Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences exactes et de l’informatique
Département d’informatique

– Module –
Systèmes Experts

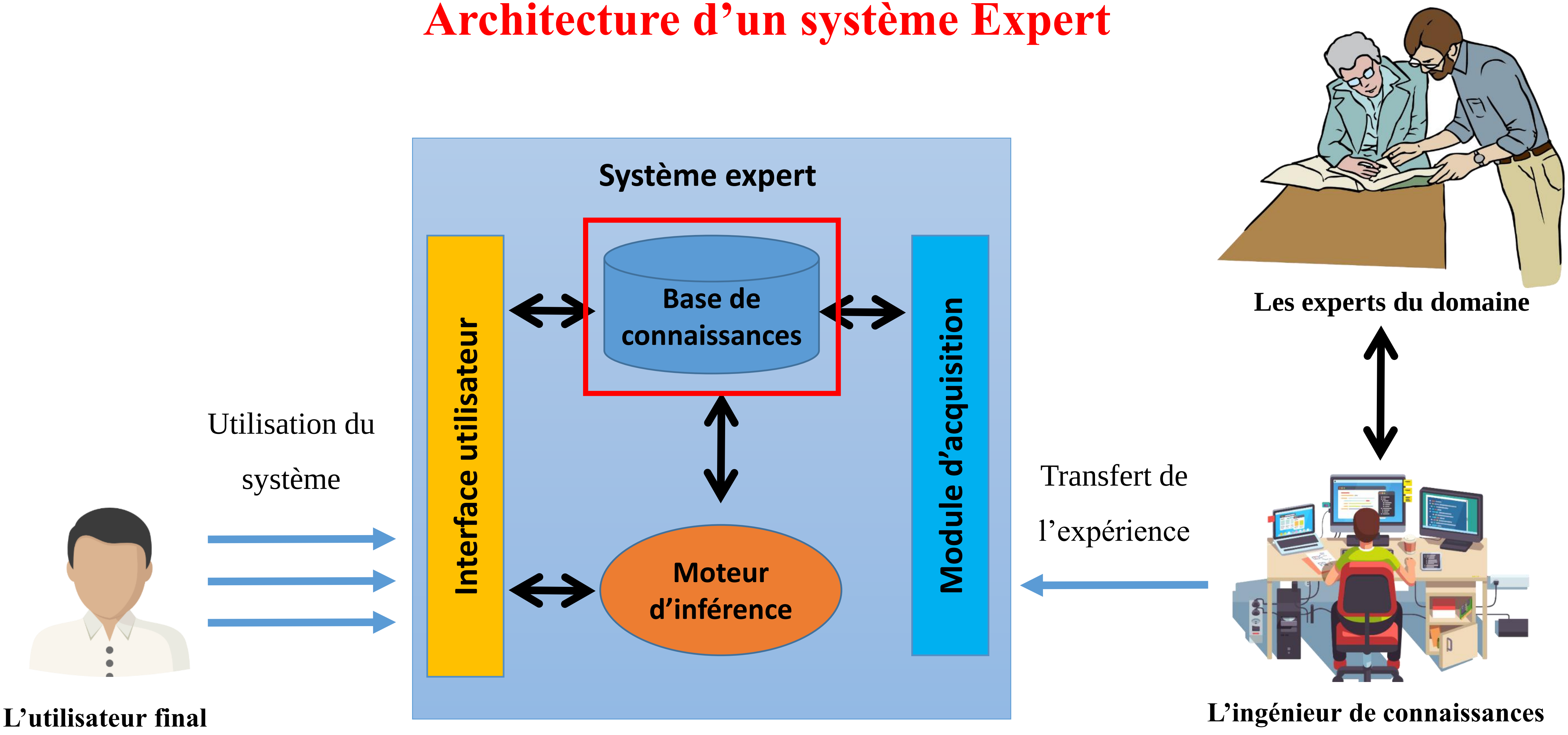
Master 1 : SIAD

Enseignant du module : Dr. Hemza FICEL

Contact: hemza.ficel@univ-jijel.dz

Chapitre 2 – Représentation de connaissances

Architecture d'un système Expert



Représentation logique

Représentation logique

- Premier formalisme de représentation des connaissances en intelligence artificielle.

