière est la tension de Thévenin.

- **Détermination de la résistance de Thévenin  $E_{Th}$**

La détermination de la résistance de Thévenin s'effectue par le calcul ou par la mesure. On enlève la partie située entre les bornes  $A$  et  $B$ , on court-circuite les sources de tension et on calcule la résistance équivalente entre ces deux bornes. Cette résistance est la résistance de Thévenin.

- **Détermination du courant  $I$  passant par la charge  $R_L$**

Après avoir déterminé la tension et la résistance de Thévenin, l'utilisation du circuit très simple présenté sur la figure III-16 et de la loi des mailles, conduisent à :

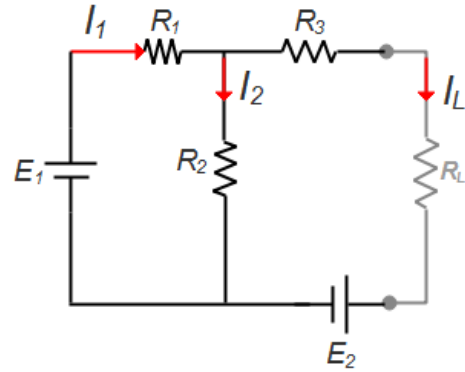
$$R_{Th} \cdot I + R_L \cdot I = E \Rightarrow I = \frac{E}{R_{Th} + R_L}$$

- **Application**

Calculer, en utilisant le théorème de Thévenin, le courant qui passe par la charge  $R_L$  dans le circuit ci-contre, puis calculer la tension entre ses bornes.

$$R_1 = 100\Omega; R_2 = 200\Omega; R_3 = 300\Omega; R_L = 1000\Omega$$

$$E_1 = 10\text{ V}; E_2 = 20\text{ V}$$



### • Solution

Le circuit équivalent est constitué de  $E_{Th}$ ;  $R_{Th}$  et  $R_L$  sont connectées tel qu'il est montré sur la III-18.

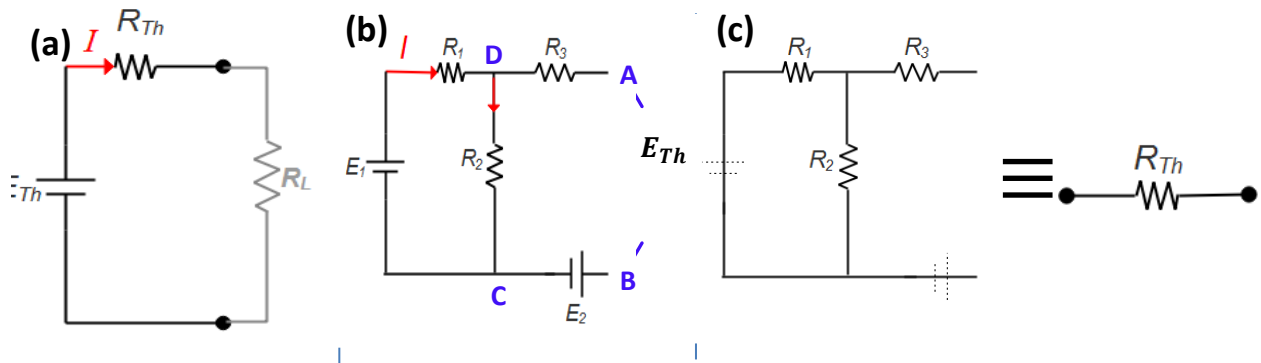


Figure III-18 : (a) Circuit équivalent de Thévenin ; (b) Calcul de  $E_{Th}$  ; (c) Calcul de  $R_{Th}$ .

#### Calcul de $E_{Th}$ :

On enlève la partie contenant  $R_L$ . On calcule  $V_{A-B} = V_A - V_B = E_{Th}$

$$V_{A-B} = (V_A - V_D) + (V_D - V_C) + (V_C - V_B)$$

Aucun passage du courant à travers  $R_3 \Rightarrow V_A - V_D = 0$

$$V_D - V_C = R_2 \cdot I \quad \text{et} \quad V_C - V_B = -E_2$$

On doit calculer donc  $I$ .

$$\text{On a } R_1 I + R_2 I = E_1 \Rightarrow I = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

$$\text{A.N. } I = \frac{10}{100 + 200} = 0.033\text{ A}$$

$$\text{Alors } V_D - V_C = R_2 \cdot \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

$$\text{Donc : } E_{Th} = R_2 \cdot \frac{E_1}{R_1 + R_2} - E_2$$

#### Calcul de $R_{Th}$ :

On enlève la partie (A-B) et on calcule  $R_{Th}$  après le court-circuit des source  $E_1$  et  $E_2$  ( voir figure III-17(c) ). On calcule ensuite  $R_{eq}$  entre A et B.

$$R_{eq} = R_3 + (R_1 // R_2) = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{A.N. : } R_{eq} = 300 + \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} = \frac{1100}{3}$$

### m) Théorème de Northon

Le théorème de Norton est modèle mathématique qui simplifier l'étude des circuits complexe et dans lequel on remplace tout un circuit à part la partie à étudier, par un seule générateur de courant  $I_N$  en parallèle avec une seule résistance  $R_N$ .

