وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة جيجل

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بعنوان:

نظريات وتمارين محلولة في الاحتمالات

لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير

من إعداد:

د. بوبلوطة بلال

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير جامعة جيجل

السنة الجامعية: 2016-2017

فهرس المحتويات

المقدمة

المقدمة:

الغرض من هذه المطبوعة هو تقديم المبادئ الأولية في نظرية الاحتمالات. وهي كمكملة لمناهج الإحصاء على اعتبار أن نظرية الاحتمالات هي أساس الإحصاء الرياضي والذي بدوره يعتبر أيضا كتمهيد أو كمدخل للاقتصاد القياسي. حيث أن هدفها الأساسي هو تمهيد طلبة السنة الأولى لدراسة الإحصاء الرياضي في السنة الثانية. ومن محاسن هذا المقرر أنه يمكن لجميع الطلبة أن يستوعبوا على الأقل ما يطلب منهم فهمه، حتى أولائك الذين لا يملكون خلفية جيدة في الرياضيات حيث يتطلب فقط بعض مبادئ التفاضل والتكامل.

وقد صممت هذه المطبوعة بشكل منهجي وفقا لأي مرجع في الاحتمالات. وذلك بهدف تطوير قدرات طلبة السنة الأولى في اكتساب المهارة والخبرة اللازمين في المبدأ الأساسي للعد أو التحليل التوافقي الذي يعتبر فهمه أمر أساسي لكي يتمكن الطالب من استوعاب حساب الاحتمالات والمتغيرات العشوائية والتي بدورها تعتبر أمر ضروري لفهم التوزيعات الاحتمالية. من أجل ذلك حرصت على عرض المفاهيم النظرية بشكل مختصر وربطها باستخداماتها التطبيقية؛ من خلال إعطاء أمثلة محلولة عن كل المفاهيم المدرجة في مقياس الاحتمالات.

تركز هذه المطبوعة على شرح وتوضيح المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات متبوعة بسلسلة من التمارين المحلولة بنوع من التفصيل في نهاية كل فصل، حيث يتضمن مقياس الاحتمالات على أربعة فصول مرتبة كالآتي:

- مفاهيم عامة بما في ذلك المبدأ الأساسي للعد، التبديلة، الترتيبة والتوفيقة.
- بديهيات الاحتمالات بما في ذلك الجمع وضرب الاحتمالات الحوادث المتنافية وغير المتنافية، المستقلة وغير المستقلة وكذلك نظرية بايز وقاعدة الاحتمال الكلي.
- المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة.
- التوزيعات الاحتمالية التي تشمل التوزيع الثنائي والبواسوني وكذلك التوزيع الطبيعي.
- تمارين محلولة حلا مفصلا في جميع الفصول المتطرق إليها وفق البرنامج المقترح من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

هذه المحاضرات موجهة لطلبة السنة أولى علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير ولجميع العلوم الاجتماعية والإنسانية. كما تعد الطلاب لسهولة وفهم واستيعاب مقاييس الإحصاء الرياضي والاقتصاد القياسي.

د. بلال بوبلوطة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

جامعة جيجل.

الفصل الأول:

التحليل التوافقي

1__ المبدأ الأساسي للعد

2__ التباديل

3__ التراتيب

4__ التوافيق

1. المبدأ الأساسي للعد

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها في هذه الفصول، والذي ينص على أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة ما هي n_1 والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي n_2 فإن النتائج الممكنة للتجربتين معا هي $n_1 \times n_2$. (Sheldon, 2010)

مثال 1.1: إذا كان لدينا امتحان الإحصاء متكون من تمرينين، حيث أن التمرين الأول متكون من 3 أسئلة والتمرين الثاني من 4 أسئلة. فإذا طلب من الطلاب الإجابة على سؤال واحد على الأكثر من كل تمرين. ما هي عدد الحالات الممكنة لحل هذا الامتحان؟

حسب قاعدة المبدأ الأساسي للعد يكون للطالب 3 حالات لحل التمرين الأول نرمز لها ب n_1 و4 حالات لحل التمرين الثاني نرمز لها ب n_2 ولحل التمرينين معا يكون للطالب:

$$\text{n} = n_1 \times n_2 = 3 \times 4 = 12$$

مثال 2.1:

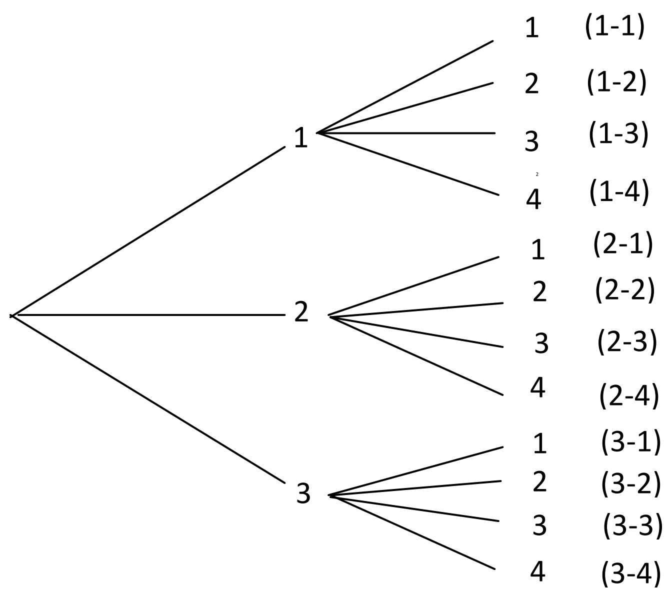
إذا كانت لدينا تجربة متمثلة في رمي قطعة نقود وحجرة نرد في آن واحد. ما هي عدد الحالات الممكنة:

لدينا قطعة النقود يمكن أن تقع أحد الوجهين (H, T). بينما حجرة النرد يمكن أن تقع على أحد الوجوه الستة $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. ومنه فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي:

$$\text{n} = n_1 \times n_2$$

$$2 \times 6 = 12$$

ويمكن حل المثال 2.1 من خلال الشجرة البيانية التي تعتبر كطريقة تستخدم لحساب عدد الحالات الممكنة للتجارب عندما يكون عدد النتائج منته (قليل). ويمكن توضيح كيفية استخدام الشجرة البيانية في:



2. التباديل

سوف نميز هنا بين نوعين من التباديل:

- التباديل دون تكرار.
- التباديل مع تكرار.

2. 1. التباديل دون تكرار

يمكن أن نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر مأخوذة k في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي $n = k$. أي هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل. (رجال، 1995) ويعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$P_n = n!$$

$n!$: يقرأ n عاملي أو مضروب n. حيث أن:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ 5! &= 120 \\ 6! &= 720 \\ 7! &= 5040 \\ 8! &= 40320 \\ 9! &= 362880 \\ 10! &= 3628800 \end{aligned}$$

مثال 3.1: ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف $n = \{a, b, c\}$؟

من خلال العد المباشر نحصل على 6 طرق (a, b, c)، (a, c, b)، (b, a, c)، (b, c, a)، (c, a, b)، (c, b, a). كل واحدة من هذه الترتيبات يعرف بالتبديلة. حيث أنه هناك 6 تبديلات ممكنة من مجموعة من 3 عناصر مختلفة. ويمكن الحصول على هذه النتيجة أيضا من قاعدة المبدأ الأساسي للعد. حيث يتم اختيار الحرف الأول ب 3 طرق ويبقى لنا حرفين لاختيار الحرف الثاني وحرف واحد لاختيار الحرف الثالث.

مثال 4.1: كم كلمة يمكن تشكيلها من الحروف التالية (s, k, l, m, h) قد لا يكون للكلمة معنى.

في هذه الحالة يمكن اختيار الحرف الأول بـ 5 طرق مختلفة وتبقى لنا 4 طرق مختلفة لاختيار الحرف الثاني لأن الحرف الذي اخترناه في الأول لا يكون ضمن الحروف المتبقية و3 لاختيار الحرف الثالث وهكذا حتى يتم أخذ جميع الحروف، ويمكن التعبير عن ذلك في:

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 120$$

أي $$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

نفترض الآن أنه لدينا n عنصر، في هذه الحالة يمكن التعبير عن الصيغة العامة للتبديلة P_n بنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق. حيث يتم اختيار العنصر الأول بـ n طريقة مختلفة، وثم يتم اختيار العنصر الثاني بطرق عددها $(n-1)$، وبعد ذلك يمكن اختيار العنصر الثالث بطرق عددها $(n-2)$، ونستمر على هذا المنوال حتى نصل إلى العنصر الأخير الذي تبقى لنا طريقة واحدة لاختياره بـ $(n-k+1)$، والصيغة العامة للتبديلة تعطى في المعادلة التالية:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots . n-k+1$$

أما إذا كان $n > k$ فإن الصيغة العامة تصبح:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots \dots \dots . n-k+1 =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots \dots (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال 4.1: إذا كانت لدينا الأرقام التالية $(4, 6, 9, 3, 1, 7)$. كم عددا مكونا من 3 أرقام يمكن تشكيله من هذه الأرقام؟

في هذه الحالة نحن نريد اختيار مجموعة جزئية من الأرقام k من المجموعة الكلية n، حيث $(n > k)$. يمكن اختيار رقم الميئات بـ 6 طرق ورقم العشرات بـ 5 طرق ورقم الآحاد بـ 4 طرق.

$$\boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} = 120$$

وبتطبيق القانون الأخير نحصل على نفس النتيجة:

$$p(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!}=120$$

2.2. التباديل مع تكرار

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أي عندما تكون العناصر متماثلة. في هذه الحالة يمكن معرفة عدد التباديل من خلال الصيغة العامة التالية:

$$p_n^{n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_k}=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\ldots\ldots n_K!}$$

حيث أن: من n_1 حتى n_K تمثل العناصر المتماثلة. $n_1+n_2+n_3+\cdots n_k=n$

مثال 4.1: ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من كلمة $Proposition$.

لدينا حرف P تكرر مرتين أي $n_1=2$. وحرف o تكرر ثلاث مرات أي $n_2=3$ وهكذا. وبتطبيق القانون أعلاه نحصل على:

$$p_{11}^{2.3.2.1.1.1.1}=\frac{11!}{3!\times2!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!}=1663200$$

3. التراتيب

في الكثير من الحالات في نظرية الاحتمالات خاصة في التحليل التوافقي نصادف تجارب تتمثل في اختيار مجموعة جزئية متكونة من K عنصر من مجموعة كلية متكونة من n عنصر، حيث $K\leq n$. مثل اختيار 3 كرات من وعاء فيه n من الكرات. تسمى عملية الاختيار هذه بالترتيبة، ويوجد نوعين من التراتيب: (رجال، 1995)

- التراتيب مع إعادة.
- التراتيب بدون إعادة.

1.3. التراتيب مع إعادة

إذا كانت التجربة متمثلة في سحب كرات من إناء فيه n من الكرات مثلا، في هذه الحالة عند إجراء التجربة تعاد الكرة المسحوبة إلى الإناء بعد كل سحبة، وبما أنه توجد n طريقة مختلفة لاختيار كل كرة فبتطبيق المبدأ الأساسي للعد نحصل على:

$$n\times n\times n\ldots\ldots\ldots.n=n^k$$

ويمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$$AR_n^k=n^k$$

مثال 5.1: ما هي عدد الأعداد المشكلة من 3 أرقام التي يمكن تكوينها من الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية؟

في هذه الحالة الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية تمثل المجموعة n وهي $n = \{2, 4, 6, 8\}$. والمجموعة الجزئية $k = 3$. وتطبيق قانون الترتيبية مع إعادة نحصل على:

$$AR_4^3 = 4^3 = 64 \text{ عددا}$$

مثال 6.1: ما هي عدد المجموعات الجزئية المشكلة من $k = 2$ التي يمكن تكوئها من الحروف التالية $n = \{a, b, c\}$، يسمح بإعادة الحرف أكثر من مرة؟

من خلال العد المباشر نحصل على 9 ثنائيات المتمثلة في:

$$(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)$$

وبتطبيق قانون الترتيبة مع الإعادة نحصل على:

$$AR_3^2 = 3^2 = 9 \text{ ثنائيات}$$

1.3. التراتيب دون إعادة

في هذه الحالة يجب عدم إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة n وبذلك لا تكون هناك إعادة للعناصر. حيث أن السحبة الأولى تكون من المجموعة n، والسحبة الثانية تكون من المجموعة $n - 1$، وهكذا حتى السحبة الأخيرة التي تكون من المجموعة $n - k + 1$. ويمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

وهو نفس القانون الذي تطرقنا إليه في التبديلة بدون تكرار.

ملاحظة: هناك العديد من الكتّاب في نظرية الاحتمالات لا يفرقون بين التبيدلة والترتيبة حيث يعتبرانهما نفس الشيء.

مثال 7.1: ما هي عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 5، 3 حروف التي يمكن تشكيلها من الكلمة $mathématique$ بدون إعادة الحروف؟

في الحالة الأولى لدينا $n = 12$ و $k = 5$، وبتطبيق قانون الترتيبة دون إعادة نحصل على:

$$A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{7!} = 95040 \text{ كلمة}$$

في الحالة الثانية لدينا $n = 12$ و $k = 3$، وبتطبيق قانون الترتيبة دون إعادة نحصل على:

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{9!} = 1320$$

4. التوفيقة

فرضا أنه لدينا n من الأشخاص ونود تشكيل لجنة متكونة من k شخص. ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها؟ نلاحظ أن حساب عدد اللجان هو نفس مشكلة تكوين مجموعة جزئية من k عنصر من المجموعة الكلية n. لكن تشكيل التوفيقة يختلف عن تشكيل التبديلة من حيث أنه في التوفيقة لا نأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر. على سبيل المثال، ما هي عدد التباديل المكونة من $k = 2$ التي يمكن تشكيلها من الحروف $n = \{a, b, c, d\}$؟ من خلال العد المباشر نحصل على 12 تبديلة كالأتي: (ليبشتز، 2003)

$$ab, ac, ad, ba, cb, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$$

أما عندما نريد حساب عدد التوافيق المكونة من $k = 2$ فنحصل على 6 توفيقات فقط وهي:

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd$$

يمكن توضيح العلاقة بين التبديلة والتوفيقة في الجدول التالي:

التباديل	التوافيق
ab, ba	ab
ac, ca	ac
ad, da	ad
bc, cb	bc
bd, da	bd
cd, dc	cd

نلاحظ أن كل توفيقة مكونة من حرفين تحدد $2! = 2$ تبديلتين للحروف الموجودة في التوفيقة، وهذا يعني أن عدد التوافيق مضروب في $2!$ يساوي عدد التباديل. أي

$$C_n^k \times 2! = p_n^k$$

وبما أن كل توفيقة لمجموعة n من العناصر مأخوذة k في كل مرة تحدد $k!$ من التباديل نستنتج أن:

$$p_n^k = k! \times C_n^k$$

ومنه

$$C_n^k = \frac{p_n^k}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{ki} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

وبالتالي نحصل على قانون التوفيقة:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال 8.1: ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة متكونة من 10 أشخاص؟ لدينا $k = 4$ و $n = 10$، بتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210 \text{ لجنة مختلفة}$$

مثال 9.1: إذا كان لدينا 6 رجال و5 نساء. ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 5 أشخاص ثلاث رجال وامرأتين التي يمكن تكوينها؟ بتطبيق قانون التوفيقة نجد:

$$C_6^3 \times C_5^2 = 20 \times 10 = 200 \text{ لجنة مختلفة}$$

تمارين محلولة

التمرين 1: كم عددا مكون من 3 أرقام يمكن تشكيله من الأرقام التالية: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

1– لا يسمح بتكرار الرقم؟

2– العدد يجب أن يكون أقل من 500؟

3– العدد فردي؟

4– العدد زوجي؟

الحل:

1– في هذه الحالة يتم اختيار رقم الميئات بـ 9 طرق لأن الصفر لا يحسب، ثم نختار رقم العشرات بـ 9 طرق لأن الصفر يحسب في هذه لكن تصبح لدينا 9 أرقام فقط لأننا اخترنا رقم في خانة الميئات ورقم الآحاد يتم اختياره ب 8 طرق:

$$9 \times 9 \times 8 = 648 \text{ عدد}$$

2– نختار رقم الميئات بـ 4 طرق ورقم العشرات بـ 9 طرق ورقم الآحاد بـ 8 طرق:

$$4 \times 9 \times 8 = 288 \text{ عدد}$$

3– نختار رقم الآحاد بـ 5 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الفردية الموجودة، تم نختار رقم المئيات بـ 8 طرق ورقم العشرات بـ 8 طرق:

$$8 \times 8 \times 5 = 320 \text{ عدد}$$

4 – نختار رقم الآحاد بـ 4 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الزوجية الموجودة، ورقم المئيات 8 طرق ورقم العشرات 8 طرق:

$$8 \times 8 \times 4 = 256 \text{ عدد}$$

التمرين 2: بكم طريقة يمكن أن يجلس 4 طلبة و3 طالبات في صف إذا كان:

1– الجلوس كما يشاءون؟

2– الطلبة جنب بعضهم والطالبات جنب بعضهن؟

3– إذا جلس الطلبة فقط جنب بعضهم؟

4– طالبان لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

الحل:

1– عدد الطرق الممكن إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاءون هو:

$$p_7 = 7! = 5040$$ طريقة

2– الطلبة مع بعضهم والطالبات مع بعضهن:

$$4! \times 3! \times 2! = 288$$ طريقة

3– جلوس الطلبة فقط مع بعضهم، يمكن أن يجلس هؤلاء الطلبة فيما بينهم ب $4!$ ثم نعتبرهم شخص واحد حيث يمكنهم الجلوس مع الطالبات ب $4!$:

$$4! \times 4! = 576$$ طريقة

4– طالبان لا يمكنها الجلوس جنب بعضهما: لدينا عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة كما يشاءون هو 5040 طريقة.