- Un formalisme qui permet de représenter des connaissance à l'aide de symboles.

- Une **formule** (expression/phrase) est un objet **syntaxique** associé à une **signification sémantique** (interprétation).

- Deux concepts fondamentaux :
  - **la syntaxe** : suite de mots et de symboles formant une phrase.
  - **la sémantique** : la signification d'une phrase/sa valeur de vérité.

- Types de logique : logique propositionnelle, logique des prédicats, floue, …

Représentation logique

- **Logique propositionnelle :** une suite de symboles séparés par des conjonctions (et), des disjonctions (ou) ou des négations (non) ;

- **Logique des prédicats :** une suite de **symboles**, de **variables** et de **relations** avec des quantificateurs universels et existentiels ($\forall, \exists$);

- **Logique floue:** une extension de la logique classique qui **accompagne les faits de valeurs de vérité** (au lieu d'être **vrai** ou **faux**, les valeurs de vérité sont des réels **entre 0 et 1**).

Représentation logique: logique des propositions

Logique des propositions

- La logique des propositions permet d'exprimer :
  - **des faits** sur le monde : « Ali est un Homme »
  - des **négations** : « La route n’est pas mouillée »
  - des **conjonctions** et des **disjonctions** : « Ali et/ou Mohammed … »
  - un **raisonnement logique** : « S’il pleut, la route est mouillée ».

- Les Concepts de base : les **propositions** et les **connecteurs.**

Concepts de base : les propositions et les connecteurs

Concepts de base : Propositions

- **Une proposition** est une expression (phrase) qui peut être dite **vraie** ou **fausse**, ce qui exclut les expressions non assertives.

Proposition ou non ?

Est-ce que Ali aime la marche à pied ?	✗	Je te promets de réussir	✗
Fermez la porte !	✗	Tu m'entends !	✗
Qu'il est gentil !	✗	Mohammed est un étudiant.	✓

Concepts de base : Connecteurs

- **Les connecteurs** sont des opérateurs qui permettent de former de nouvelles propositions en reliant d'autres propositions.

- **P1:** Il pleut à Jijel.
- **P2 :** Il neige à Sétif.

- **P:** Il pleut à Jijel **et** il neige à Sétif

Connecteur logique « et »

Concepts de base : Connecteurs

- Le connecteur unaire : $\neg$ $(\boldsymbol{non})$

- Les connecteurs binaires :
  - **∧ (et) ;**
  - **∨ (ou) ;**
  - $\rightarrow$ $(\boldsymbol{implique})$;
  - $\leftrightarrow$ (é$\boldsymbol{quivalent}$).

- Les parenthèses : **( ).**

Concepts de base : Connecteurs

- **Les connecteurs logiques classiques** (la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence) sont tous **des connecteurs vérifonctionnels.**

⬇

Le contexte linguistique diffère du contexte logique formel

Concepts de base : Connecteurs

Contexte logique formel

Point de vue linguistique VS logique

Supposons que la proposition **P est vraie**

P’ reste vraie

1. **P :** Nabil s’est cogné **et** il pleure.
2. **P1 :** Nabil s’est cogné.
3. **P2:** Nabil pleure.

P2 **P3**

5. **P’ :** Nabil s’est cogné **et il pleut.**
2. **P1 :** Nabil s’est cogné.
4. **P3 : Il pleut.**

Changeons la proposition **P2** par une autre **proposition vraie** (la proposition **P3**).

Concepts de base : Connecteurs

Contexte logique formel

Point de vue linguistique VS logique

Supposons que la proposition **P est fausse**

P' reste fausse

1. **P :** Nabil s'est cogné **et** il pleure.	✗	5. **P' :** Nabil s'est cogné **et** il pleut.	? ✗
2. **P1 :** Nabil s'est cogné.		2. **P1 :** Nabil s'est cogné.	
3. **P2 :** Nabil pleure.	P2 ⟲ P3	4. **P3 :** Il pleut.	✗

Changeons la proposition **P2** par une autre **proposition fausse** (la proposition **P3**).