- **Enoncé**

« Tout circuit linéaire est équivalent à une source non idéale de courant. »

- **Détermination de  $R_N$ ,  $I_N$**

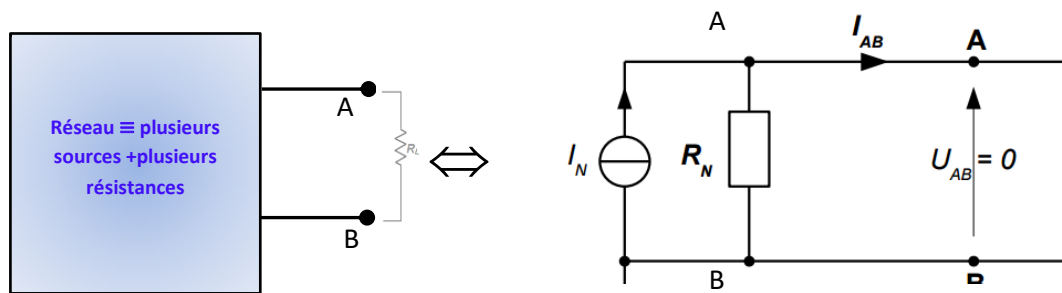


Figure III-19 : Equivalence circuit complexe-circuit de Norton

Une fois  $E_{Th}$  et  $R_{Th}$  sont déjà déterminés, il est très facile de déterminer les caractéristique du modèle de Norton  $I_N$  :

$$R_N = R_{Th} \quad \text{et} \quad I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$$

### n) Théorème de Kennelly

Le théorème de Kennelly conduit à une technique mathématique qui simplifier les circuits complexes. Il sert à transformer une triplé de résistance sous forme Y à un triplé de résistance sous forme  $\Delta$ . On appelle souvent la transformation étoile-triangle. Ce théorème est nommé ainsi en hommage de l'ingénieur Indien-Américain Arthur Edwin Kennelly.

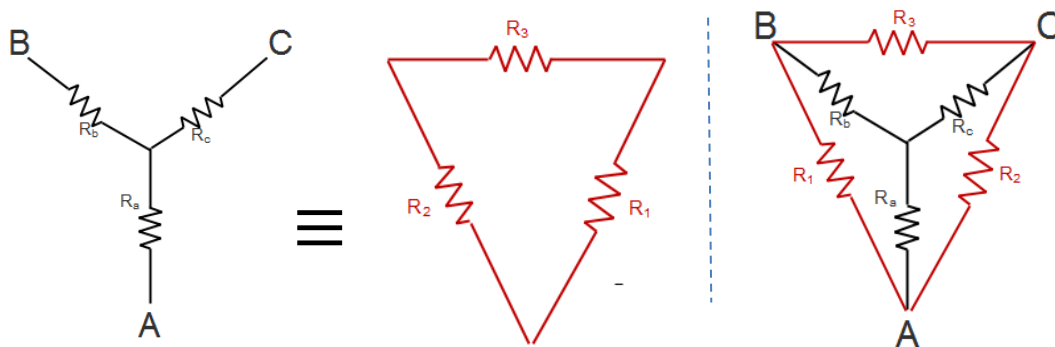


Figure III-20 : Transformation de Kennelly

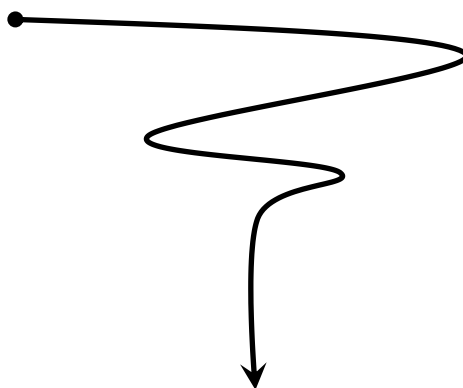
- Transformation  $\Delta$ -Y :

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} ; R_b = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} ; R_c = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- Transformation Y- $\Delta$  :

$$R_1 = \frac{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c}{R_c} ; R_2 = \frac{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c}{R_b} ;$$

$$R_3 = \frac{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c}{R_a} ;$$



## **Chapitre IV**

# **Electromagnétisme**

Dans ce chapitre ...