نعتبر هذان الطالبان شخص واحد وبالتالي يصبح لنا 3 طلبة و3 طالبات حيث يمكنهم الجلوس بطرق عددها:

$$6! = 720$$ طريقة

لكن هذان الطالبان يمكنهما الجلوس جنب بعضهما بطرق عدد:

$$2! = 2$$ طريقة

وبالتالي عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات مع جلوس طالبين جنب بعضهما هو

$$6! \times 2! = 1440$$ طريقة

ومنه عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات بحيث طالبين لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما هو

$$5040 - 1440 = 3600$$ طريقة

التمرين 3: كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من إعادة ترتيب حروف الكلمة $TATTOO$ (قد لا يكون للكلمة معنى):

لدينا في هذه الكلمة بعض الحروف تكررت أكثر من مرة وبالتالي نحن أمام التبديلة مع تكرار:

$$p_6^{3\times1\times2} = \frac{6!}{3!\times1!\times2!} = 60 \text{ كلمة}$$

التمرين 4: نلقي حجرة نرد 10 مرات، بكم طريقة يمكن أن نحصل على الرقم 1 مرتين، الرقم 2 أربعة مرات، الرقم 3 مرة واحدة والرقم 4 ثلاثة مرات؟

الحل:

لدينا مجموعة من الأرقام عددها 10 مقسمة إلى 4 مجموعات تحتوي كل مجموعة على عدد من الأرقام المتشابهة. في هذه الحالة يمكن ترتيب هذه الأرقام من خلال التبديلة مع تكرار:

$$p_{10}^{2\times4\times1\times3} = \frac{10!}{2!\times4!\times1!3!} = 12600 \text{ طريقة ممكنة}$$

التمرين 5: تقدم 4 ذكور و3 إناث لمقابلة من أجل وظيفة معينة. بكم طريقة يمكن إجراء هذه المقابلة إذا كان:

1– في كل مرة مقابلة شخص فقط؟

2– في كل مرة لا يتتابع شخصين من نفس الجنس؟

الحل:

1– يمكن إجراء هذه المقابلة حيث يتم مقابلة شخص واحد دون الأخذ بعين الاعتبار جنسه بطرق عددها:

$$p_7 = 7! = 5040 \text{ طريقة}$$

2– يمكن إجراء هذه المقابلة بحيث لا يتتابع شخصين من نفس الجنس بطرق عددها:

$$(4)(3)(3)(2)(2)(1)(1) = 4!\times3! = 144 \text{ طريقة}$$

التمرين 6: ما هو عدد كلمات السر التي يمكن الحصول عليها من استخدام حرفين من حروف اللغة الإنجليزية (عددها 26) وثلاثة أرقام يسار الأحرف في الحالات التالية:

1– عدم تكرار الحرف والرقم؟

2 – تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم؟

3 – تكرار الحرف والرقم؟

الحل:

1 – عدد الكلمات مع عدم تكرار الحرف والرقم هو

$$26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 = 468000$$ كلمة

2– عدد الكلمات مع تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم هو

$$26 \times 26 \times 10 \times 9 \times 8 = 486720$$ كلمة

3– عدد الكلمات مع تكرار الحرف والرقم هو

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 676000$$ كلمة

التمرين 7: في مسابقة معينة فرض على الطلبة الإجابة على 5 من 8 أسئلة، بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار عدد الأسئلة في الحالات التالية:

1– اختيار الأسئلة بدون شرط؟

2– إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية؟

3– إذا كان من الضروري الإجابة على ثلاثة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى؟

الحل:

1– يمكن اختيار الأسئلة الخمسة بطرق عددها:

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$$ طريقة

2– إذا أجاب الطالب على الأسئلة الثلاثة الأولى، يبقى له اختيار السؤالين المتبقيين من بين الأسئلة الخمسة الأخيرة بطرق عددها:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$ طريقة

3– يمكنه اختيار الأسئلة الثلاثة الضرورية من الخمسة أسئلة الأولى بطرق عددها:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$ طريقة

ويبقى له سؤالين يتم اختيارهما من الأسئلة الثلاثة الأخيرة بطرق عددها:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$ طريقة

وبالتالي يكون إجمالي عدد طرق اختيار الأسئلة الخمسة هو:

$$10 \times 3 = 30$$ طريقة

التمرين 8: إذا كان لدينا مجموعة من الطلبة متكونة من 5 طلبة و7 طالبات. إذا أردنا تكوين لجنة من هؤلاء الطلبة حيث تتكون من 5 أشخاص، ما هي عدد اللجان التي يمكن تكوينها إذا علمت:

1– بدون شرط؟

2– ثلاثة طلبة يرفضون ترشيحهم؟

3– يجب أن يكون ضمن اللجنة طالبين على الأقل؟

3– الطالب X والطالبة Y يرفضان أن يكونا في اللجنة معا؟

الحل:

1– عدد اللجان التي يمكن تكوينها هي

$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = 792$$ لجنة

2– عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث ثلاثة من الطلبة يرفضون الترشح هو

$$C_{9}^{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126$$ لجنة

3– عدد اللجان التي يكون فيها طالبين على الأقل هي

$$C_5^2 \times C_7^3 + C_5^3 \times C_7^2 + C_5^4 \times C_7^1 + C_5^5 \times C_7^0 =$$

$$10 \times 35 + 10 \times 21 + 5 \times 7 + 1 \times 1 = 596$$ لجنة

4– عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث الطالب X والطالبة Y لا يمكنهما أن يكونا في اللجنة معا هو

نعتبر الطالب X والطالبة Y أنهما ضمن اللجنة وبالتالي عدد اللجان التي يجتمعان فيها هي:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 240$$ لجنة

من تم يمكن حساب اللجان التي لا يجتمع فيها الطالب X والطالبة Y من خلال:

$$C_{12}^{5} - C_{10}^{3} = 792 - 240 = 552$$ لجنة

التمرين 9: ما هي عدد أرقام الهاتف ذات العشرة أرقام التي يمكن تكوينها من الأرقام التالية: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ إذا علمت:

1– يسمح بتكرار الرقم أكثر من مرة؟

2 – لا يسمح بتكرار الرقم؟

3– يجب أن يبدأ الرقم بـ 056 ولا يسمح بتكرار الرقم؟

الحل:

1– عدد الأرقام التي يمكن تشكيلها ويسمح بتكرار الرقم هي:

$$AR_{10}^{10} = 10^{10} = 1 \times 10^{\,10}$$ رقم

2– عدد الأرقام التي يمكن تشكيلها بحيث لا يسمح بتكرار الرقم هي:

$$p_{10} = 10! = 3628800$$ رقم

3– عدد الأرقام التي يمكن تشكيلها بحيث يبدأ الرقم بـ 056 ولا يسمح بتكرار الرقم هي:

في هذه الحالة نحن بصدد تكوين أرقام الهاتف من الأرقام السابقة باستثناء الأرقام 056 لأننا نضعها في بداية كل رقم يتم تشكيله وبالتالي عدد الأرقم التي يمكن تشكيلها هي:

$$p_7 = 7! = 5040$$ رقم

التمرين 10: عميد كلية يريد تشكيل لجنة تضم 5 أعضاء يتم اختيارهم من 5 رجال و6 نساء.

1– ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟

2– ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا علمت أن:

أ– من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط؟

ب– من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر؟

ج– يجب أن تتكون اللجنة من رجلين وامرأتين على الأقل؟

3– ما هو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب؟

الحل:

1 – عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو

$$C_{11}^{5} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462$$ لجنة

2– عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا كان:

أ– من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط هو:

$$C_5^1 \times C_6^4 = 5 \times 15 = 75$$ لجنة

ب– من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر هو:

$$C_5^3 \times C_6^2 + C_5^4 \times C_6^1 + C_5^5 \times C_6^0 =$$

$10 \times 15 + 5 \times 6 + 1 \times 1 = 181$ لجنة

ج– يجب أن تكون اللجنة متكونة من رجلين وامرأتين على الأقل هو:

$$C_5^2 \times C_6^3 + C_5^3 \times C_6^2 =$$

$10 \times 20 + 10 \times 15 = 350$ لجنة

3– عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب هو

$A_{11}^3 = \frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11!}{8!} = 990$ لجنة

التمرين 11: أثبت أن:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

الحل:

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{[(n-1)k(k-1)]!(k-1)} + \frac{(n-1)!}{[n-1-k]!k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!(k-1)} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k(k-1)} \\
&= \frac{(n-1)!k+(n-1)!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!k(k-1)} = \frac{(n-1)![k+n-k]}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k
\end{aligned}$$

التمرين 12: إذا كانت لديك الكلمة $eleven$:

1– ما هي عدد الكلمات المختلفة (قد لا يكون للكلمة معنى) التي يمكن تشكيلها من هذه الكلمة؟

2– ما هي عدد الكلمات المختلفة بحيث تكون الثلاثة حروف e متجاورة؟

3– ما هي عدد الكلمات المختلفة التي تبدأ وتنتهي بالحرف e؟

4– ما هي عدد الكلمات المختلفة التي تبدأ بالحرف e وتنتهي بالحرف l؟

الحل:

1– عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تشكيلها هو:

$p_6^{3\times1\times1\times1} = \frac{6!}{3!\times1!\times1!\times1!} = 120$ كلمة

2 – عدد الكلمات المختلفة بحيث تكون الثلاثة حروف e متجاورة هو:

$$p_4 = 4! = 24$$ كلمة

3– عدد الكلمات المختلفة التي تبدأ وتنتهي بالحرف e هو:

$$p_4 = 4! = 24$$ كلمة

4– عدد الكلمات المختلفة التي تبدأ بالحرف e وتنتهي بالحرف l هو:

$$p_4^{2\times1\times1} = \frac{4!}{2!\times1!\times1!} = 12$$ كلمة

التمرين 13: شخص ما أراد أن يدعوا بعض أصدقائه المقربين لحفلة عيد ميلاده. إذا كان له 9 أصدقاء بكم طريقة يمكن أن يدعوا:

1– خمسة أصدقاء إلى الحفلة؟

2– خمسة أصدقاء اثنان منهم متزوجان ولا بد من حضورهما معا؟

3– خمسة أصدقاء اثنان منهم متخاصمين ولا يمكنهما الحضور معا؟

الحل:

1– يمكن أن يدعوا هذا الشخص خمسة من أصدقائه بطرق عددها:

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126$$ طريقة

2– يمكن أن يدعوا هذا الشخص خمسة من أصدقائه اثنان منهم متزوجان ولا بد من حضورهما معا بـ:

في هذه الحالة نقوم بحساب عدد الطرق التي يكون فيها الزوجان وعدد الطرق التي لا يكون فيها كالأتي:

$$C_7^3 + C_7^5 = 35 + 21 = 56$$ طريقة

3– يمكن أن يدعوا هذا الشخص خمسة من أصدقائه اثنان منهم متخاصمين ولا يمكنهما الحضور معا بطرق عددها:

نقوم بحساب عدد الطرق التي يجتمع فيها الشخصين المتخاصمين كالآتي:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$ طريقة

وبالتالي يبقى لنا حساب عدد الطرق التي لا يجتمع فيها هذين الشخصين من خلال:

$$C_9^5 - C_7^3 = 126 + 35 = 91$$ طريقة

التمرين 14: بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 أشخاص حول طاولة مستديرة، إذا كان:

1– الجلوس كما يشاءون؟

2– شخصان منهم لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

3– شخص منهم يجلس دائما في الطاولة الأخيرة؟

الحل:

نحن هنا بصدد التبديلة الدائرية وهي حالة خاصة من التباديل التي تطرقنا إليها.

1– عدد الطرق الممكنة لجلوس خمسة أشخاص حول طاولة مستديرة هو:

$$p_n = (n-1)! = (5-1)! = 24 \text{ طريقة}$$

2– عدد الطرق الممكنة بحيث شخصان منهم لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما هو

نعتبر الشخصين المتخاصمين شخص واحد وبالتالي عدد الطرق الممكنة التي يجلس بها 4 أشخاص حول طاولة مستديرة هو:

$$p_4 = (4-1)! = 6 \text{ طريقة}$$

لكن هذين الشخصين يمكنهما الجلوس جنب بعضهما بطرق عددها:

$$p_2 = 2! = 2 \text{ طريقة}$$

وبالتالي عدد الطرق الممكنة التي يجلس بها 4 أشخاص حول طاولة مستديرة بحيث يجلس اثنان منهم جنب بعضهما هو

$$3! \times 2! = 12 \text{ طريقة}$$

ومنه نستنتج عدد الطرق الممكنة التي يجلس بها 5 أشخاص حول طاولة مستديرة بحيث اثنان منهم لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما من خلال:

$$24 - 12 = 12 \text{ طريقة}$$

3– عدد الطرق الممكنة بحيث شخص منهم يجلس دائما في الطاولة الأخيرة هو:

$$p_4 = (4-1)! = 6 \text{ طريقة}$$

التمرين 15: أحسب قيمة n إذا كان لديك:

$$A_n^2 = 72$$

الحل:

$$A_n^2 = n(n-1) = 72$$
$$= n^2 - n = 72 \ \rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

ومنه:

$$(n-9)(n-8) = 0$$

وبما أن n يجب أن يكون موجبا فإن: $n = 9$

التمرين 16: إذا كان لدينا 6 رجال و8 نساء وأردنا تشكيل لجنة تتكون من 3 رجال و3 نساء، ما هي عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا كان:

1– رجلين يرفضان أن يكونا معا؟

2– امرأتين يرفضان أن يكونا معا؟

3– رجل وامرأة يرفضان أن يكونا معا؟

الحل:

1– عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث رجلين يرفضان أن يكونا معا هو:

عدد اللجان التي يمكن تشكيلها من 3 رجال و3 نساء هو

$$C_6^3 \times C_8^3 = 20 \times 56 = 1120 \text{ لجنة}$$

نعتبر هذين الرجلين في اللجنة وبالتالي عدد اللجان يصبح:

$$C_4^1 \times C_8^3 = 4 \times 56 = 224 \text{ لجنة}$$

ومنه يمكن حساب عدد اللجان التي لا يجتمع فيها هذين الرجلين من خلال:

$$1120 - 224 = 896 \text{ لجنة}$$

2– عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث امرأتين يرفضان أن يكونا معا هو:

نقوم بحساب عدد اللجان التي تجتمع فيها هاتين المرأتين من خلال:

$$C_6^3 \times C_6^1 = 20 \times 6 = 120 \text{ لجنة}$$

ومنه يمكن حساب عدد اللجان التي لا تجتمع فيها هاتين المرأتين من خلال:

$$1120 - 120 = 1000 \text{ لجنة}$$

3– عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث رجل وامرأة يرفضان أن يكونا معا هو:

نقوم بحساب عدد اللجان التي يجتمع فيها هذا الرجل والمرأة:

$$C_5^2 \times C_7^2 = 10 \times 21 = 210$$ لجنة

ومنه يمكن حساب عدد اللجان التي لا يجتمع فيها هذا الرجل وهذه المرأة في:

$$1120 - 420 = 910$$ لجنة

التمرين 17: ما هي الترتيبات الخطية المختلفة التي يمكن تشكيلها من الحروف التالية a, b, c, d, e, f إذا علمت أن:

1– a و b يقعان جنب بعضهما؟

2– a قبل b ؟

3– a قبل b و b قبل c ؟

4– a قبل b و c قبل d ؟

5– a و b يقعان جنب بعضهما و c و d يقعان جنب بعضهما؟

6– e لا يكون هو الأخير؟

الحل:

1– عدد الترتيبات التي يمكن تشكيلها بحيث الحرفين a و b يقعان جنب بعضهما هو:

هناك $4!$ ترتيبات مختلفة يمكن تشكيلها من الحروف c, d, e, f. ولدينا $2!$ ترتيبات مختلفة يمكن تشكيلها من الحرفين a, b لأن الحرف a يمكن أن يكون على يسار أو على يمين الحرف b وبالتالي نحصل على ترتيبتين a, b و a, b. لكن الحرفين a, b يمكن أن يقعان في خمسة أماكن بين الحروف c, d, e, f ، إما قبل الحرف الأول، وإما بين الحرف الأول والثاني أو الثاني والثالث وهلم جرا. وبالتالي عدد الترتيبات المختلفة يمكن تشكيلها من خلال:

$$4! \times 2! \times 5 = 240$$ ترتيبة

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا اعتبرت الحرفين a, b حرف واحد وبالتالي تصبح عدد الترتيبات التي يمكن تشيلها من c, d, e, f بالإضافة إلى الحرفين a, b اللذان اعتبرناهما حرف واحد $5!$. لكن الحرفين a, b يمكن أن يكونان جنب بعضهما بطريقتين أي $2!$. ومنه يمكن الحصول على عدد الترتيبات الكلية في:

$$5! \times 2! = 240$$ ترتيبة

2– عدد الترتيبات التي يمكن تشكيلها بحيث a قبل b هو:

يمكن الحصول على $6! = 720$ ترتيبة مختلفة بدون شرط. وبما أن a يجب أن يكون قبل b وأن a يجب أن يكون قبل b أو b قبل a ، فإن عدد الترتيبات يكون:

$$\frac{720}{2} = 360 \text{ ترتيبة}$$

3– عدد الترتيبات التي يمكن تشكيلها بحيث يكون a قبل b و b قبل c هو:

من الترتيبات الممكنة 720، هناك العديد من الترتيبات التي يكون فيها a قبل b و b قبل c ، وأنه يمكن الحصول على $3!$ ترتيب الحروف a, b, c وبالتالي يكون عدد الترتيبات حيث a قبل b و b قبل c هو:

$$\frac{720}{6} = 120 \text{ ترتيبة}$$

4– عدد الترتيبات التي يمكن تشكيلها بحيث a قبل b و c قبل d هو

عدد الترتيبات الممكنة عندما يكون a قبل b هو 360 ترتيبة. وبالتالي النصف يكون c قبل d والنصف الآخر يكون d قبل c . وبالتالي هناك 180 ترتيبة مختلفة عندما يكون a قبل b و c قبل d .

5– عدد الترتيبات التي يمكن تشكيلها بحيث a و b يقعان جنب بعضهما و c و d يقعان جنب بعضهما هو:

نعتبر a و b حرف واحد و c و d حرف واحد وبالتالي عدد الترتيبات يصبح $4! = 24$ ترتيبة. وبما أن الحرفين b, a و d, c يمكن عكسهما فنحصل على $2! \times 2!$ وبالتالي عدد الترتيبات بحيث يكون a و b جنب بعضهما و c و d جنب بعضهما هو:

$$4! \times 2! \times 2! = 96 \text{ ترتيبة}$$

6– عدد الترتيبات التي يمكن تشكيلها بحيث e لا يكون الأخير هو:

عندما يكون e هو الأخير يصبح عدد الترتيبات $5! = 120$ ترتيبة. وبالتالي يمكن حساب عدد الترتيبات بحيث لا يكون e هو الأخير من خلال:

$$6! - 5! = 720 - 120 = 600 \text{ ترتيبة}$$

التمرين 18: إذا كان لدينا 10 أشخاص وأردنا تعيين رئيس وأمين صندوق وسكرتير من هؤلاء الأشخاص. كم عدد الخيارات الممكنة للتعيين إذا كان:

1– التعين بدون قيود؟

2– الشخص A لا يكون إلا إذا كان رئيسا؟

الحل:

1– عدد الخيارات المختلفة الممكنة هو:

$$10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ خيار}$$

2– عدد الخيارات الممكنة حيث أن الشخص A لا يكون إلا رئيسا هو:

$$9 \times 8 \times 7 + 9 \times 8 = 576 \text{ خيار}$$

الفصل الثاني:

بديهيات الاحتمال

1. فضاء العينة والحوادث

في الكثير من الأحيان نصادف أو نقوم بالعديد من التجارب في حياتنا اليومية ونحصل على ملاحظات أو نتائج. فكل تجربة يمكن أن نعرف نتائجها مسبقا من خلال القوانين أو المسلمات خاصة في العلوم التقنية مثل الفيزياء والكيمياء تسمى بالتجربة النظامية. أم التجارب التي لا يمكن أن نعرف نتائجها مسبقا حتى لو كررنا هذه التجربة عدة مرات وفي ظل نفس الشروط فتسمى بالتجربة العشوائية. ومع ذلك، على الرغم من أن نتائج التجربة العشوائية لن تكون معروفة سلفا، دعونا نفترض أن كل مجموعة من النتائج المحتملة هو معروف. هذه النتائج المحتملة للتجربة تعرف بفضاء العينة ويرمز لها بـ Ω. (Bertsekas and Tsitsiklis, 2000)

مثال 1.2: عند رمية حجرة نرد على الأرض تكون عدد النتائج الممكنة أو فضاء العينة:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة يتكون فقط من إحدى النتائج الممكنة للتجربة ونرمز له بالحروف اللاتينية $A, B, C \ldots \ldots$ وينقسم إلى عدة أنواع وهي: (رجال، 1995)

– **الحدث البسيط**: هو الحدث غير القابل للتجزئة، مثلا نقول أن الحدث 6 هو حدث بسيط عند رمي حجرة النرد. لأن الرقم 6 لا يمكن تقسيمه إلى حوادث أخرى.

– **الحدث المركب**: هو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى حوادث بسيطة. مثلا نقول أن حدث ظهور رقم فردي عند رمي حجرة نرد هو حدث مركب لأنه يتكون من عدة حوادث بسيطة مثل $A = \{1, 3, 5\}$.

– **الحدث الأكيد**: نقول عن الحدث أنه أكيد إذا كان يتكون من جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجربة. مثلا نقول أن حدث الحصول على رقم أصغر من 7 عند رمي حجرة نرد هو حدث أكيد لأننا مهما رمينا حجرة النرد فسوف نحصل على رقم من 1 إلى 6. ونرمز له ب $A = \Omega$.

– **الحدث المستحيل**: الحدث المستحيل هو الحدث المستحيل وقوعه مهما أعدنا التجربة. فمثلا نقول حدث ظهور الرقم 8 عند رمي حجرة نرد هو حدث مستحيل لأننا مهما رمينا حجرة النرد فمن المستحيل الحصول على الرقم 8. ونرمز له بـ $A = \emptyset$.

– **الحوادث المتنافية**: هي الحوادث التي يستحيل حدوثها في آن واحد حيث أن وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر أو إذا كان غير متقاطعين أي $A \cap B = \emptyset$.

– **الحوادث غير المتنافية**: الحوادث التي يمكن حدوثها في آن واحد حيث أن حدوث أحدها لا ينفي وقوع الآخر أو إذا كان متقاطعين أي $A \cap B \neq \emptyset$.

مثال 2.2: عند رمي حجرة نرد على الأرض فإن عدد الحالات الممكنة أو فضاء العينة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نفترض أنه عند ظهور رقم زوجي هو الحدث A وأنه عند ظهور رقم فردي هو الحدث B. وعند ظهور رقم أولي هو الحدث C:

$$C = \{2, 3, 5\} \qquad B = \{1, 3, 5\} \qquad A = \{2, 4, 6\}$$

ومنه يمكن القول أن الحدثين A و C هما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد زوجي وأولي في نفس الوقت وبالتالي يكون: $A \cap C = \{2\}$.

ونقول أن الحدثين A و B هما حدثين متنافيين لأنه لا يمكن أن يكون العدد فردي وزوجي في نفس الوقت وبالتالي يكون: $A \cap C = \{\emptyset\}$.

– **الحوادث المستقلة**: هي الحوادث التي عندما يقع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحوادث الأخرى. فمثلا نتائج عدة رميات لقطعة نقود هي حوادث مستقلة، لأن نتائج الرمية الأولى مثلا لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج الرمية الثانية أو الثالثة ......وهلم جرا.

– **الحوادث غير المستقلة**: هي الحوادث التي عند وقوع أحدها يؤثر على احتمال وقوع الحوادث الأخرى أو وقوع أحدها يكون مشروط أو مرتبط بوقوع الحوادث الأخرى. فمثلا عند سحب كرة من صندوق بدون إعادة به n كرة هي حوادث غير مستقلة لأن السحبة الأولى أو الثانية تؤثر على احتمال السحبات الموالية.

2– حساب الاحتمالات

إذا كان حدوث الحدث A يمكن أن يقع بطرق عددها K نسميها عدد الحالات الملائمة من النتائج الكلية للتجربة أي عدد الحالات الممكنة Ω، فإنه يمكن حساب احتمال وقوع الحدث A من خلال:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{K}{\Omega}$$

وكقاعدة عامة فإذا افترضنا أنه لكل حدث A في فضاء العينة Ω توجد قيمة $P(A)$ تعبر عن احتمال الحدث A إذا تحققت البديهيات التالية: (Soong, 2004)

البديهية 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

البديهية 2: $P(\Omega) = 1$

البديهية 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

البديهية الثالثة تكون صحيحة في حالة كون عدد غير منتهي من الحوادث المتتابعة **....** ... A_1, A_2 والمتنافية مثنى مثنى: $P(A_1 \cup A_2 \dots\dots\dots \cup P(A_n)) = P(A_1) + P(A_2) \dots\dots\dots . + P(A_n)$

مثال 3.2: عند رمي حجر نرد غير متحيز فإن عدد الحالات الممكنة هي $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وبما أن كل حدث من الحوادث الناتجة لها نفس فرصة الظهور يكون لدينا:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

وبالتالي يكون عدم احتمال ظهور الرقم 6 مثلا هو

$$P(\bar{6}) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(6) + P(\bar{6}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

3– قواعد حساب الاحتمالات

تنقسم العمليات على الاحتمالات إلى عمليات أو قواعد الجمع التي تكون في الحوادث المتنافية وغير المتنافية وعمليات الضرب التي تستخدم في الحوادث المستقلة وغير المستقلة والمتمثلة في: (ليبشتز، 2003)

كقاعدة عامة في نظرية الاحتمالات: الرمز $\cup$ يقرأ اتحاد ويكون في محل " أو" أي " $+$ ". والرمز $\cap$ يقرأ تقاطع ويكون في محل " و" أي " $\times$ ".

1.3. قاعدة جمع الحوادث المتنافية: نقول أن الحدثان A وB متنافيان إذا كان وقوع الحادث A يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح. وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 4.2: ما هو احتمال الحصول على الرقم 4 أو 6 عند رمي حجرة نرد؟، لدينا احتمال الحصول على أي حادث من النتائج الممكنة هو:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

وبالتالي:

$$P(4 \cup 6) = P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

2.3. قاعدة جمع الحوادث غير المتنافية: نقول أن الحدثان A وB غير متنافيين إذا كان وقوع الحادث A لا يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح. وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نقوم بطرح الاحتمال $P(A \cap B)$ لكي نتجنب حسابه مرتين، لأنه في الأصل ضمن الاحتمال $P(A)$ و$P(B)$.

مثال 5.2: ما هو احتمال الحصول على عدد فردي أو أولي عند رمي حجرة نرد؟ عدد الحالات الممكنة فضاء لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نفترض: أنه عند ظهور عدد فردي هو الحدث A. وعند ظهور عدد أولي هو الحدث B:

$$B = \{2, 3, 5\} \qquad A = \{1, 3, 5\}$$

ومنه يمكن القول أن الحدثين A و C هما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد فردي وأولي في نفس الوقت وبالتالي يكون: $A \cap B = \{3, 5\}$.

وعليه:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

3.3. قاعدة ضرب الحوادث المستقلة: نقول أن الحدثان A وB مستقلين إذا كان وقوع الحادث A لا يؤثر على وقوع الحادث B أو وقوع الحادث A غير مرتبط بوقوع الحادث B . وبالتالي يكون: (ليبشتز، 2003)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال 6.2: نتائج رمي قطعتي نقود متتاليتين هي حوادث مستقلة. لأن نتائج قطعة نقود الأولى لا يؤثر على نتائج الرمية الثانية. فإذا رمزنا لصورة قطعة النقود الأولى ب A وصورة قطعة النقود الثانية ب B فإن احتمال ظهور الصورة هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

وبنفس الطريق يمكن حساب احتمال رمي عدد n من قطع النقود.

4.3. قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة: نقول أن الحدثان A وB غير مستقلين إذا كان وقوع الحادث A يؤثر على وقوع الحادث B أو إذا كان وقوع أحدهما مرتبط بوقوع الآخر. وبالتالي يكون:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

ونقرأ: احتمال وقوع الحدثين A وB يساوي احتمال وقوع الحادث A مضروب في احتمال وقوع الحادثB علما أن الحادث A قد تحقق.

ويمكن استنتاج الاحتمال الشرطي الذي يرمز له $P(B/A)$ ويحسب كما يلي:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ويقرأ: احتمال وقوع الحادث B علما أن الحادث A قد تحقق. وإذا كان الحدثين A وB مستقلين فإن الاحتمال الشرطي يصبح يساوي: $P(B/A) = P(B)$.

مثال 7.2: إذا كانت لدينا تجربة تتمثل في رمي حجرة نرد. إذا كان العدد الظاهر زوجي أحسب احتمال أن يكون أولي. لدينا عدد الحالات الممكنة هو:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نفترض: أنه عند ظهور عدد زوجي هو الحدث A. وعند ظهور عدد أولي هو الحدث B:

$$B = \{\,2, 3, 5\} \qquad A = \{2, 4, 6\}$$

وبالتالي يكون: $A \cap B = \{2\,\}$.

وعليه:
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

5- قاعدة بايز Bayes

هذه النظرية تعتبر من أهم مبرهنات نظرية الاحتمالات حيث تهتم بكيفية حساب الاحتمال الشرطي للحوادث المتنافية التي تشكل مجموعة كلية ومرافقة للحدث المراد حسابه. فرضا أنه لدينا الحوادث المتنافية $A_1, A_2 \dots\dots A_n$ والتي مجموعها يشكل فضاء العينة Ω، وأن $P(A_i) > 0, \forall\, i$. فمن أجل أي حدث B حيث أن $P(B) > 0$، يكون لدينا: (شبيجل وآخرون، 2004)

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P(A/B_i)}$$

مثال 8.2: لدينا مصنع يتكون من 3 آلات T, M, F حيث تنتج كل آلة 60%، 30%، 10% على التوالي. وأن الإنتاج الفاسد لكل آلة هو 3%، 5%، 7% على الترتيب. فرضا أننا اخترنا قطعة بطريقة عشوائية، فوجدناها فاسدة. **أ-** ما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة F؟

ب- ما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة T؟

الحل:

نفترض أن A هو حدث اختيار القطعة الفاسدة.