Concepts de base : Connecteurs

Contexte logique formel

Point de vue linguistique VS logique

Le connecteur « et » dépend seulement de la valeur de vérité des ses arguments.

Nabil s'est cogné **et** il pleure.

Concepts de base : Connecteurs

Contexte linguistique

Point de vue linguistique VS logique

Supposons que la proposition **Q est vraie**

1. **Q :** Nabil pleure **parce qu**'il s'est cogné
2. **Q1 :** Nabil pleure.
3. **Q2 :** Nabil s'est cogné.

Q1 ⟳ **Q3**

Q' devient fausse

5. **Q' :** Il pleut **parce que** Nabil s'est cogné.
2. **Q3 :** Il pleut.
4. **Q2 :** Nabil s'est cogné.

Changeons la proposition **Q1** par **une autre proposition vraie** (la proposition **Q3**).

Concepts de base : Connecteurs

Contexte linguistique

Point de vue linguistique VS logique

Le connecteur « parce que » ne dépend pas seulement des valeurs de vérité de ses arguments : il dépend du rapport causal entre les arguments.

Nabil pleure **parce** qu'il s'est cogné

Concepts de base : Connecteurs

Point de vue linguistique VS logique

- **Contexte linguistique :** est caractérisé par l'utilisation du **langage naturel :** des expressions qui peuvent **avoir plusieurs significations**, et qui peuvent être **influencées par plusieurs facteurs** (émotionnels, sociaux, culturels, etc.).

- **Contexte logique formel :** est caractérisé par l'utilisation des symboles logiques pour former **des propositions qui ont des significations précise et non ambiguë** indépendamment du contexte dans lequel elles sont utilisées.

Concepts de base : Connecteurs

Point de vue linguistique VS logique

- Dans un contexte logique formel, les connecteurs logiques classiques sont dits « **vérifonctionnels »,** car elles **sont** des connecteurs dont la valeur de vérité de la proposition qui en résulte **<u>dépend uniquement</u> des valeurs de vérité des ses propositions composantes.**

Concepts fondamentaux: la syntaxe des propositions logiques

Syntaxe

- Le langage de la logique des propositions **(LP)** , est constitué :
  - de l'ensemble de symboles de proposition. Par exemple, **P, Q, R, S, …**
  - du connecteur unaire : ¬ ($\boldsymbol{non}$).
  - des connecteurs binaires : **∧ (et), ∨ (ou),** → ($\boldsymbol{implique}$) ,↔ (é$\boldsymbol{quivalent}$).
  - des parenthèses : **( )**, qui sont **exclusivement associées aux connecteurs binaires.**

Syntaxe

- Formation de **propositions complexes**:
    - La négation: $\neg \boldsymbol{P}$ $(non\ P)$.
    - La conjonction : **P ∧ Q** (P et Q)
    - La disjonction : **P ∨ Q** (P ou Q)
    - L'implication : **P** → $\boldsymbol{Q}(P\ implique\ Q)/(Si\ P\ alors\ Q)$
    - L'équivalence: **P** ↔ $\boldsymbol{Q}$(P équivaut à Q)/(P *si et seulement si* Q)

Syntaxe

- Tous les symboles de proposition (P, Q, R, …) sont **des formules (formule bien formée/WFF)** de **LP.**

- Les expressions générées par le connecteur unaire et les connecteurs binaires sont **des formules** de **LP.**

- Par exemple,
  - **$\neg$P** est une formule bien formée.
  - **(P $\wedge$ Q)** est une formule bien formée.
  - **(P $\vee$ Q)** est une formule bien formée.
  - **(P $\rightarrow$ Q)** est une formule bien formée.
  - **(P $\leftrightarrow$ Q)** est une formule bien formée.

Exercice

- Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de LP ?