#### IV-1 Magnétisme et définition du champ magnétique

##### 4. Le magnétisme

- Les aimants permanents :
- Les aimants non permanents
- Les dipôles magnétiques
- Attraction et répulsion des aimants
- Origine du magnétisme

##### 5. Définition du champ magnétique

- Définition
- Expression du champ magnétique  $\vec{B}$   
(Force agissant sur une charge plongée dans un champ magnétique)
- Unité du champ magnétique :
- Principe de superposition :

##### 6. Comportement magnétique d'un matériau

- Diamagnétisme et matériau diamagnétique
- Paramagnétisme et matériau paramagnétique
- Ferromagnétisme et matériau ferromagnétique

#### VI – 2 L'électromagnétisme

##### 6. Force de Lorentz

##### 7. La loi de Laplace

##### 8. Loi de Lenz-Faraday

##### 9. Loi de Biot-Savart

##### 10. Dipôle magnétique



## Introduction

L'électromagnétisme est une grande branche de la physique qui permet de donner l'explication de l'existence des ondes électromagnétiques : ondes radio ou la lumière. Elle permet aussi de comprendre les micro-ondes et le rayonnement gamma. Son domaine d'application est très large, ce qui traduit l'importance de cette branche.

L'électromagnétisme est basé sur l'interaction électromagnétique qui est l'une des quatre interactions élémentaires responsables de tous les phénomènes de l'univers. Cette interaction unifiée avec l'interaction faible constituent la théorie électrofaible, dans le domaine de la physique des particules.

L'électromagnétisme représente le domaine des sciences qui étudie les interactions mutuelles entre les charges électriques *en mouvement relatif* les unes des autres. Il est aussi lié à l'étude du champ électrique et du champ magnétique qui, en s'unifiant, constituent le champ électromagnétique.

En bref, c'est la science qui étudie les phénomènes magnétiques dus aux interactions entre les courants électriques et les champs magnétiques.

Avant d'entamer l'étude des éléments de l'électromagnétisme, un survol sur le magnétisme s'impose pour une bonne compréhension.

## IV-1 Magnétisme et définition du champ magnétique

### 1. Le magnétisme

On entend dire par le magnétisme, dans ce chapitre, le magnétisme physique, dit encore le magnétisme minéral. Il est loin du magnétisme animal ou vital, du magnétisme mental, du magnétisme humain ou du magnétisme spirituel, qui représentent une vue de l'esprit.

Le magnétisme physique ou minéral est une branche de la physique basée sur une force mesurable, quantifiable et qui peut être mise en équation. C'est une force qui peut être reproductible à volonté et qui est considérée comme une force fondamentale de la nature, exactement comme celle l'électricité. Elle est dégagée des aimants permanents et elle est principale dans toute la technologie moderne, bien qu'elle soit découverte il y a plus de deux milles ans.

- **Les aimants permanents :**

Un aimant permanent est un matériau générant naturellement un champ magnétique et a la particularité d'attirer certain métaux comme le fer, le nickel, le cobalt et le chrome.

On distingue deux types des aimants permanents :

- Les aimants naturels : ce sont des matériaux dès l'origine aimantés.
  - Exemple : La magnétite dont la formule chimique est  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ . C'est un oxyde qui peut être trouvé naturellement sous forme de cristaux au sein de roches éruptives. On trouve des traces de magnésium Mg, de zinc Zn, de manganèse Mn, de nickel Ni, de chrome Cr, de titane Ti, de vanadium V et d'aluminium Al dans la magnétite.



Figure IV – 1 La magnétite –  $\text{Fe}_3\text{O}_4$

<http://www.reiki-cristal.com/article-magnetite-58383810.html>

- Les aimants artificiels : ce sont des matériaux qui ne prennent leurs propriétés magnétiques qu'après un traitement préalable. Ils sont constitués d'une matière ferromagnétique (on en parlera dans les sections qui suivent).
  - Exemple : Parmi les aimants artificiels on trouve : le barreau magnétique utilisé comme agitateur, l'aimant très connu en U et l'aiguille magnétique. Ces trois exemples sont montrés sur la figure IV -2.



Figure IV-2 Aimants artificiels

- **Les aimants non permanents**

Ce sont des matériaux dont le magnétisme est provoqué ou induit. Les détails seront exposés dans les sections de l'électromagnétisme.

- Exemple : en alimentant en courant électrique un fil bobiné, on obtient un électroaimant (figure ci-contre).

**Remarque** : les aimants permanents perdent leur aimantation (voir section IV en atteignant une certaine température. A titre d'exemple la magnétite perd son aimantation à 580°C. On appelle cette température : le point de Curie.

- **Les dipôles magnétiques**

Chaque aimant possède toujours deux pôles : un Nord et l'autre Sud. En divisant un aimant on obtient deux aimant, chacun d'eux possède deux pôle : nord et sud. Dans la figure IV-3, le pôle Nord est représenté en rouge et le pôle sud en bleu, par convention.