أ- احتمال أن تكون من إنتاج الآلة F علما أنها فاسدة هو:

$$P(F/A) = \frac{P(F) \times P(A/F)}{P(F) \times P(A/F) + P(M) \times P(A/M) + P(T) \times P(A/T)}$$

$$= \frac{0.6\times0.03}{0.6\times0.03+0.3\times0.05+0.1\times0.07} = 0.45$$

ب– احتمال أن تكون من إنتاج الآلة T علما أنها فاسدة هو:

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}/A) = \frac{\mathrm{P}(T)\times P(A/\mathrm{T})}{\mathrm{P(T)\times P(A/}T)+P(M)\times P(A/M)+P(F)\times P(A/F)}$$

$$= \frac{0.1\times0.07}{0.1\times0.07+0.3\times0.05+0.6\times0.03} = 0.175$$

6– الاحتمال الكلي

يعرف الاحتمال الكلي بأنه لا يتحقق الحادث A إلا بتحقق أحد الحوادث المتنافية $\mathrm{B_1, B_2 \ldots \ldots . B_n}$ التي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية Ω وتحقق الشروط الثلاثة: (رجال، 1995)

$$\begin{cases} PB_i \geq 0 \\ B_i \cap B_j = \emptyset \\ B_1 \cup B_2 \ldots \ldots . B_n = \Omega \end{cases}$$

ويعبر عنه بالقانون التالي:

$$\mathrm{P(A)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(B_i)} \times \mathrm{P(A/B_i)}$$

مثال 9.2: إذا كان لديك نفس معطيات المثال 8.2. فرضا أننا سحبنا قطعة بطريقة عشوائية من الإنتاج الكلي لهذا المصنع.

1– ما هو احتمال أن تكون فاسدة؟

2– ما هو احتمال أن تكون غير فاسدة؟

الحل:

1– احتمال أن تكون فاسدة هو

نرمز لاحتمال أن تكون القطعة فاسدة بـ A ومنه يمكن حساب احتمال أن تكون فاسدة من خلال:

$$P(A) = P(F) \times P(A/F) + P(M) \times P(A/M) + P(T) \times P(A/T)$$

$$= 0.6 \times 0.03 + 0.3 \times 0.05 + 0.1 \times 0.07 = 0.04$$

2– احتمال أن تكون غير فاسدة هو

نرمز لاحتمال أن تكون القطعة فاسدة بـ $\bar{}$ ومنه يمكن حساب احتمال أن تكون فاسدة من خلال:

$$P(\bar{A}) = P(F) \times P(\bar{A}/F) + P(M) \times P(\bar{A}/M) + P(T) \times P(\bar{A}/T)$$

$$= 0.6 \times 0.97 + 0.3 \times 0.95 + 0.1 \times 0.93 = 0.96$$

تمارين محلولة

التمرين 1: إذا كانت لدينا تجربة تتمثل في رمي حجرة نرد مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 على الأرض، حيث أن احتمال ظهور رقم زوجي هو ضعف احتمال ظهور رقم فردي.

1– أحسب احتمال ظهور رقم زوجي ثم احتمال ظهور رقم فردي؟

2– احسب احتمال ظهور الرقم 2 ؟

الحل:

1– احتمال ظهور رقم زوجي ثم احتمال ظهور رقم فردي هو:

لدينا عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وبما أن احتمال ظهور رقم زوجي هو ضعف ظهور رقم فردي فإنه:

$$\mathrm{P}(2, 4, 6) = 2\mathrm{P}(1, 3, 5)$$

نرمز لاحتمال ظهور رقم فردي بـ A حيث $\mathrm{P}(1, 3, 5) = \mathrm{A}$

$$\mathrm{P}(2, 4, 6) = 2\mathrm{A}$$

وبما أن $\mathrm{P}\big((2, 4, 6) \cup \mathrm{P}(1, 3, 5)\big) = 1$ فإن:

$$\mathrm{A} + 2\mathrm{A} = 1 \rightarrow 3\mathrm{A} = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

وبالتالي:

$$\mathrm{P}(2, 4, 6) = \frac{2}{3} \text{ و } \qquad \mathrm{P}(1, 3, 5) = \frac{1}{3}$$

أي أن احتمال ظهور رقم فردي هو $\frac{1}{3}$ واحتمال ظهور رقم زوجي هو $\frac{2}{3}$.

2– احتمال ظهور الرقم 2 هو:

لدينا $\mathrm{P}(2, 4, 6) = \frac{2}{3}$ ومنه $P(2) \cup P(4) \cup P(6) = \frac{2}{3}$

وبالتالي $P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{3}$

لكن: $P(2) = P(4) = P(6) = \mathrm{H}$ ومنه $3\mathrm{H} = \frac{2}{3}$ إذن: $\mathrm{H} = \frac{2}{9}$

وبالتالي احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{2}{9}$.

التمرين 2: صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و4 سوداء لا نفرق بينهم باللمس. إذا قمنا بإجراء سحبات في كل سحبة نأخذ كرة بطريقة عشوائية. إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب وإذا كانت بيضاء لا نعيدها ونواصل سحب الكرة الموالية وهكذا:

1– ما هو احتمال أن تكون الكرة في السحبة الأولى سوداء؟

2– ما هو احتمال أن تكون الكرة في السحبة الثانية سوداء؟

3– استنتج الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة؟

الحل:

1– احتمال أن تكون الكرة سوداء في السحبة الأولى هو:

$$P(A) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

2– احتمال الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء هو

نرمز لحدث كون الكرة سوداء بـ B ولكي يتحقق الحدث يجب أن تكون الكرة بيضاء في السحبة الأولى ولا نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب في المرة الثانية كرة سوداء.

$$P(B) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{7}$$

3– الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو:

لكي لا نجري السحبة الثالثة يجب أن نتوقف إما في السحبة الأولى أو الثانية أي يجب أن تكون الكرة سوداء في السحبة الأولى أو الثانية. إذن احتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو:

$$P(A) + P(B) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

التمرين 3: ما هو احتمال حدوث التضخم أو الكساد، إذا كان احتمال التضخم هو 0.4 واحتمال الكساد هو 0.6 واحتمال التضخم والكساد معا 0.24؟

الحل:

نرمز لاحتمال حدوث تضخم بـ $P(I)$ واحتمال حدوث كساد بـ $P(R)$. وبما أن احتمال حدوث التضخم والكساد في نفس الوقت ليس 0 فإن الحدثين ليس متنافيين ومنه نطبق قاعدة الجمع فتحصل:

$$\begin{aligned} P(I \cup R) &= P(I) + P(R) - P(I \cap R) \\ &= 0.4 + 0.6 - 0.24 = 0.76 \end{aligned}$$

التمرين 4: إذا كانت لدينا تجربة تتمثل في رمي حجرة نرد. ما هو احتمال الحصول على:

1– أقل من 3؟

2– أكثر من 3؟

الحل:

1– احتمال الحصول على أقل من 3 هو:

الحصول على أقل من 3 عند رمي حجرة نرد يعني الحصول على 1 أو 2. وبما أن هذه الأحداث متنافية، فإننا نطبق قاعدة الجمع لهذه الأحداث فنحصل:

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

2– احتمال الحصول على أكثر من 3 هو:

الحصول على أكثر من 3 عند رمي حجرة نرد يعني الحصول على 4 أو 5 أو 6. وبما أن هذه الأحداث متنافية، فإننا نطبق قاعدة الجمع لهذه الأحداث فنحصل:

$$P(4 \cup 5 \cup 6) = P(4) + P(5) + P(6) \ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

التمرين 5: صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصورة ضعف احتمال ظهور الكتابة في الرمية الواحدة.

1– احسب احتمال ظهور الصورة H ؟

2– احسب احتمال ظهور الكتابة T ؟

الحل:

1– احتمال ظهور الصورة هو:

نفترض أن $P(T) = P$ ومنه $P(H) = 2P$ وبما أن مجموع الاحتمالات يجب أن يساوي 1 فإن:

$$P + 2P = 1$$

ومنه:

$$P = \frac{1}{3}$$

إذن:

$$P(T) = P = \frac{1}{3}$$

$$P(H) = 2P = 2\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

التمرين 6: يحوي كيس على 15 كرة مرقمة من 1 إلى 15. نسحب عشوائيا كرة واحدة و نسجل رقمها.

1– عين المجموعة الشاملة Ω .

2– عين الحادث A :" الحصول على رقم مضاعف للعدد 5 ."

3– عين الحادث B :" الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 ."

4– عين الحوادث $A\cap B$ و $\bar{A}$ و $\bar{B}$ ثم استنتج الحادثتين $\bar{A}\cap\bar{B}$ و $\overline{A\cap B}$

حيث $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\overline{A\cap B}$ هي الحوادث العكسية للحوادث A و B و $A\cap B$ على الترتيب

5– احسب الاحتمالات، A، B، $\bar{A}$، $\bar{B}$، $\bar{A}\cap\bar{B}$؟

الحل:

1- فضاء العينة Ω هو

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

2- الحدث A هو:

مضاعفات العدد 5 المحصورة بين 1 و 15 هي التي تشكل A أي $A = \{5,10,15\}$

3- الحدث B هو:

مضاعفات العدد 3 المحصورة بين 1 و 15 هي التي تشكل B أي $B = \{3,6,9,12,15\}$

4- تعيين الحوادث التالية:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{15\}$$
$$\bar{\mathrm{A}} = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14\}$$
$$\bar{\mathrm{B}} = \{1,2,5,4,7,8,10,11,13,14\}$$
$$\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}} = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$
$$\overline{\mathrm{A} \cap B} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$

5– حساب الاحتمالات، A، B، $\bar{A}$، $\bar{B}$:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{15} = 0.6$$

$$\mathrm{P(B)} = \frac{5}{15} = 0.33$$

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = \frac{12}{15} = 0.8$$

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}) = \frac{10}{15} = 0.66$$

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \frac{8}{15} = 0.53$$

التمرين 7: زهرة نرد مزيفة ذات أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4. نرمز بالرمز p_i لاحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i مع $i \in \{ 1,2,3,4 \}$. نعلم أن $P_2 = \frac{1}{5}$ و أن الحدود P_1, P_2, P_3, P_4 تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب.

1– احسب P_1, P_3, P_4؟

2– احسب احتمال ظهور رقم فردي؟

الحل:

1– حساب P_1, P_3, P_4:

إذا كان لدينا r أساس المتتالية الحسابية

$$P_2 = P_1 + r, P_3 = P_2 + r, \ P_4 = P_2 + 2r$$

لكن:
$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

ومنه:
$$P_2 - r + P_2 + P_2 + r + P_2 + 2r = 1$$

أي أن:
$$4P_2 + 2r = 1$$

وبالتالي:
$$r = \frac{1-4P_2}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}, P_3 = P_2 + r = \frac{3}{10}, P_4 = P_2 + 2r = \frac{4}{10}$$

2– احتمال ظهور عدد فردي هو:

لدينا:
$$P(A) = P_1 + P_3$$

إذن:
$$P(A) = \frac{2}{5}$$

التمرين 8: عند الإعلان عن نتائج السنة الجامعية وجد أنه في كل 100 طالب يوجد 20 طالب راسب. فإذا اخترنا طالبين بطريقة عشوائية من مجموعة ما.

1– ما هو احتمال أن يكون الطالب الأول راسب؟

2– ما هو احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الطالب الأول راسب؟

3– ما هو احتمال أن يكون كلاهما راسبين؟

الحل:

1– احتمال أن يكون الطالب الأول راسب هو:

نرمز للطالب الراسب بـ A وبالتالي الاحتمال يساوي

$$P(\mathrm{A})=\frac{20}{100}=0.2$$

2– احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الطالب الأول راسب هو:

نرمز للطالب الراسب الثاني بـ B. فإذا علمنا أن الطالب الأول راسب يبقى في المجموعة 99 طالب من بينهم 19 طالب من الراسبين. وبالتالي فإن احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الأول راسب هو

$$P(\mathrm{B}/A)=\frac{19}{99}=0.192$$

3– احتمال أن يكون كلاهما راسبين هو:

$$P(\mathrm{B}\cap A)=P(\mathrm{B}/A)P(\mathrm{A})=\frac{19}{99}\times\frac{20}{100}=0.0384$$

التمرين 9: في أحد مخابر التحاليل الطبية تم فحص مجموعة من الأفراد للكشف عن مرض معين. فإذا رمزنا بـ A إلى الشخص الذي تم فحصه مصاب بهذا المرض و بـ B إلى أن نتيجة الفحص ايجابية. فإذا كان لدينا:

$$P(\mathrm{B}/A)=0.99 \quad , \quad P(\mathrm{B}/\bar{A})=0.005$$

وأن 1 في المائة من الأشخاص يعانون من هذا المرض. اخترنا شخص بطريقة عشوائية. ما هو احتمال أن يكون هذا الشخص مصابا بالمرض علما أن نتيجة الفحص كانت ايجابية؟

الحل:

لدينا: $P(A)=0.001$ و $P(\bar{A})=0.999$

وبالتالي الاحتمال هو

$$P(\mathrm{A}/B)=\frac{P(\mathrm{B}/A)P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B}/A)P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B}/\bar{\mathrm{A}})P(\bar{\mathrm{A}})}=\frac{0.99\times 0.001}{0.99\times 0.001+0.005\times 0.999}=0.165$$

التمرين 10: إذا كان لديك الحوادث التالية:

$$P(\mathrm{A})=\frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{B})=\frac{1}{3} \qquad P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{5}$$

أ– أحسب كل من:

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}), \qquad P(\mathrm{B}/A),$$

ب– هل الحدثين A و B مستقلين أم لا؟

الحل:

أ– حساب كل من:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = 0.38$$

$$P(\mathrm{B}/A) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = 0.6$$

ب– تكون الحوادث مستقلة إذا تحقق ما يلي:

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$$

لدينا: $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = 0.08$

و $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.2$

وبما أن $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) \neq P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ فأن الحدثان غير مستقلان.

التمرين 11: تقوم شركة تأمين بتقسيم المؤمن عليهم إلى فئتين، المعرضين للمخاطر وغيرهم. تبين إحصاءات الشركة أن الشخص المعرض للحوادث سيتعرض لحادث في وقت ما خلال سنة معينة يكون احتماله 0.6، هذا الاحتمال يكون 0.3 بالنسبة للشخص الذي لا يتعرض لحادث. إذا افترضنا أن 40% من السكان معرضون للحوادث:

أ– فما هو احتمال تعرض مؤمن عليه جديد لحادث خلال سنة من شراء وثيقة تأمينه؟

ب– فرضا أن المؤمن عليه الجديد تعرض لحادث، ما هو احتمال أن يكون من فئة المعرضين للحوادث؟

الحل:

أ– احتمال تعرض مؤمن عليه جديد لحادث خلال سنة من شراء وثيقة تأمينه هو

نرمز بـ A لاحتمال حصول حادث لهذا الشخص الجديد. وB ، $\overline{\mathrm{B}}$ بالنسبة للشخص في فئة المعرضين للمخاطر والآخرين على التوالي.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{B}}) \\ &= 0.6 \times 0.4 + 0.3 \times 0.6 = 0.42 \end{aligned}$$

ب– احتمال أن يكون من فئة المعرضين للحوادث هو

$$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})}{P(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{B}})} = \frac{0.6 \times 0.4}{0.42} = 0.57$$

التمرين 12: في الإجابة عن سؤال في اختبار متعدد الخيارات، يكون الطالب في وضعيتين متأكد من الإجابة أو غير متأكد. نفترض P لاحتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة، و$1-P$ لاحتمال أن يكون الطالب غير متأكد من الإجابة. نفترض أيضا أن الطالب الذي يفكر في الإجابة سيكون صحيحا باحتمال قدره $\frac{1}{m}$ حيث أن m هو عدد الاختيارات المتاحة. ما هو احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال معين علما أنه أجاب عليه بشكل صحيح؟

الحل:

- احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال معين علما أنه أجاب عليه بشكل صحيح هو

نفترض أن A و B يعبران عن احتمال إجابة الطالب على السؤال بشكل صحيح وأنه متأكد من الإجابة على التوالي.

$$\mathrm{P(B/A)}=\frac{\mathrm{P(B)\times P(A/B)}}{\mathrm{P(B)\times P(A/B)+P(\bar{B})\times P(A/\bar{B})}}=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}+\frac{1}{m}(1-P)}=\frac{mP}{1+(m-1)\mathrm{P}}$$

على سبيل المثال، إذا كان $m=5$، $\mathrm{P}=\frac{1}{2}$ فإن احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال أجاب عليه بشكل صحيح هو 0.83.