- $\neg P$
- $P \wedge (Q)$
- $\neg(Q)$
- $(\neg P \vee \neg\neg Q)$
- $(P1 \rightarrow (P2 \rightarrow (P3 \rightarrow P4)))$
- $(P1 \rightarrow ((P2 \rightarrow P3)))$

Les parenthèses sont exclusivement associées aux connecteurs binaires

Syntaxe

Comment vérifier si une suite de symboles de LP est une formule bien formée ?

Arbre de décomposition/construction

$$((\neg (P \land Q) \lor (P \rightarrow (Q \rightarrow R))) \leftrightarrow S)$$

$$(\neg (P \land Q) \lor (P \rightarrow (Q \rightarrow R))) \qquad S$$

$$\neg (P \land Q) \qquad (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

$$(P \land Q) \qquad P \qquad (Q \rightarrow R)$$

$$P \qquad Q \qquad Q \qquad R$$

Pour garantir que la formule initiale est bien formée, il faut vérifier que ses sous-formules sont bien formées.

S, P, Q et R sont bien formées, car ils sont des symboles de proposition de **LP**

Concepts fondamentaux: la sémantique des propositions logiques

Sémantique

- Donner une sémantique à un formule : associer à une formule bien formée **un sens.**
- **Le sens d'une formule** est simplement **sa valeur de vérité (vrai ou faux).**
- Calcul de la valeur de vérité de la formule (**sens d'une formule**):
  - Sens des éléments atomiques (propositions atomiques).
  - Sens des connecteurs.

Sémantique

- **Sens des éléments atomiques :** Il est nécessaire de fixer les valeurs des propositions élémentaire qui constituent cette formule.

Pour décider si la formule P est vraie (conjonction de 2 propositions atomiques Q et R)

- **P:** Il pleut à Jijel **et** il neige à Sétif

$(Q \land R)$

Il faut fixer les valeurs des propositions élémentaires Q et R

- **Q:** Il pleut à Jijel.

- **R :** Il neige à Sétif.

Sémantique

Sens des connecteurs : les connecteurs peuvent être vus comme des fonctions, qui étant donné deux valeurs de vérité de deux propositions, ils donnent une valeur de vérité.

Les tables de vérité des connecteurs

(0 représente la valeur « faux », et 1 représente la valeur « vrai »)

La négation: $\neg P$

P	**¬ P**
0	1
1	0

La conjonction : **P ∧ Q (P et Q)**

P	**Q**	**P ∧ Q**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La disjonction : **P ∨ Q (P ou Q)**

P	**Q**	**P ∨ Q**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Sémantique

Sens des connecteurs : les connecteurs peuvent être vus comme des fonctions, qui étant données deux valeurs de vérité de deux propositions, ils donnent une valeur de vérité.

Les tables de vérité des connecteurs

(0 représente la valeur « faux », et 1 représente la valeur « vrai »)

L'implication : $\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$

$(P \text{ implique } Q)$ **logiquement équivalente à** $\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{q}$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee q$	$P \rightarrow Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

P	Q	$P \rightarrow Q$
(2 = 1) Faux	(2+1 = 1+1) Faux	✔
(2 = 1) Faux	(2*0 = 1*0) Vrai	✔
$2^2 = (-2)^2$ Vrai	(2 = -2) Faux	✘
(2 = 2) Vrai	(2*0 = 2*0) Vrai	✔

Sémantique

- **Sens des connecteurs :** les connecteurs peuvent être vus comme des fonctions, qui étant données deux valeurs de vérité de deux propositions, ils donnent une valeur de vérité.

Les tables de vérité des connecteurs

(0 représente la valeur « faux », et 1 représente la valeur « vrai »)

L'implication : $\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$

$(P\ implique\ Q)$ **logiquement équivalente à** $\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{q}$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee q$	$P \rightarrow Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	**0**	0	0	**0**
1	1	0	1	1

La proposition **$(P \rightarrow Q)$ est fausse uniquement si Q est fausse et P est vraie.**

L'intérêt de cet opérateur est de **ne pas accepter le cas, où** **l'on part d'une proposition P vraie** **et** **qu'on arrive à une proposition Q fausse**.