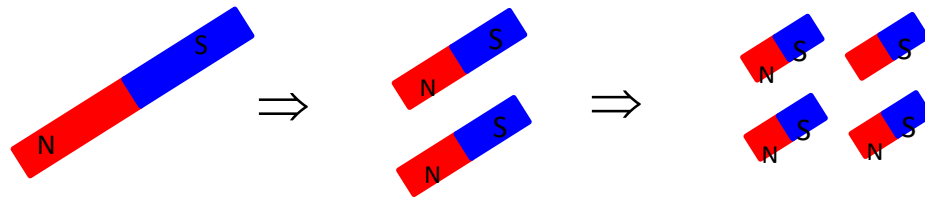


Figure IV-3 En subdivisant les aimants, les nouveaux petits aimants gardent toujours la polarité : Nord-Sud

- **Attraction et répulsion des aimants**

En approchant les aimants l'un de l'autre, on constate soit une attraction soit une répulsion. Ce sont les forces magnétiques. En rapprochant face à face le même pôle des deux aimants on constate une répulsion. Au contraire, en rapprochant face à face deux pôles différents des deux aimants, on constate une attraction. La figure IV-4 récapitule ces phénomènes.

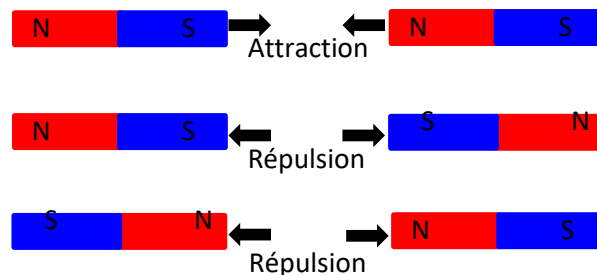


Figure IV-4 Répulsion et attraction entre aimants

- **Remarque :** Dans le cadre de l'électromagnétisme l'existence du monopôle magnétique est exclue. Cependant, Paul Dirac a démontré son existence théorique en physique quantique et en septembre 2009 les chercheurs du domaine ont observé des quasi-particules artificielles avec des propriétés d'un monopôle magnétique.

- **Origine du magnétisme**

L'origine du magnétisme d'un matériau vient de ses constituants fondamentaux : les électrons et les atomes. En plus de sa propriété fondamentale qu'il porte une charge électrique, l'électron possède une autre propriété aussi fondamentale que la charge : il se comporte exactement comme un petit aimant. On dit qu'il possède un moment dipolaire magnétique (on en verra la définition plus tard). Ce comportement bipolaire trouve son origine dans une propriété plus fondamentale de l'électron : le spin. Cette propriété est expliquée dans le cadre d'une théorie de la physique moderne dite: Théorie Quantique. Par analogie avec la mécanique classique, le spin peut être considéré comme une rotation rapide sur lui-même. D'ailleurs, le mot « spin », signifie en anglais « tourner

rapidement ». Ce mouvement de rotation de la charge sur lui-même crée le champ magnétique intrinsèque de l'électron : le spin.

Le spin des électrons est la source principale de l'aimantation des aimants. L'autre cause secondaire est la contribution de son moment angulaire orbital dû à son mouvement autour du noyau. La répartition de tous les dipôles magnétiques dans une matière et leurs comportement vis-à-vis d'un champ magnétique extérieur attribue à tout matériau l'état magnétique correspondant : Ferromagnétique, paramagnétique, ...

Dans certains matériaux les dipôles magnétiques s'orientent dans une même direction donnant un champ magnétique résultant plus grand. On dit qu'ils sont aimantés. Dans de tels matériaux il y a des couches électroniques superficielles des atomes constituants, partiellement remplies. Parce que le spin d'un électron ne se trouve que, selon la direction de son champ magnétique, dans deux états : up ou down. Et comme les électrons se répartissent d'une manière appariée, le spin des couches totalement remplies se compense et se termine par avoir une valeur nulle. En plus, les spins des électrons des couches partiellement remplies s'orientent dans la même direction, ce qui augmente de moment bipolaire total.

## 2. Définition du champ magnétique

- Définition

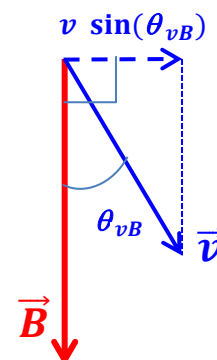
Le champ magnétique est un champ de force résultant du déplacement des charges. C'est une grandeur vectorielle qui permet de caractériser qualitativement et quantitativement les effets magnétiques des courants électriques ou des matériaux magnétiques tels que les aimants permanents.