التمرين 13: يستخدم فلاح لزرع القمح كمية من بذور القمح منتقاة من أربعة أنواع مستوردة من أربعة بلدان، مصر بكمية مستوردة 50%، تونس 20%، المغرب 20%، وليبيا 10%. إذا افترضنا أن احتمال أن تنمو البذرة المزروعة لكل نوع يساوي 0.6، 0.3، 0.5، 0.4 على التوالي.

أ- سحبنا بذرة بطريقة عشوائية ما هو احتمال أن لا تنمو؟

ب- إذا نمت البذرة المسحوبة ما هو احتمال أن تكون من كمية القمح المستورد من مصر؟

الحل:

أ- احتمال أن لا تنمو البذرة المسحوبة هو

نرمز لعدم نماء البذرة المسحوبة بـ F ونوع للقمح المستورد بـ L, M, T, E لكل بلد على التوالي.

$$\mathrm{P(F)}=\mathrm{P(E)}\times\mathrm{P}(\mathrm{F}/E)+P(T)\times P(F/T)+P(M)\times P(F/M)+P(L)\times P(F/L)=0.5\times0.6+0.2\times0.3+0.2\times0.5+0.1\times0.4=0.5$$

ب- إذا نمت هذه البذرة، احتمال أن تكون من كمية القمح المستورد من المغرب هو

نرمز لنماء البذرة المسحوبة بـ G

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}/G)=\frac{\mathrm{P(M)}\times P(G/\mathrm{M})}{\mathrm{P(M)\times P(G}/M)+P(E)\times P(G/E)+P(T)\times P(G/T)+P(L)\times P(F/L)}$$

$$=\frac{0.2\times0.5}{0.2\times0.5+0.5\times0.4+0.2\times0.7+0.1\times0.6}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

التمرين 14: اشترى طالب 3 كتب في الإحصاء و2 في الرياضيات و4 في العلوم. وبعد الرجوع إلى المنزل رتب هذه الكتب في رف.

أ– ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الكتب؟

ب– ما هو احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث يجب ترتيب الكتب من نفس النوع مع بعضها؟

ج– ما هو احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث يجب ترتيب كتب العلوم فقط مع بعضها؟

الحل:

أ– عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الكتب هو

$$Pn! = P9! = 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

ب– احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث تكون الكتب من نفس النوع مع بعضها هو

لدينا عدد الحالات الممكنة يساوي 362880

وعدد الحالات الملائمة يساوي $3! \times 2! \times 4! \times 3! = 1738$

$$P(A) = \frac{1738}{362880} = 4.789462081 \times 10^{-3}$$

ج– احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث تكون كتب العلوم فقط مع بعضها هو

نقوم بحساب عدد الحالات الملائمة $4! \times 5! \times 2! = 1738$

$$P(S) = \frac{5760}{362880} = 0.01$$

التمرين 15: تنتج آلة 16 قطعة، من الإنتاج الكلي يوجد 12 قطعة صالحة و4 غير صالحة. قمنا باختيار 3 قطع من الإنتاج الكلي، ما هو احتمال أن تكون هذه القطع صالحة؟

الحل:

الطريقة 1. احتمال أن تكون القطعة الأولى صالحة هو $\frac{12}{16}$ لأنه توجد 12 قطعة صالحة من بين 16 قطعة. إذا كانت القطعة الأولى صالحة فإن احتمال أن تكون القطعة الثانية صالحة هو $\frac{11}{15}$ وبالتالي يبقى لنا 10 قطع صالحة من بين 14 قطعة، حيث يكون احتمال أن تكون القطعة الثالثة صالحة هو $\frac{10}{14}$. وعليه يكون احتمال أن تكون القطع الثلاثة صالحة هو:

$$P(A) = \frac{12}{16} \times \frac{11}{15} \times \frac{10}{14} = 0.39$$

الطريقة 2. حيث أنه يوجد C_{16}^{3} طريقة لاختيار 3 قطع صالحة من بين 16 قطعة (عدد الحالات الممكنة). ويوجد C_{12}^{3} لاختيار 3 قطع صالحة من بين 12 قطعة صالحة (عدد الحالات الملائمة).

$$P(A) = \frac{C_{12}^{3}}{C_{16}^{3}} = \frac{220}{560} = 0.39$$

التمرين 16: في إحدى الأقسام وجد أن 7% طلاب و3% طالبات أجانب. وأن 80% من المجموع الكلي للطلبة طالبات.

أ- اختير طالب بطريقة عشوائية ما هو احتمال أن يكون أجنبي؟

ب- إذا كان أجنبي ما هو احتمال أن تكون طالبة؟

الحل:

أ- احتمال أن يكون الطالب المختار أجنبي هو

نرمز لاحتمال كون الطالب أجنبي بـ A

$$P(A) = P(B) \times P(A/B) + P(G) \times P(A/G) =$$
$$= 0.2 \times 0.07 + 0.8 \times 0.03 = 0.038$$

$$P(G/A) = \frac{P(G) \times P(A/G)}{P(G) \times P(A/G) + P(B) \times P(A/B)} =$$
$$= \frac{0.8 \times 0.03}{0.8 \times 0.03 + 0.2 \times 0.07} = \frac{0.024}{0.038} = 0.63$$

التمرين 17: صندوق يحتوي على 10 كرة مرقمة من 1 إلى 10. نقوم بسحب كرتين بطريقة عشوائية في آن واحد.

أ- ما هو احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما يساوي 10؟

ب- ما هو احتمال سحب كرتين الفرق بين رقميهما يساوي 4؟

ج- ما هو احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما يساوي 10 علما أن الفرق بين رقميهما يساوي 4؟

الحل:

أ- احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما يساوي 10 هو

عدد الحالات الممكنة لحسب كرتين من بين 20 كرة هو

$$C_{20}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2! \times 8!} = 45$$

عدد الحالات الملائمة هو

نرمز للكرتين اللتين مجموع رقميهما يساوي 10 بـ A وبالتالي:

$$A = (1,9),(2,8),(3,7),(4,6)$$

ومنه

$$P(A) = \frac{4}{45} = 0.08$$

ب– احتمال سحب كرتين الفرق بين رقميهما يساوي 4 هو

نرمز للكرتين اللتين الفرق بين رقميهما يساوي 4 بـ B وبالتالي:

$$B = (1,5),(2,6),(3,7),(4,8),(2,6),(5,9),(6,10)$$

ومنه

$$P(B) = \frac{7}{45} = 0.08$$

ج– احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما يساوي 10 علما أن الفرق بين رقميهما يساوي 4 هو

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{45} \text{ ومنه } (A\cap B) = (3,7)$$

$$P(A/B) = \frac{0.02}{0.08} = 0.25$$

التمرين 18: ذهب رجل وزوجته إلى نوادي ألعاب الحظ، إذا كان احتمال أن يفوز الرجل هو $\frac{1}{4}$، واحتمال أن تفوز زوجته هو $\frac{1}{3}$. ما هو احتمال:

1– أن يفوزا الزوج وزوجته؟

2– أن يفوز أحدهما على الأقل؟

3– أن لا يفوز الاثنان؟

4– أن تفوز الزوجة؟

الحل:

1– احتمال أن يفوزا الزوج وزوجته هو

نرمز لفوز الرجل وزوجته بـ A و B على التوالي. وبما أن A وB مستقلين فإنه

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = 0.08$$

2– احتمال أن يفوز أحدهما على الأقل هو

في هذه الحالة يمكن أن يفوز الزوج أو الزوجة أو الاثنين معا وبالتالي:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = P(A) + P(B) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 0.5$$

3– احتمال أن لا يفوز الاثنان هو

في هذه الحالة نبحث عن $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})$ حيث أن

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{3}{4}$$
$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{2}{3}$$

وبما أن $\overline{\mathrm{B}}$ و$\overline{\mathrm{A}}$ مستقلان أيضا فإن

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 0.5$$

يمكن الحصول على نفس النتيجة بطريقة ثانية:

$$(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}, \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

4– احتمال أن تفوز الزوجة فقط هو

في هذه الحالة نبحث عن $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$ حيث أن $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{3}{4}$ وبما أن الحدثين مستقلين فإنه

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = 0.25$$

التمرين 19: يصيب أحد الرماة الهدف باحتمال قدره 0.6. ما هو عدد الرميات التي يجب يطلقها هذا الرامي حتى يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 80%.

الحل:

احتمال أن يخطأ الرامي الهدف هو 0.4. وبالتالي احتمال أن يخطأ الرامي الهدف n مرة هو$(0.4)^n$

وعليه نبحث عن أصغر عدد صحيح n الذي يحقق:

$$(0.4)^n < 0.2 \quad \text{أو} \quad 1 - (0.4)^n > 0.8$$
$$(0.4)^1 = 0.4, (0.4)^2 = 0.16$$

وبالتالي يجب على الرامي إطلاق طلقتين على الأقل.

الفصل الثالث:

المتغيرات العشوائية

1__ المتغيرات العشوائية المنفصلة

2__ المتغيرات العشوائية المتصلة

1- المتغير العشوائي

في الكثير من الأحيان عند القيام بتجربة ما أو القيام بدراسة ما نتعامل مع قيم فعلية مثل أسعار المستهلكين، تكاليف الاستثمار، أسعار الفائدة وما إلى ذلك. لكن في أحيان أخرى نكون أمام قيم غير عددية ولكن تكون هذه القيم مرتبطة بقيم عددية ذات الأهمية. مثلا، إذا كانت التجربة هي اختيار مجموعة من الطلبة من قسم معين، فيمكن اختيار هؤلاء الطلبة على أساس علاماتهم أو طولهم..... الخ. وعند التعامل مع هذه القيم العددية فمن المفيد تخصيص احتمالات لها. وهذه العلاقة تسمى بالمتغير العشوائي الذي يعرف على أنه مجموعة من القيم العددية لتجربة عشوائية، يكون تحقق هذه القيم مرتبط باحتمالات معينة. وينقسم إلى نوعين: المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل.

2. المتغير العشوائي المنفصل

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عددا من القيم الممكنة في مجال مغلق. فمثلا نقول أن المتغير العشوائي X يأخذ 3 قيم ممكنة داخل المجال المغلق $[1, 3]$. (سالفاتور، 2011)

مثال 1.3: تتمثل تجربة في رمي 3 قطع نقدية على الأرض. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الصور الظاهرة فإنه يأخذ القيم التالية $3, 2, 1, 0$ حيث أن كل قيمة ترتبط باحتمال معين. لدينا عدد الحالات الممكنة: $\Omega = \{(HHH)(HHT)(HTT)(HTH)(THH)(THT)(TTH)(TTT)\}$

$$P(X = 0) = P\{(TTT)\} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P\{(HTT)(THT)(TTH)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P\{(HHT)(HTH)(THH)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P\{(HHH)\} = \frac{1}{8}$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

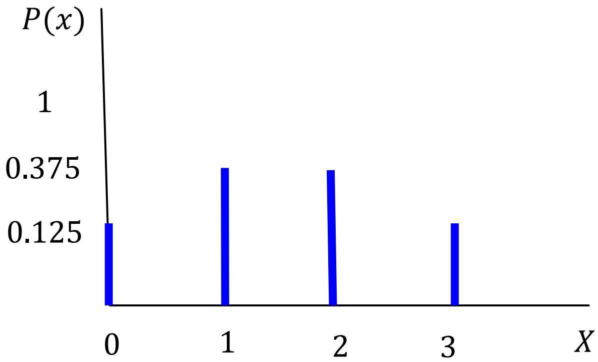
x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	0.125	0.375	0.375	0.125	1

حيث أنه يجب أن يكون:

$$f(x_i) \geq 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

ويسمى هذا أيضا بقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعرف بالعلاقة التي تربط القيم الممكنة للمتغير العشوائي مع احتمالاتها. حيث يجب أن يكون مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح و $f(x_i) \geq 0$.

ويمكن التعبير عن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل للمثال أعلاه في الشكل التالي:



1.2. تابع التوزيع

يعرف تابع التوزيع F للمتغير العشوائي X بأنه الدالة $F: R \to R$ حيث (Dekking et al. 2005)

$$F(a) = P(X \leq a)$$

أي أنه ذلك التابع الذي يشير إلى احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي قيمة a. فإذا كان X متغير عشوائي متقطع وكان توزيعه الاحتمالي f فإن F هو تابع التوزيع المعرف كما يلي:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

ويعرف أيضا على أنه ذلك التابع الذي يمكننا من خلاله حساب احتمال المتغير العشوائي X عند أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة x.

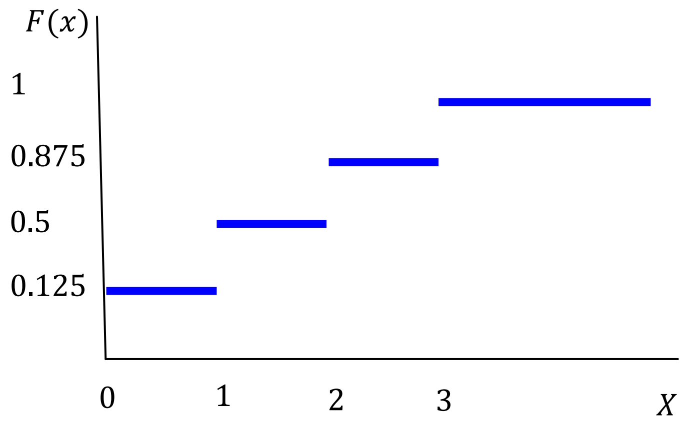
مثال 2.3: يمكن حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي X في المثال 1.3 من خلال:

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	0.125	0.375	0.375	0.125	1
$F(x)$	0.125	0.5	0.875	1	/

ويمكن التعبير عنه أيضا في:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 0.125 & 0 \leq X < 1 \\ 0.5 & 1 \leq X < 2 \\ 0.875 & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي:



فمثلا إذا أردنا حساب احتمال $X \leq 2$ أو احتمال $X < 1.5$ فإنه يمكن استنتاجه مباشرة من الجدول أعلاه في السطر الأخير:

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$
$$= 0.125 + 0.375 + 0.375 = 0.875$$
$$P(X < 1) = P(X=0) + P(X=1) =$$
$$= 0.125 + 0.375 = 0.5$$

2.2: التوقع الرياضي

أحد أهم المفاهيم في نظرية الاحتمالات هو توقع المتغير العشوائي. فإذا كان X متغير عشوائي منفصل له دالة توزيع احتمالي $p_{(x)}$ فإن القيمة المتوقعة لـ X المشار إليها بـ $E(X)$ يمكن أن نعرفها من خلال:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

وبالتالي التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X في المثال 1.3 يساوي:

$$E(X) = (0.125 \times 0) + (0.375 \times 1) + (0.375 \times 2) + (0.125 \times 3) =$$
$$= 0 + 0.375 + 0.75 + 0.375 = 1.5$$

3.2: التباين

على الرغم من أن التوقع الرياضي$E(X)$ للمتغير العشوائي X يمكن أن يعطينا المتوسط المرجح لقيم X، إلى أنه لا يخبرنا عن اختلاف أو انتشار هذه القيم التي يمكن حسابها بواسطة التباين ويمكن التعبير عنه في:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