Sémantique

- **Sens des connecteurs :** les connecteurs peuvent être vus comme des fonctions, qui étant données deux valeurs de vérité de deux propositions, ils donnent une valeur de vérité.

Les tables de vérité des connecteurs

(0 représente la valeur « faux », et 1 représente la valeur « vrai »)

L'équivalence : $P \leftrightarrow Q$

$(P$ *équivaut* à $Q)$ **logiquement équivalente à** $(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Vrai $\rightarrow$ *Faux* ✗

Exercice

Calculer les valeurs de vérité de la formule suivante :

$$\neg(\neg P \wedge Q)$$

P	Q	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$\neg(\neg P \wedge Q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

Exercice

- Est-ce que les formules 1 et 2 sont logiquement équivalentes ?

1. **P**
2. $\neg\neg P$

1. $P \rightarrow Q$
2. $\neg Q \rightarrow \neg P$

P	¬P	¬¬P
0	1	0
0	1	0
1	0	1
1	0	1

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	**0**	**0**
1	1	1

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
1	1	1
1	0	1
0	**1**	**0**
0	0	1

Exercice

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique des propositions.

- **Je n'aime pas les maths**
- **($\neg$ P), P = « j'aime les maths »**
- **Ali mange une pomme et boit de l'eau**
- **(P $\wedge$ Q), P = « Ali mange une pomme », Q = « Ali boit de l'eau »**
- **Il y a un chat noir dans la cour.**
- **(P $\wedge$ Q), P = « Il y a un chat dans la cour » , Q = «Ce chat est noir»**

Exercice

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique des propositions.

- **Si le ciel est bleu, alors il fait beau**
- **$(P \rightarrow Q)$, P = « le ciel est bleu » ; Q = « il fait beau »**
- **Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi**
- **$(\neg P \rightarrow \neg Q)$, P = « tu m'aides quand j'ai besoin de toi », Q = « je t'aide quand tu as besoin de moi »**
- **Il n'est pas vrai que Ali viendra si Mohammed ou Karim vient.**
- **$((Q \lor R) \rightarrow \neg P)$, P = « Ali vient » ; Q = « Mohammed vient » ; R = « Karim vient »**

LE SAVIEZ-VOUS

3 min

Le paradoxe du menteur :

- **P : je mens.**

- Si **P est vraie**, alors P est fausse, car le locuteur ne ment pas.
- Si **P est fausse**, alors P est vraie, car le locuteur ment.

La logique ne peut pas résoudre ce paradoxe car il conduit à une contradiction

Sémantique

- Dans un système formel, certaines propositions sont désignées comme étant vraies. On les appelle **des axiomes/prémisses**. Par exemple, **les faits** d'une base de connaissances sont des **axiomes**

- **Raisonnement logique** : le raisonnement est le processus qui consiste à appliquer **des règles d'inférence** pour dériver **des conclusions** à partir **des axiomes**.

$$\frac{\text{Prémisses}}{\text{Conclusions}}$$

Exemple

$$\frac{\begin{array}{l}\text{S'il pleut, la route est mouillée}\\ \text{La route n'est pas mouillée}\end{array}}{\text{Il ne pleut pas}}$$

Ou

Prémisses |- conclusions

⊢ est le symbole de dérivation

Sémantique

- **Une règle d'inférence est une fonction qui prend** un ensemble de **prémisses** comme arguments et rend un ensembles **de conclusions.**

- Exemple de règles d'inférence :

  - **Simplification;**
  - **Transitivité ;**
  - **Contraposition;**
  - **Modus Ponens** ;
  - **Modus Tollens** ;
  - …

Sémantique

- La **simplification** :
  - **Si on sait que « P et Q » est vrai, alors nous pouvons conclure que P est vrai et/ou que Q est vrai.**
  - **SI** (P ∧ Q) est vrai **alors P est vrai** et **Q est vrai**
  - (P ∧ Q) ⊢ **P ; (P ∧ Q)** ⊢ **Q**
  - **de** (P ∧ Q) **on déduit P ; de** (P ∧ Q) **on déduit** Q