Toute charge électrique en mouvement crée un champ magnétique. Ainsi, tous les courants qui passent par des fils conducteurs sont des sources du champ magnétique. L'intensité de ce dernier diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de sa source. On l'appelle souvent: le champ d'induction magnétique, et on le désigne par :  $\vec{B}$

- Expression du champ magnétique  $\vec{B}$

(Force agissant sur une charge plongée dans un champ magnétique)

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est défini par la force magnétique  $\vec{F}_m$ , à laquelle une charge électrique  $q$  qui se déplace à une vitesse  $\vec{v}$ , est subit lorsqu'elle y est plongée. Son expression est donnée par :



$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} \dots\dots\dots(\text{IV-1})$$

Ou par son module :

$$F_m = |q| v B \sin(\theta_{vB}) \dots\dots\dots(\text{IV-2})$$

Avec  $\theta_{vB}$  est l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$ .

- **Unité du champ magnétique :**

Dans le système international (SI), l'unité du champ magnétique est le Tesla. Il est noté par T. Cependant, l'utilisation d'autres unités peuvent être plus pratiques comme : le Gauss, notée (G) et l'Oersted, notée (Oe).

L'unité de base est :  $kg.s^{-2}A^{-1}$  et  $1G = 10^{-4} T$

- **Principe de superposition :**

Une propriété importante du champ magnétique est qu'il vérifie le principe de superposition, duquel on peut dire que : le champ magnétique résultant d'un ensemble n de champs magnétiques agissant simultanément est la somme vectorielle de tous les champs agissant :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n \dots\dots\dots(\text{IV-3})$$

### 3. Comportement magnétique d'un matériau

- **Diamagnétisme et matériau diamagnétique**

Le diamagnétisme est le comportement magnétique de certains matériaux où l'aimantation créée est opposée au champ magnétique extérieur appliqué et a une très faible valeur.

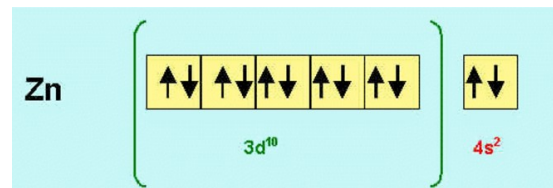
Un matériau diamagnétique est un matériau qui a un moment magnétique résultant nul et tous ses électrons sont appariés. Il réagit faiblement à un champ magnétique extérieur, en créant un champ magnétique opposé et il est repoussé par un champ magnétique.

- **Exemple 1:**

Les gaz rares, les alcalino-terreux et tous les atomes à sous-couches électroniques complètes, le plomb (Pb), le zinc (Zn), l'eau, les acides ... sont des éléments diamagnétiques

▪ **Exemple 2 :**

Prenons Zn comme un élément diamagnétique. Sa Configuration électronique est :  $[\text{Ar}] 3d^{10}4s^2$  et tous ses électrons sont appariés (voir figure ci-contre).



• **Paramagnétisme et matériau paramagnétique**

Le paramagnétisme est le comportement magnétique de certains matériaux qui ne possèdent pas de l'aimantation spontanée mais qui, sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, acquiert une aimantation dirigée dans le même sens que celui du champ d'excitation.

Un matériau diamagnétique est un matériau qui a un moment magnétique résultant non nul et qui a des électrons célibataires. Il réagit à un champ magnétique extérieur en créant une aimantation de même sens. C'est un matériau attiré par tout champ magnétique appliqué.

Dans ce type de matériau les moments magnétiques sont en générale orientés aléatoirement et leur résultante est nulle. En appliquant un champ magnétique externe, les moments magnétiques s'orientent en induisant ainsi un champ magnétique induit  $\vec{B}$  de même sens que celui du champ appliqué voir figure IV-5. Il renforce donc le champ extérieur. Cependant, il disparaît dès l'annulation du champ appliqué. Ce comportement est appelé : aimantation. Elle peut être faible ou très forte dans ce cas (paramagnétique).