ويمكن حساب التباين للمتغير العشوائي X في المثال 1.3 في:

$$V(X) = (0^2 \times 0.125) + (1^2 \times 0.375) + (2^2 \times 0.375) + (3^2 \times 0.125) - (1.5)^2$$
$$= 0 + 0.375 + 1.5 + 1.125 - 2.25 = 0.75$$

4.2: الانحراف المعياري

الانحراف المعياري هو عبارة عن جدر التباين ويعرف رياضيا بواسطة:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

وبالتالي يمكن حساب الانحراف المعياري في المثال 1.3 في:

$$\delta(X) = \sqrt{0.75} = 0.86$$

3. المتغير العشوائي المتصل

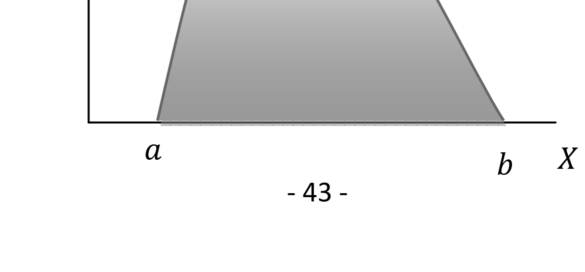
المتغير العشوائي المتصل X هو المتغير الذي يأخذ عدد لا نهائي من القيم داخل مجاله. وتوجد الكثير من الأمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة، مثلا وزن مجموعة من الطلبة، دخل الأسر في ولاية معينة، الوقت الذي تصل فيه طائرة معينة إلى المطار .....الخ. فإذا كان X متغير عشوائي؛ يمكننا القول أن X هو متغير عشوائي مستمر إذا كانت هناك دالة غير سالبة f معرفة لكل عدد حقيقي $x \in (-\infty, \infty+)$ لأي مجموعة A من الأعداد الحقيقية، (Sheldon, 2010) ويعرف رياضيا بواسطة المعادلة التالية:

$$f(X) = P(X \in A) = \int_A \mathrm{f}(x)dx$$

حيث تتميز الدالة $f(X)$ بالخاصيتين التاليتين:

$$f(X) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx = 1$$

تسمى الدالة f دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X وتأخذ التمثيل البياني التالي:



حيث تعبر المساحة المظللة عن مجموع الاحتمالات الكلية وتساوي الواحد الصحيح. وحساب هذه المساحة حيث يكون n عدد كبير جدا يكون من خلال تابع رياضي للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} f(x) & a \leq X \leq b \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

من خلال هذا القانون يمكننا حساب احتمالات المتغير العشوائي X لأي مجال جزئي محصور بين النقطتين a و b.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \mathrm{f}(x)dx$$

فإذا كانت $b = a$ يمكن حساب الاحتمال $P(X = a)$ من خلال:

$$P(X = a) = \int_a^a \mathrm{f}(x)dx = 0$$

ويمكن حساب الاحتمال $P(X < a)$ أيضا من خلال:

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a \mathrm{f}(x)dx$$

مثال 3.3: أحسب الثابت K إذا كانت الدالة $\mathrm{f}(x)$ دالة كثافة احتمالية؟ مثل دالة الكثافة الاحتمالية بيانيا؟ احسب الاحتمال $P(1 < X < 2)$؟

$$f(X) = \begin{cases} Kx^2 & 0 < X < 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

الحل:

1- حساب قيمة الثابت K:

بما أن $K \geq 0$ فإن الخاصية الأولى دوما محققة. وبالتالي يجب أن تحقق $f(X)$ الخاصية الثانية حتى تكون دالة كثافة احتمالية، وبالتالي:

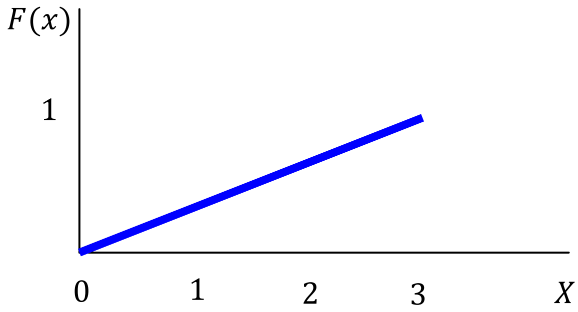
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx = 1 = \int_0^3 Kx^2dx = 1 = \left[\frac{Kx^3}{3}\right]_0^3 = 1 = 9K = 1$$

$$K = \frac{1}{9}$$

وبالتالي يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < X < 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2- التمثيل البياني



3- حساب الاحتمال $P(1 < X < 2)$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27} = 0.25$$

1.3: تابع التوزيع

إذا كان X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية $f(X)$ فيمكننا حساب تابع التوزيع لهذا المتغير العشوائي $F(X)$ من خلال:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx$$

مثال 4.3: يمكننا حساب تابع التوزيع $F(X)$ للمتغير العشوائي X في المثال أعلاه من خلال:

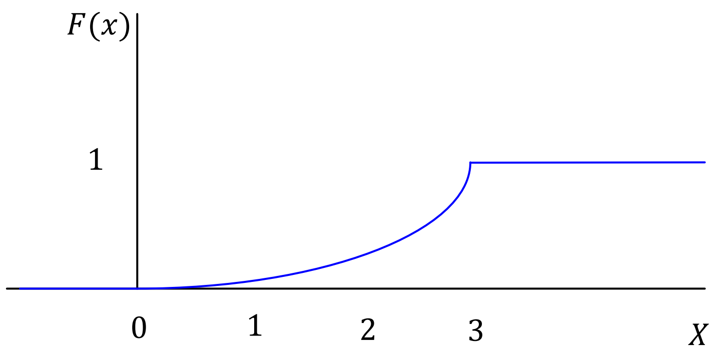
$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{9} x^2 & 0 < X < 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = \int_0^x \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{x^3}{27}$$

حيث أن: $X \leq 3$ وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{x^3}{27} & 0 \leq X \leq 3 \\ 1 & X > 3 \end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



2.3: التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية $f(X)$. فإننا يمكن حساب توقعه الرياضي من خلال القانون التالي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{f}(x)dx$$

مثال 5.3: إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي؟

الحل:

لدينا: $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{f}(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{x^2}{2} = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E(X) = 1.33$$

3.3: التباين والانحراف المعياري

إذا كان X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية $f(X)$. فإننا يمكن حساب تباينه من خلال القانون التالي:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{f}(x)dx - [E(X)]^2$$

أما الانحراف المعياري فهو جدر التباين: $$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال 6.3: احسب التباين والانحراف المعياري في المثال 5.3؟

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{f}(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx - \left[\frac{4}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = 2 - 1.77 = 0.23$$

ويمكن حساب الانحراف المعياري من خلال:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.23} = 0.47$$

تمارين محلولة

التمرين 1: نرمي حجرة نرد. فإذا افترضنا أن المتغير العشوائي X هو ضعف الرقم الذي يظهر على الوجه.

أ– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله البياني؟

ب– حدد تابع توزيع المتغير العشوائي X وتمثيله البياني؟

ج– احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ– تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي :

لدينا عدد الحالات الممكنة هو $\Omega_x = \{1,2,3,4,5,6\}$

وبما أن احتمال ظهور أي وجه هو $\frac{1}{6}$ فإنه يمكن إيجاد احتمالات المتغير العشوائي X في:

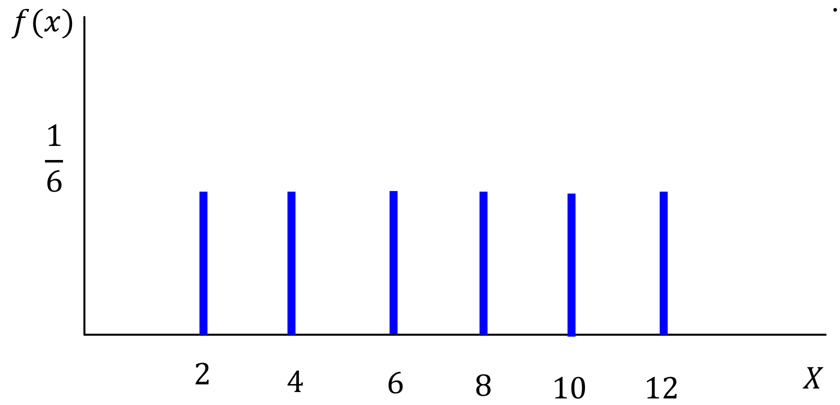
x_i	2	4	6	8	18	12	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن الخاصيتين محققتين:

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

التمثيل البياني:

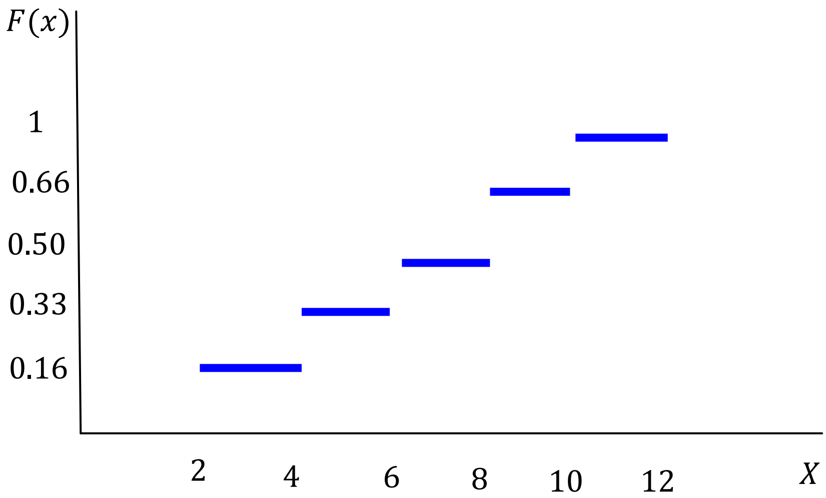


ب– تحديد تابع توزيع المتغير العشوائي X:

x_i	2	4	6	8	18	12	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$F(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 2 \\ \frac{1}{6} & 2 \le X < 4 \\ \frac{2}{6} & 4 \le X < 6 \\ \frac{3}{6} & 6 \le X < 8 \\ \frac{4}{6} & 8 \le X < 10 \\ \frac{5}{6} & 10 \le X < 12 \\ 1 & X \ge 12 \end{cases}$$

التمثيل البياني:



ج- حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$= 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{6} = 7$$

- التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 4 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} + 36 \times \frac{1}{6} + 64 \times \frac{1}{6} + 100 \times \frac{1}{6} + 144 \times \frac{1}{6} = 60.7 - 7^2$$
$$V(X) = 11.7$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11.7} = 3.4$$

التمرين 2: صنعت قطعة نقود حيث $P(H) = \frac{3}{4}$ و $P(T) = \frac{1}{4}$، قمنا برمي هذه القطعة 3 مرات على الأرض. فإذا افترضنا أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور المتتالية في أطول متتابعة.

أ– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ب– حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ج– احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ– تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

لدينا عدد الحالات الممكنة هو

$$\Omega = \{(HHH)(HHT)(HTT)(HTH)(THH)(THT)(TTH)(TTT)\}$$

$$P(HHH) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \qquad P(THH) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(HHT) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64} \qquad P(THT) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

$$P(HTH) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64} \qquad P(TTH) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

$$P(HTT) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64} \qquad P(TTT) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{64}$$

حيث أن المتغير العشوائي يمثل عدد الصور في أطول متتابعة فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية $3, 2, 1, 0$

$$P(X = 0) = P\{(TTT)\} = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = P\{(HTT)(HTH)(THT)(TTH)\} = \frac{18}{64}$$

$$P(X = 2) = P\{(HHT)(THH)\} = \frac{18}{64}$$

$$P(X = 3) = P\{(HHH)\} = \frac{27}{64}$$

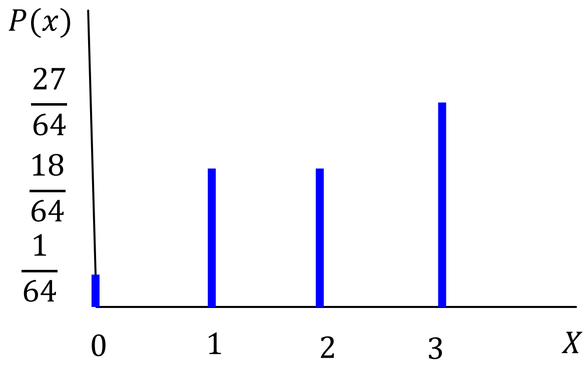
وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن شرطي قانون التوزيع الاحتمالي محققين:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1 \text{ و } f(x_i) \geq 0$$

ويمكن تمثيل بيانيا قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الشكل التالي:

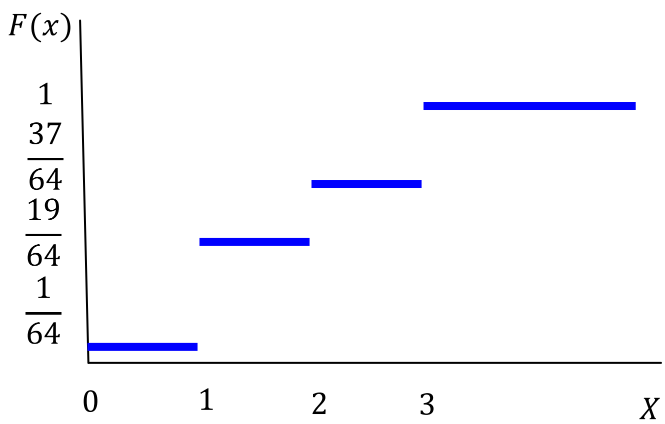


ب– تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$	1
$F(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{37}{64}$	1	

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{64} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{19}{64} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{37}{64} & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي:



ج– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 2 \times \frac{18}{64} + 3 \times \frac{27}{64} = 2.1$$

– التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 4 \times \frac{18}{64} + 9 \times \frac{27}{64} = 5.2 - 2.1^2$$
$$V(X) = 0.8$$

– الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{\ V(X)} = \sqrt{0.8} = 0.9$$

التمرين 3: يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و4 حمراء قمنا بسحب 3 كرات بطريقة عشوائية. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي؟

2– أوجد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

3– أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{3!\times7!} = \frac{720}{6} = 120$$

بما أن المتغير العشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$$\Omega_s = \{0,1,2,3\}$$

ويمكن حساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة في:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$$

وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن شرطي قانون التوزيع الاحتمالي محققين:

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

2– تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{20}{120} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{80}{120} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{116}{120} & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

3– حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$= 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120} = 1.2$$

- التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 0 \times \frac{1}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 4 \times \frac{36}{120} + 9 \times \frac{4}{120} = 2 - 1.2^2$$

$$V(X) = 0.56$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.56} = 0.74$$

التمرين 4. إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} 2x & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- تأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟ ومثله بيانيا؟

2- احسب الاحتمال $P(0 < X < \frac{1}{2})$

3- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟ ومثله بيانيا؟

4- احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1- التأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون $f(X)$ تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين أساسيين:

$$f(X) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة X ضمن مجال تعريفه.