Le chat est noir et le chien est grand	**P :** Le chat est noir	**Q :** le chien est grand	**P ∧ Q** ✓
Le chat est noir	**P :** Le chat est noir		**P** ✓
Le chien est grand	**Q :** le chien est grand		**Q** ✓

Sémantique

- La **transitivité** :
  - **Si on sait que P implique Q, et que Q implique R, alors P implique R.**
  - Si $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow R$ **alors** $P \rightarrow R$.
  - $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \vdash P \rightarrow R$
  - **de** $(P \rightarrow Q)$ **et** $(Q \rightarrow R)$ **on déduit** $P \rightarrow R$

S'il pleut, la route est mouillée	**P :** S'il pleut	**Q :** la route est mouillée	$P \rightarrow Q$ ✓
Si la route est mouillée, il y a des flaques d'eau	**Q** : Si la route est mouillée	**R :** il y a des flaques d'eau	$Q \rightarrow R$ ✓
S'il pleut, il y a des flaques d'eau	$P \rightarrow R$: S'il pleut, il y a des flaques d'eau		$P \rightarrow R$ ✓

Sémantique

- La **contraposition** :
  - **Si une implication est vraie, alors sa contraposée est également vraie;**
  - **SI** ($P \rightarrow Q$) est vrai **alors** **($\neg Q \rightarrow \neg P$) est vrai.**
  - **L'implication « si non B alors non A » est appelée contraposée de « si A alors B ».**
  - **($P \rightarrow Q$)** $\vdash$ **($\neg Q \rightarrow \neg P$)**
  - **de $P \rightarrow Q$ on déduit $\neg Q \rightarrow \neg P$**

Si un nombre est impair,
alors il n'est pas divisible par 2.

P : Si un nombre est impair

Q : il n'est pas divisible par 2

$P \rightarrow Q$ ✔

Si un nombre est divisible par 2,
alors il n'est pas impair

¬Q : Si un nombre est divisible par 2

¬P : il n'est pas impair

$\neg Q \rightarrow \neg P$ ✔

Sémantique

- Le **modus Ponens** (raisonnement direct) :
  - **Si une implication est vraie et que la prémisse est vraie, alors la conséquence est vraie.**
  - **SI** (P est vrai et P → Q) **alors Q est vrai.**
  - **(P ∧ (P → Q)) ⊢ Q**
  - **de P et P → Q on déduit Q**

S'il pleut, J'apporte mon parapluie	**P :** S'il pleut	**Q :** J'apporte mon parapluie	**P → Q**	✔
Il pleut	**P :** il pleut		**P**	✔
J'apporte mon parapluie	**Q :** J'apporte mon parapluie		**Q**	✔

Sémantique

- Le **modus Tollens** (raisonnement indirect) :
  - **Si une implication est vraie et que la conséquence est fausse, alors la prémisse est fausse.**
  - **SI** (Q est faux et $P \to Q$) **alors P est faux.**
  - $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \vdash \neg P$
  - **de $\neg Q$ et $P \to Q$ on déduit $\neg P$**

S'il pleut, la route est mouillée	**P :** S'il pleut	**Q :** la route est mouillée	$P \to Q$
La route n'est pas mouillée	**¬ Q :** La route n'est pas mouillée		$\neg Q$
Il ne pleut pas	**¬P :** Il ne pleut pas		$\neg P$

Exercice

Appliquer **le modus tollens** sur les proposition suivantes :

- **Si je ne fais pas mes devoirs, je n'aurai pas de bonnes notes.**

- **J'ai eu de bonnes notes.**
- **Donc, j'ai fait mes devoirs.**

- **Si je ne mets pas d'essence, la voiture ne roule pas. La voiture roule.**

- **La voiture roule**
- **Donc, j'ai mis de l'essence.**

- **Si je n'ai pas d'argent, je ne peux pas acheter de nourriture. J'ai acheté de la nourriture.**

- **J'ai acheter de la nourriture**
- **Donc, j'ai de l'argent.**