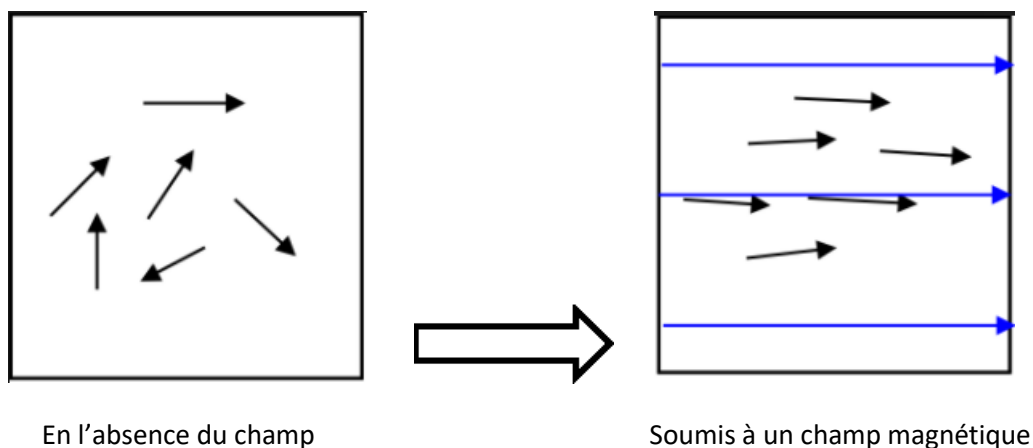
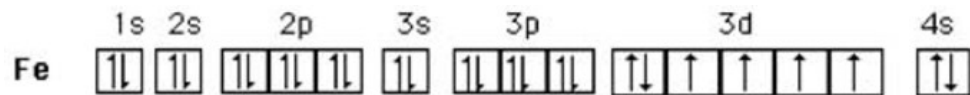


Figure IV-5 Effet du champ magnétique externe sur un matériau paramagnétique

▪ **Exemple :**

Prenons le cas du fer. Sa configuration électronique est :  $1s^1 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$



Il possède quatre électrons célibataires et l'aimantation dans ce cas est très forte.

- **Ferromagnétisme et matériau ferromagnétique**

Le ferromagnétisme est le mécanisme fondamental par lequel certains matériaux forment des aimants permanents ou des substances attirées par des aimants.

Les matériaux ferromagnétiques sont des matériaux constitués en générale des éléments qui comportent des électrons non appariés dans des couches profondes situées sous des couches externes saturées. Ces dernières servent d'écran aux couches externes.

Dans de tels matériaux, les moments magnétiques atomiques s'orientent spontanément vers une même direction sur un domaine cristallisé. Ils sont donc constitués des domaines magnétiques. Ces derniers tendent à s'orienter dans le même sens sous l'action d'un champ magnétique externe en aimantant ainsi tout le matériau (voir figure IV-6).

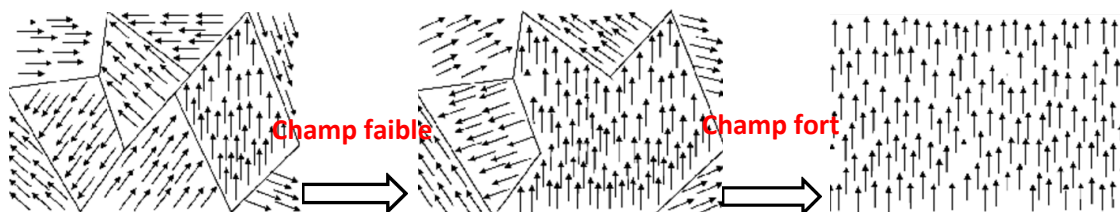


Figure IV-6 Domaines magnétiques sous l'action d'un champ magnétique faible puis fort dans un matériau ferromagnétique

## VI – 2 L'électromagnétisme

Nous avons déjà donnée une brève introduction sur l'électromagnétisme au début de ce chapitre. A titre récapitulatif, on peut dire que l'électromagnétisme les phénomènes dus à l'interaction entre le champ électromagnétique et les particules chargées.



## 1. Force de Lorentz

(Force subie par une charge électrique dans un champ électromagnétique)

La force de Lorentz traduit l'interaction entre le champ magnétique  $\vec{B}$  dans lequel « baigne » une charge  $q$  à une vitesse  $\vec{V}$  et cette charge. Son expression est donnée par l'eq. (IV-4)

$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B} \quad \dots\dots\dots (IV-4)$$

Le sens de  $\vec{F}$  suit la règle présentée sur la figure IV-7

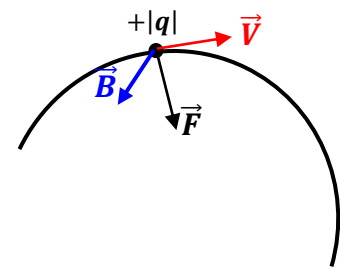


Figure IV-7 : Force de Lorentz subie par une charge positive

## 2. La loi de Laplace

(Force agissant sur un fil parcouru d'un courant dans un champ magnétique uniforme)

La loi de Laplace traduit l'interaction entre un fil conducteur parcouru d'un courant électrique  $I$ , placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . En fait, cette loi peut être considérée comme une application de la loi de Lorentz sur le conducteur à cause des charges en mouvement dans ce conducteur. Ce fil subit une force électromagnétique  $\vec{F}$  dont le sens donné par règle des trois doigts de la main droite (voir figure (IV-8)). Son expression est donnée par les éqs. :

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \dots\dots\dots (IV-5)$$

Pour un fil de longueur  $dl$  parcouru par un courant  $I$  dans champ  $\vec{B}$ .

$$\text{Ou} \quad F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin(\theta) \quad \dots\dots\dots (IV-6)$$

Pour un fil rectiligne de longueur  $L$  et d'angle  $\theta$  entre la direction de  $L$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ .



Figure IV-8 : Configuration des sens de la force, du champ et du courant électrique figurant dans la loi de Laplace

### 3. Loi de Lenz-Faraday

#### (Force électromotrice et changement du flux de champ magnétique)

**La loi de Faraday** établit la relation entre la force électromotrice induite dans un bobinage fermé placé dans un champ magnétique et le flux de ce dernier. Selon cette loi, la force électromotrice est proportionnelle à la variation, au cours du temps, du flux du champ magnétique qui entre dans le circuit. Elle est exprimée par l'éq. (IV – 7) :

$$E = d\Phi / dt \dots \dots \dots (IV - 7)$$

Ici la force électromotrice correspond à la différence de potentiel entre les bornes du circuit ouvert. Elle est d'abord assimilée à une tension dans la pratique, car toutes les deux ont la même dimension et la même unité : le volt.

La loi de Lenz, formulée par Heinrich Lenz en 1833, découle du principe de conservation de l'énergie si on l'applique à l'induction électromagnétique. Elle renseigne, en plus de l'amplitude de la force électromotrice donnée par la loi de Faraday, sur le sens que va prendre le courant. Elle nous informe que le sens du courant est toujours tel qu'il va s'opposer à la variation du flux qui lui a donné naissance et par conséquent tout champ magnétique créé par un courant induit a un sens opposé à la variation du champ initial.

La loi de Lenz avec la loi de Faraday donnent la loi de Lenz-Faraday donnée par l'éq. (IV – 8) :

$$E = - d\Phi / dt \dots \dots \dots (IV - 8)$$

$E$  : la force électromotrice.  $\Phi$  : le flux du champ magnétique.

Cette équation concerne une bobine fermée. Dans le monde pratique, l'induction magnétique résulte d'un bobinage fermé constitué d'un très grand nombre de bobines  $N$ . la force électromotrice produite dans ce cas est :

$$E = V = - N d\Phi / dt \dots \dots \dots (IV - 9)$$

Le dispositif de l'expérience primaire qui a conduit Faraday à établir sa loi est schématisé sur la figure IV-9. Le mouvement de l'aimant conduit à une variation du magnétique ce qui induit une force électromotrice  $E$ , donnée ci-dessus (eq.VI-9), au bornes du bobinage à  $N$  bobines.

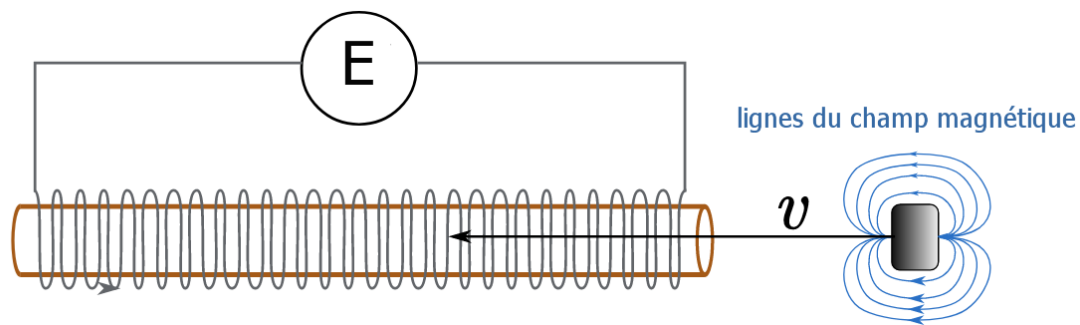


Figure IV-9 Schéma du dispositif de l'expérience qui a conduit Faraday à établir sa loi.

#### 4. Loi de Biot-Savart

##### (Champ électromagnétique créé par un courant)

La loi de Biot-Savart, datant de 1820, établit la relation entre le champ magnétique et le courant électrique continu qui le crée. Considérons la configuration présentée sur la figure IV-11.

Selon cette loi, le courant continu  $I$  traversant l'élément de longueur  $dl$  du fil crée, en un point M distant de  $r$  et faisant un angle  $\theta$  (tel que montré sur la figure IV-10), un champ magnétique élémentaire  $d\vec{B}$ . Son expression est donnée par l'éq. suivante :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \dots \dots \dots (IV - 10)$$

$\mu_0$  est la perméabilité du vide ( $= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m/A}$ )

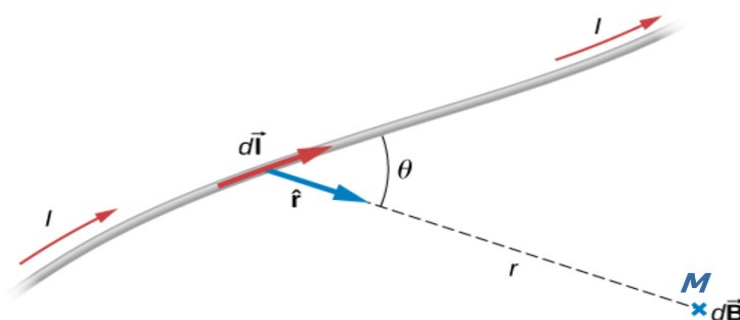


Figure IV-10 : Champ magnétique élémentaire créé par le passage d'un courant dans un fil, donné par la loi de Biot-Savart.

<http://cnx.org/contents/dh0GjBE@2/The-Biot-Savart-Law>

## 5. Dipôle magnétique

Considérons la configuration présentée sur la figure IV-11. Elle montre un barreau magnétique. Ce dernier est constitué, de point de vue magnétique, de deux pôles opposés N et S. Puisque ces deux pôles sont séparés d'une distance fixe et leurs « intensités » sont égales, ce barreau est décrit comme un **dipôle magnétique**. Il est caractérisé par son moment magnétique et crée en tout point de l'espace, à l'extérieur du dipôle, un champ magnétique  $\vec{B}$ . Ce champ est appelé champ dipolaire.

Une spire de rayon  $R$  parcourue d'un courant  $I$  peut être considéré comme un dipôle magnétique. Le calcul du champ  $B$  en un Point M appartenant à l'axe du dipôle (sur  $z$ ), conduit à l'expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \vec{u}_z \quad \dots \text{(IV - 11)}$$

Ce

résultat est atteint en considérant :  $R^2 + z^2 = z^2$ ;  
c.-à-d.  $z \gg R$  ou le dipôle est ponctuel.

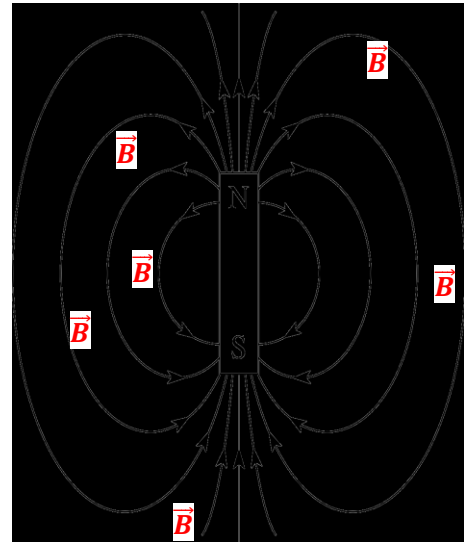
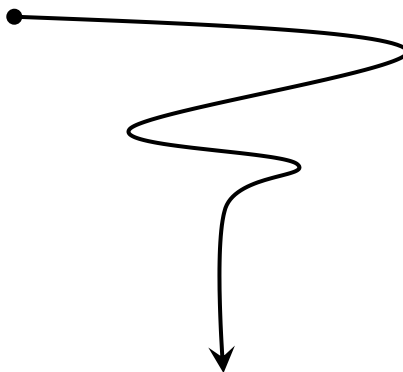


Figure IV-11 : Dipôle magnétique et champ magnétique dipolaire

[http://www.physics.brocku.ca/PPLATO/h-flap/phys4\\_2.html](http://www.physics.brocku.ca/PPLATO/h-flap/phys4_2.html)



**Références :**

- 1) LES MATHS EN PHYSIQUE (La physique à travers le filtre des mathématiques avec éléments d'analyse numérique-Cours et applications), Jean-Pierre Provost(Professeur Nice-Sophia Antipolis) Gérard vallée(M.C.à Nice-Sophia Antipolis), Dunod, Paris, 2011
- 2) Electricité et magnétisme, Fizazi Ahmed, Office des publications universitaires, Algérie, 2011
- 3) Physique : Electricité et Magnétisme, MARC Seguin, de Boeck, 2010,
- 4) Analyse des Circuit Electriques, Alexander et Sadiku, Bruxcelles, Mc Graw Hill, de boeck ,2012;
- 5) Traité d'électricité et de magnétisme (Tomel), Jammes Clerk MAXWELL, Editions JAQUES GABAY,1989.
- 6) Physique- Electromagnétisme (Cours-Méthodes-exercices résolus) , P.KREMPF (Pr Lyon), edition Agnès Nicol - 2003
- 7) <http://www.bipm.org/fr/>
- 8) <http://uel.unisciel.fr/>
- 9) <http://www.elektronique.fr/>