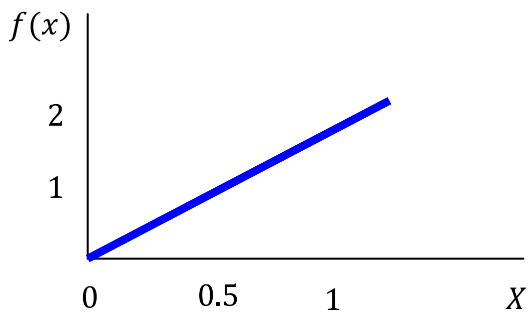
الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = 0 - 1 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه نستنتج أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

التمثيل البياني:



2- حساب الاحتمال $P(0 < X < \frac{1}{2})$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{0.5} 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.25$$

3– تحديد تابع التوزيع للمتغير العشوائي

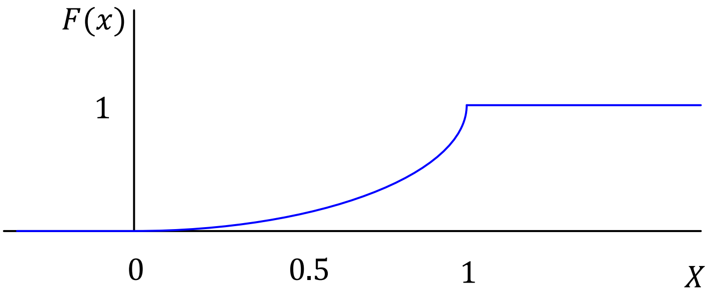
$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} 2xdx = \frac{2x^2}{2}$$

حيث أن: $X \leq 1$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{2x^2}{2} & 0 \leq X \leq 1 \\ 1 & X > 1 \end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



3– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{1} x(2x)dx = 2x^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = 0.66$$

– التباين

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_{0}^{1} x^2(2x)dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = \int_{0}^{1} 2x^3dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 0.5 - 0.44 = 0.06$$

– الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.06} = 0.24$$

التمرين 5: نفترض أن X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} K(4x - 2x^2) & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1– أحسب قيمة الثابت K حتى يكون التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟

2– احسب الاحتمال $P(X > 1)$

3– حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

الحل:

1– حساب قيمة الثابت K:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فيجب أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^2 K(4x - 2x^2)dx = 1$$

$$= K\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1$$

$$= K\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = K\,\frac{8}{3} = 1$$

$$K = \frac{3}{8}$$

2– حساب الاحتمال $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx$$

$$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

3– حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3})$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3}) & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

التمرين 6: نفترض أن X متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى:

$$f(X) = \begin{cases} cx^4 & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أحسب قيمة الثابت C ؟

2- احسب الاحتمال $P(X < 1.5)$

3- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

4- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1- حساب قيمة الثابت c:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^2 cx^4dx = 1$$
$$= c\int_0^2 x^4dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = c\,\frac{32}{5} = 1$$
$$c = \frac{5}{32}$$

- حساب الاحتمال $P(X < 1.5)$

$$P(X < 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{5}{32}x^4dx$$
$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1.5} = 0.23$$

3- حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{5}{35}(x^4)dx = \frac{5}{32}(\frac{x^5}{5})$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{5}{32}x^5 & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

4– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{f}(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx = \int_0^2\left(\frac{5}{32}x^5\right)dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{3}$$

$$E(X) = 1.66$$

التباين:

$$V(X) = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{f}(x)dx - [E(X)]^2$$

$$\int_0^2 x^2\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{5}{32}x^6 dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2$$

$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 2.85 - 2.77 = 0.07$$

$$V(X) = 0.07$$

– الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{\ V(X)} = \sqrt{0.07} = 0.28$$

التمرين 7: إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1– أثبت أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية ؟

2– احسب الاحتمال $P(X \le \frac{1}{3})$؟

الحل:

1– إثبات أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون $f(X)$ تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين:

$$f(X) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة X ضمن مجال تعريفه.

الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^1 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$
$$= \int_0^1 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$
$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^1 = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^1$$
$$= (10\times1 - 15\times1 + 6\times1) - (10\times0 - 15\times0 + 6\times0)$$
$$= 10 + 6 - 15 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

2- حساب الاحتمال $P(X \leq \frac{1}{3})$:

$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$
$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{3}} = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$= [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$= (10(\tfrac{1}{3})^3 - 15(\tfrac{1}{3})^4 + 6(\tfrac{1}{3})^5) - (10\times0 - 15\times0 + 6\times0)$$
$$= 10\frac{1}{27} - 15\frac{1}{81} + 6\frac{1}{243}$$
$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = 0.2098$$

التمرين 6: إذا كان X متغير عشوائي مستمر له معرف بتابع الكثافة الاحتمالية التالي:

$$f(X) = \begin{cases} Kx^3 & 0 < X \leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أحسب قيمة الثابت C ؟

2- احسب الاحتمال $P(X \leq \frac{2}{3} / X > \frac{1}{3})$

3- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– حساب قيمة الثابت K:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^1 Kx^3dx = 1$$
$$= c\int_0^1 x^3dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = c\frac{1}{4} = 1$$
$$c = 4$$

– حساب الاحتمال $P(X \leq \frac{2}{3}/X > \frac{1}{3})$

$$P(X \leq \frac{2}{3}/X > \frac{1}{3}) = \frac{P(X\leq\frac{2}{3}/X>\frac{1}{3})}{P(X>\frac{1}{3})}$$
$$= \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x^3dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{1} 4x^3dx} = \frac{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}}{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}} = 0.1875$$

3– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$E(X) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \int_0^1 4x^4dx = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$
$$E(X) = 0.8$$

التباين:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx - [E(X)]^2$$
$$V(X) = \int_0^1 x^2(4x^3)dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = \int_0^1 4x^5dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2$$
$$= \left[\frac{4x^6}{6}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = 0.66 - 0.64 = 0.02$$
$$V(X) = 0.02$$

– الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.02} = 0.14$$

الفصل الرابع:

التوزيعات الاحتمالية

1__ التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

2__ التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1– التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

عرّفنا المتغير العشوائي على أنه مجموعة من النتائج الممكنة، تكون هذه النتائج مرتبطة باحتمالات معينة، هذه العلاقة تسمى بالتوزيع الاحتمالي. من أهم التوزيعات التي سيتم التطرق لها هي توزيع ذي الحدين، والتوزيع البواسوني على اعتبارهما من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما.

1.1. توزيع ذي الحدين: يستخدم هذا التوزيع لإيجاد الاحتمالات في الحالات التي يكون للتجربة العشوائية نتيجتان فقط النجاح أو الفشل.(سالفاتور، 2011) ومن الأمثلة عن توزيع ذي الحدين نذكر:

- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)
- نتيجة سباق الجري (الفوز، الخسارة)

ويمكن تطبيق توزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط التالية:

أ– يجب أن تكون النتيجتان متنافيتان لكل محاولة.

ب– المحاولات تكون مستقلة عن بعضها البعض.

ج– احتمال وقوع حادث معين في كل محاولة ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى.

فإذا افترضنا أن نتيجتي التجربة هما النجاح والفشل باحتمالين ثابتين p و$q = 1 - p$ على التوالي. وأن X متغير عشوائي يعبر عن حالات النجاح في n محاولة. فإنه يمكننا حساب الاحتمال $P(X = x) = f(x)$ بواسطة القانون التالي:

$$P(x) = c_n^X p^x (1 - p)^{n-x}$$

ويكون التوقع الرياضي والتباين لتوزيع ذي الحدين كما يلي:

$$E(x) = np$$
$$V(x) = np(1 - p)$$

فإذا كان $p = 1 - p = 0.5$ فإن توزيع ذي الحدين يكون متماثلا، وإذا كان $p < 0.5$ يكون التوزيع ملتويا نحو اليمين، أما إذا كان $p > 0.5$ يكون التوزيع ملتويا نحو اليسار.

مثال 1.4. إذا كانت نسبة نجاح الطلبة الذين يحضرون المحاضرة في مقياس الإحصاء هي 0.6، وإذا كان عدد الطلبة الذين يحضرون المحاضرة بانتظام هو 10 طلبة. فإذا افترضنا المتغير العشوائي X يمثل عدد الطلبة الناجحين الذين يحضرون المحاضرة.

1 – حدد شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

2– احسب الاحتمالات التالية:

أ– ما هو احتمال نجاح **3** طلبة الذين يحضرون المحاضرة ؟

ب– ما هو احتمال نجاح طالب واحد على الأقل؟

ج– ما هو احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة ؟

3– احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين.

4– حدد شكل التوزيع.

الحـل:

1 – شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير:

$n = 10 \quad q = p - 1 = 0.4 \quad P = 0.6$ وبالتالي:

$$f(x) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$
$$f(x) = c_{10}^X 0.6^x (0.4)^{10-x}$$
$$x = 0,1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.10$$

2- حساب الاحتمالات:

أ– حساب احتمال نجاح **3** طلبة الذين يحضرون المحاضرة:

$$P(x = 3) = f(3)$$
$$f(3) = c_{10}^3 0.6^3 (0.4)^{10-3}$$
$$= 120 \times 0.216 \times 1.6384 \times 10^{-3} = 0.04$$

ب– حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل:

$$P(x \geq 1) = 1 - f(0)$$
$$= 1 - c_{10}^0 0.6^0 (0.4)^{10-0}$$
$$= 1 - 1 \times 1 \times 1.048576 \times 10^{-4} = 0.99$$

ج– حساب احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة:

$$P(x \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0)$$
$$= c_{10}^2 0.6^2 (0.4)^{10-2} + c_{10}^1 0.6^1 (0.4)^{10-1} + c_{10}^0 0.6^0 (0.4)^{10-0}$$
$$= 0.01$$

3- حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = np = 10 \times 0.6 = 6$$

- التباين

$$V(x) = np(1-p) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2.4} = 1.54$$

4- تحديد شكل التوزيع:

بما أن $p = 0.6 > 0.5$ فإن توزيع عدد نجاح الطلبة سالب الالتواء.

2.1. التوزيع البواسوني: يستخدم هذا التوزيع لتحديد احتمال عدد معين من الأحداث (النجاحات) في وحدة من الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث مستقلة عن بعضها البعض ويبقى متوسطها ثابتا لوحدة من الزمن. مثل عدد حوادث السيارات خلال السنة، عدد المكالمات خلال شهر.......الخ. (ليبشتز، 2001)

$$P(X) = \frac{\lambda^{-X} e^{\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots . n$$

حيث أن:

X: العدد المعين من النجاحات.

$P(X)$: احتمال عدد x من النجاحات.

λ: متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن.

e: أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي أو 2.71828.

مثال 2.4. إذا كان عدد حوادث السيارات في مدينة معينة يتبع التوزيع البواسوني بمتوسط 5 حوادث خلال الأسبوع. إذا افترضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السيارات خلال أسبوع.

1- حدد شكل دالة الاحتمال $f(X)$ لهذا المتغير.

2- أحسب الاحتمالات التالية:

أ- ما هو احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع؟

ب- ما هو احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال أسبوع؟

ج- ما هو احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع؟

3- احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لعدد الحوادث.

4- حدد شكل التوزيع.

الحل:

1- شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد حوادث السيارات خلال أسبوع هو $X = 5$ وبالتالي تكون دالة الاحتمال:

$$f(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots . n$$

$$f(X) = \frac{5^X e^{-5}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots .5$$

2- حساب الاحتمالات:

أ- احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع هو

$$f(2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = \frac{0.16}{2\times 1} = 0.08$$

ب- احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال أسبوع هو

$$f(X \geq 1) = 1 - f(X)$$

$$= 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = 0.99$$

ج- احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع هو

$$f(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \frac{5^3 e^{-5}}{3!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = 0.25$$

3- حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \lambda = 5$$

- التباين

$$V(x) = \lambda = 5$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{5} = 2.23$$

4- تحديد شكل التوزيع:

التوزيع البواسوني دائما موجب الالتواء.

2- التوزيعات الاحتمالية المتصلة

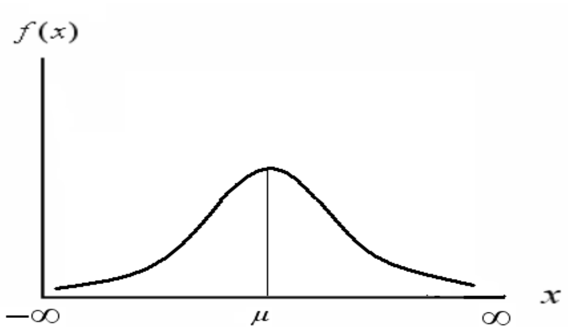
يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي تستخدم على نطاق واسع في التحليل الإحصائي. وهو جرسي الشكل متماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى ما لانهاية على الجانبين، ولكن أغلب المساحة (الاحتمال) ترتكز حول الوسط الحسابي. كما أن معظم التوزيعات الاحتمالية الأخرى يمكن تقريبها إلى التوزيع الطبيعي. (سالفاتور، 2011) ويعرّف بالقانون التالي:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})}$$

حيث أن: $-\infty < x < \infty$، $\pi = \frac{22}{7}$

μ: يمثل الوسط الحسابي.

والتمثيل البياني للتوزيع الطبيعي يكون على شكل جرس كما يلي:



ونظرا لصعوبة حساب التكامل لإيجاد الاحتمال عندما يكون المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي، لجأ علماء الإحصاء إلى تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي القياسي وهو توزيع طبيعي وسطه الحسابي يساوى 0 وانحرافه المعياري يساوي 1. ويمكن تحويل أي توزيع طبيعي بوحدات X إلى توزيع طبيعي قياسي z. فمثلا لحساب الاحتمالات في حالات تحتوي على التوزيع الطبيعي، نقوم بتحويل أولا قيم X إلى قيم z المناظرة لها، كالآتي:

$$z = \frac{X-\mu}{\delta}$$

قيمة z يمكن إيجادها باستخدام الجداول الإحصائية. التي تعطي قيمة الجزء من المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى بين قيمة الوسط الحسابي وقيمة z. وكثافة احتماله تأخذ الشكل التالي:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

ملاحظة: يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع ذي الحدين عندما يكون:

$$n \geq 30, \qquad np > 5, \qquad n(1-p) > 5$$

كما يمكن استخدام أيضا التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع البواسوني عندما يكون:

$$\lambda \geq 10$$

مثال 3.4. إذا كانت علامات الطلبة في قسم معين تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي 10 وتباين يساوي 4.

1– حدد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة؟

2– حدد شكل دالة كثافة الاحتمال؟

3– احسب احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و12؟

4– ما هو احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي 6؟

الحل:

1– تحديد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة:

بما أن علامات الطلبة هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي فإن معالمه تكون كالأتي:

الوسط الحسابي μ = 10، التباين σ^2 = 4. وبالتالي: $N(\mu,\sigma) = (10,2)$

2– تحديد شكل دالة كثافة الاحتمال:

$$f(X) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-10)^2}{4}\right)}$$

3– احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و12 هو

نقوم بحساب أولا قيمة z المناظرة لقيم X وهي 0 و12 ثم نجد القيم التي تناظر قيم z في الجداول الإحصائية كما يلي:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{8-10}{2} = -1 \qquad\qquad z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{12-10}{2} = 1$$

عند $z = 1$ يمكننا الحصول على القيمة 0.3413 من الجداول الإحصائية. هذا يعني أن احتمال أن تكون العلامات بين 8 و12 هو $(0.3413 + 0.3413)$

$$P(8 < X < 12) = 0.6826$$

4– احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي 6 هو

$$z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{6-10}{2} = -2$$

عند $z = 2$ يمكننا الحصول على القيمة 0.4772 من الجداول الإحصائية. هذا يعني أن احتمال أن تكون العلامات أقل من 6 هو

$$P(X \leq 6) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

تمارين محلولة

التمرين 1: نرمي حجرة نرد 4 مرات متتالية، ونسجل في كل مرة الرقم الذي يظهر. فإذا كانت جميع الأوجه لها نفس احتمال الظهور وأن الأربعة رميات مستقلة عن بعضها البعض.

1– ما هو احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات؟

2– ما هو احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل؟

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X حيث يمثل عدد مرات ظهور الرقم 5 في الأربع رميات.

3– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

4– أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ– احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات هو

احتمال ظهور الرقم 5 عند رمي حجرة نرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$. إذا اعتبرنا A و B هو حادث ظهور وعدم ظهور الرقم 5 على التوالي. يصبح لدينا:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{5}{6}$$

وبما أن عدد الرميات مستقلة عن بعضها البعض فإنه يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين حيث أن:

$$P(X) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=3) = c_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} = 0.01$$

2– احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل هو

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = P(X=0) = c_4^0 \frac{1}{6}^0 (\frac{5}{6})^{4-0} = 0.48$$

$$P(A) = 1 - 0.48 = 0.52$$

3– تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

إذا كان المتغير العشوائي ظهور الرقم 5 يكون لدينا عدد الحالات الممكنة عند رمي حجرة نرد مرة واحدة

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$$

أما عندما نرمي حجرة نرد 4 مرات تكون عدد الحالات الممكنة $2^4 = 16$

وبما أن المتغير العشوائي يتبع توزيع ذي الحدين فإنه يمكننا حساب الاحتمالات المقابلة من خلال:

حيث أن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي هي: $\{0,1,2,3,4\}$

$$P(X=0)=c_4^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{4-0}=\frac{625}{1296}$$

$$P(X=1)=c_4^1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{4-1}=\frac{125}{324}$$

$$P(X=2)=c_4^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{4-2}=\frac{25}{216}$$

$$P(X=3)=c_4^3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^{4-3}=\frac{5}{324}$$

$$P(X=4)=c_4^4(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^{4-4}=\frac{1}{1296}$$

x_i	0	1	2	3	4	**Σ**
p_i	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$	1

4- حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي

$$E(X)=np$$
$$=4\times\frac{1}{6}=0.66$$

- التباين

$$V(X)=np(1-p)$$
$$=4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=0.55$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}$$
$$\delta(X)=\sqrt{0.55}$$
$$\delta(X)=0.74$$

التمرين 2: تشير الإحصائيات للسنوات السابقة أنه في المتوسط يتوقف 6 طلاب جدد عن الدراسة في كل قسم كل سنة في كلية معينة.

1- ما هو احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة؟

2- ما هو احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة؟

3- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots . n$$

$$P(3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = \frac{216 \times 0.00248}{3 \times 2 \times 1} = 0.08928$$

2– احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$P\ (3) = 0.08928$$

$$P(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = \frac{36 \times 0.00248}{2 \times 1} = 0.04464$$

$$P(1) = \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = \frac{6 \times 0.00248}{1} = 0.01488$$

$$P(0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = \frac{1 \times 0.00248}{1} = 0.00248$$

$$P(X \leq 3) = 0.08928 + 0.04464 + 0.01488 + 0.00248$$
$$= 0.15128$$

3– حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \lambda = 6$$

- التباين

$$V(x) = \lambda = 6$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6} = 2.45$$

التمرين 3: في امتحان مقياس الإحصاء وجد الطالب 4 تمارين. فإذا كان احتمال أن يجيب هذا الطالب عن كل تمرين صحيحا هو $\frac{2}{3}$.

1– ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط؟

2– ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر؟

3– ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين؟

الحل:

1– احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط هو

لدينا: $n = 4, \quad P = \frac{2}{3}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{3}$

$$P(2) = c_4^2(\tfrac{2}{3})^2(\tfrac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

2– احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر هو

$$P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$P(1) = c_4^1(\tfrac{2}{3})^1(\tfrac{1}{3})^{4-1} = 0.0987$$

$$P(2) = c_4^2(\tfrac{2}{3})^2(\tfrac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

$$P(3) = c_4^3(\tfrac{2}{3})^3(\tfrac{1}{3})^{4-3} = 0.3950$$

$$P(4) = c_4^4(\tfrac{2}{3})^4(\tfrac{1}{3})^{4-4} = 0.1975$$

$$P(X \geq 1) = 0.0987 + 0.2962 + 0.3950 + 0.1975$$
$$= 0.9876$$

أو بطريقة ثانية:

احتمال أن لا يجيب عن أي تمرين هو $q^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$ وبالتالي احتمال أن يجيب صحيحا على الأقل على تمرين هو $1 - q^4 = \frac{80}{81} = 0.9876$

3– احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين هو

يجيب هذا الطالب على أكثر من نصف التمارين يعني إذا أجاب صحيحا على 3 أو 4 تمارين.

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0.3950 + 0.1975 = 0.5925$$

التمرين 4: تشير الإحصائيات أن 1 في المائة من السيارات المنتجة في مصنع ما فيها بعض المشاكل التقنية. فرضا أننا اخترنا عينة متكونة من 30 سيارة. أحسب احتمال وجود أكثر من سيارة فيها مشاكل تقنية:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين؟

2– باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين؟

الحل:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 30, \quad P = 0.01, \quad q = 1 - P = 0.99$

باستخدام الجداول الإحصائية نجد:

$$P(X > 1) = P(2) + P(3) + P(4) \dots\dots. = 0.0328 + 0.0031$$
$$= 0.0328 + 0.0031 + 0.0002 = 0.0361$$

2– باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين:

بما أن $n = 30$ و $np = 30 \times 0.01 = 0.3$ فإنه يمكننا استخدام تقريب التوزيع البواسوني لتوزيع ذي الحدين. حيث أن: $\lambda = np = 0.3$

يمكننا حساب $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$ حيث أن X هو عدد السيارات غير الجيدة.

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(1) = \frac{0.3^1 e^{-0.3}}{1!} = \frac{0.3 \times 0.74082}{1} = 0.222246$$
$$P(0) = \frac{0.3^0 e^{-0.3}}{0!} = \frac{1 \times 0.74082}{1} = 0.74082$$

$$P(X \leq 1) = P(1) + P(0) = 0.222246 + 0.74082$$
$$= 0.963066$$
$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - 0.963066 = 0.036934$$

فكلما زادت n يقترب التقريب أكثر من الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين

التمرين 5: إذا كان طول الطلبة في كلية ما يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي 170 وانحراف معياري 10.

1– ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160؟

2– ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175؟

3– ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185؟

الحل:

1– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160 هو

نقوم بحساب أولا قيمة z المناظرة لقيم X ثم نجد القيم التي تناظر قيم z في الجداول الإحصائية كما

يلي:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\delta} = \frac{150-170}{10} = -2 \qquad z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{160-170}{10} = -1$$

عند البحث عن مقابل $z = -2$ و $z = 1$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمتين 0.4772 و0.3413. هذا يعني أن احتمال أن العمر بين 150 و160 هو

$$P(150 < X < 160) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

2– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175 هو

$$z = \frac{X - \mu}{\delta} = \frac{175-170}{10} = 0.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z = 0.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة 0.1915. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أقل أو يساوي 175 هو

$$P(X \leq 175) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

3– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185 هو

$$z = \frac{X - \mu}{\delta} = \frac{185-170}{10} = 1.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z = 1.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة 0.4332. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أكثر أو يساوي 185 هو

$$P(X \geq 185) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

التمرين 6: إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات في أحد المسابقات هو 74 و12 على التوالي.

1– أحسب العلامات بالوحدات القياسية واحتمالاتها للمتسابقين الحاصلين على: 60،75، 85، 93؟

2– أحسب العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2؟

الحل:

1– حساب العلامات بالوحدات القياسية للمتسابقين الحاصلين على:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\delta} = \frac{60-74}{12} = -1.16, \qquad P(z_1 = 1.16) = 0.3770$$

$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{75-74}{12} = 0.08, \qquad P(z_2 = 0.08) = 0.0319$$

$$z_3 = \frac{X_3-\mu}{\delta} = \frac{85-74}{12} = 0.91, \qquad P(z_3 = 0.91) = 0.3186$$

$$z_4 = \frac{X_4-\mu}{\delta} = \frac{93-74}{12} = 1.58, \qquad P(z_4 = 1.58) = 0.4429$$

2– العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2 هي

$$X_1 = z_1 \times \delta + \mu = 12 \times (-1) + 74 = 62$$

$$X_2 = z_2 \times \delta + \mu = 12 \times (0.5) + 74 = 80$$

$$X_3 = z_3 \times \delta + \mu = 12 \times (1.5) + 74 = 92$$

$$X_4 = z_4 \times \delta + \mu = 12 \times (2) + 74 = 98$$

التمرين 7: إذا ألقينا 12 قطعة نقدية متماثلة. أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و7 بما في ذلك 4 و7، وذلك باستخدام:

1– توزيع ذي الحدين؟

2– التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين؟

الحل:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 12, \quad P = 0.5, \quad q = 1 - P = 0.5$

$$P(4 \leq X \leq 7) = P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$$

$$P(4) = c_{12}^{4}(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2})^{12-4} = 0.1208$$

$$P(5) = c_{12}^{5}(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^{12-5} = 0.1933$$

$$P(6) = c_{12}^{6}(\tfrac{1}{2})^6(\tfrac{1}{2})^{12-6} = 0.2255$$

$$P(7) = c_{12}^{7}(\tfrac{1}{2})^7(\tfrac{1}{2})^{12-7} = 0.1933$$

$$P(4 \leq X \leq 7) = 0.1208 + 0.1933 + 0.2255 + 0.1933$$
$$\approx 0.7332$$

2– باستخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين:

لدينا:

$$\mu = np = 12 \times 0.5 = 6$$

$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times 0.5 \times 0.5} = 1.78$$

إذا كان X يمثل عدد ظهور الصورة. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال $P(4 \leq X \leq 7)$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصل من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(3.5 \leq X \leq 7.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\delta} = \frac{3.5 - 6}{1.78} = -1.45, \quad P(z_1 = 1.45) = 0.4265$$

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{7.5 - 6}{1.78} = 0.87, \quad P(z_2 = 0.87) = 0.3078$$

$$P \approx P(4 \leq X \leq 7) = P(-1.45 \leq X \leq 0.87)$$

$$= 0.4265 + 0.3078 = 0.7343$$

التمرين 8: نفترض أنه هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب متكون من 500 صفحة. أحسب احتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

1- خطأين بالضبط؟

2- خطأين أو أكثر؟

3- 5 أخطاء بالضبط؟

الحل:

1- احتمال وجود خطأين بالضبط هو :

نفترض أن عدد الأخطاء في الصفحة هو عبارة عن عدد مرات النجاح حسب توزيع ذي الحدين. لدينا:

$n = 300$ حيث أنه يوجد 300 خطأ مطبعي و $P = \frac{1}{500}$ هو احتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعينة. وبما أن P صغيرة وn كبيرة من الأفضل استخدام تقريب بواسون لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda = np = 0.6$$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X = 2) = \frac{0.6^2 e^{-0.6}}{2!} = \frac{0.36 \times 0.549}{2} = 0.0988$$

2- احتمال خطأين أو أكثر هو

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = \frac{0.6^0 e^{-0.6}}{0!} = \frac{1 \times e^{-0.6}}{1} = 0.549$$

$$P(X = 1) = \frac{0.6^1 e^{-0.6}}{1!} = \frac{0.6 \times 0.549}{1} = 0.329$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.549 + 0.329$$

$$= 0.122$$

3- احتمال وجود 5 أخطاء بالضبط هو

$$P(X = 5) = \frac{0.6^5 e^{-0.6}}{5!} = \frac{0.0777 \times 0.549}{120} = 3.554775 \times 10^{-4}$$

التمرين 9: في مركز تلقي المكالمات الهاتفية، يتم استقبال المكالمات من خارج الوطن باحتمال قدره 0.1 في الساعة. قمنا بسحب 100 مكالمة خلال ساعة معينة. ما هو احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية في العينة المسحوبة وذلك باستخدام:

1- توزيع ذي الحدين؟

2- التوزيع البواسوني؟

3- التوزيع الطبيعي؟

الحل:

1- احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام توزيع ذي الحدين هو:

نفترض أن X هو عدد المكالمات الدولية التي يستقبلها المركز. وبالتالي يجب أن نحسب الاحتمال:

$$P(X > 3)$$

لدينا: المكالمة يمكن أن تكون محلية أو دولية وبالتالي يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_{100}^{0}(0.1)^0(0.9)^{100-0} = 0.0000265$$

$$P(X = 1) = c_{100}^{1}(0.1)^1(0.9)^{100-1} = 0.0005951$$

$$P(X = 2) = c_{100}^{2}(0.1)^2(0.9)^{100-2} = 0.0016231$$

$$P(X=3)=c_{100}^{3}(0.1)^{3}(0.9)^{100-3}=0.0078363$$

$$P(X\leq 3)=0.000026+0.000595+0.001623+0.007836$$
$$=0.0078363$$

وبالتالي:
$$P(X>3)=1-0.0078363$$
$$=0.9921$$

1– احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع البواسوني هو:

لدينا: $n=100$ و $P=0.1$ هو احتمال تلقي مكالمة دولية. وبما أن P صغيرة وn كبيرة فإنه بإمكاننا استخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda=np=10$$

نقوم بحساب الاحتمال:
$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X=0)=\frac{10^{0}e^{-10}}{0!}=\frac{1\times 0.00005}{1}=0.00005$$

$$P(X=1)=\frac{10^{1}e^{-10}}{1!}=\frac{10\times 0.00005}{1}=0.0005$$

$$P(X=2)=\frac{10^{2}e^{-10}}{2!}=\frac{100\times 0.00005}{2}=0.0023$$

$$P(X=3)=\frac{10^{3}e^{-10}}{3!}=\frac{1000\times 0.00005}{6}=0.008$$

$$P(X\leq 3)=0.00005+0.0005+0.0023+0.008=0.0104$$

$$P(X>3)=1-0.0104=0.9896$$

3– احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع الطبيعي هو:

نقوم بحساب الاحتمال:
$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$$

لدينا:
$$\mu=np=100\times 0.1=10$$

$$\delta=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}=3$$

بافتراض أن X يمثل عدد المكالمات الدولية. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال

$$P(X>3)=1-P(0\leq X\leq 3)$$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصلة من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(-0.5 \leq X \leq 3.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{-0.5-10}{3} = -3.5, \qquad P(z_1 = 3.5) = 0.4998$$

$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{3.5-10}{3} = -2.16, \qquad P(z_2 = 2.16) = 0.4846$$

$$P \approx P(0 \leq X \leq 3) = P(-3.5 \leq X \leq -2.16)$$

$$= 0.4998 + 0.4846 = 0.9844$$

التمرين 10: تتكون عائلة من 7 أطفال، ما هو احتمال أن يكون في هذه العائلة:

1- 4 أولاد ؟

2- عدد الأولاد أقل من عدد البنات؟

الحل:

1- احتمال أن يكون في هذه العائلة 4 أولاد هو

نفترض احتمال أن يكون الطفل ولد هو $\frac{1}{2}$

لدينا: $n = 7, \quad P = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{2}$

$$P(X = 4) = c_7^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^3 = 0.2734$$

2- احتمال أن يكون في هذه العائلة عدد الأولاد أقل من عدد البنات هو

$$P(X) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_7^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^7 = 0.0081$$

$$P(X = 1) = c_7^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^6 = 0.0546$$

$$P(X = 2) = c_7^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^5 = 0.1640$$

$$P(X = 3) = c_7^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^4 = 0.2734$$

$$P(X) = 0.0081 + 0.0546 + 0.1640 + 0.2734$$

$$= 0.5001$$

التمرين 11: نفترض أن نسبة رسوب الطلبة في إحدى الأقسام هو 0.02. ما هو احتمال وجود 3 طلبة راسبين في عينة متكونة من 100 طالب اختيرت عشوائيا وذلك باستخدام:

1- توزيع ذي الحدين؟

2- توزيع بواسون؟

الحل:

في هذا المثال نستطيع تطبيق توزيع ذي الحدين، وحيث أن P صغيرة تساوي 0.02 و n كبيرة تساوي 100 فمن الأفضل تطبيق التوزيع البواسوني.

1- توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 100, \quad P = 0.02, \quad q = 1 - P = 0.98$

$$P(X = 3) = c_{100}^{3}(0.02)^3(0.98)^{97} = 0.1822$$

$$P(X = 3) = 0.1822$$

2- توزيع بواسون:

$$\lambda = np = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8 \times 0.1353}{6} = 0.1804$$

$$P(X = 3) = 0.1804$$

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

باللغة العربية:

1. جنيدي نكو و خينتشين، المبادئ الأولية لنظرية الاحتمالات، دار مير للطباعة والنشر.
2. دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الإحصاء والاقتصاد القياسي، ملخصات شوم، الطبعة الثالثة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2011.
3. السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1995.
4. سيمور ليبشتز، ترجمة سماح داود، نظريات ومسائل في الاحتمالات، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2003.
5. موراي سبيجل، جون شيلر وألو سرينيفاسان، ترجمة محمود على أبو النصر ومصطفى جلال مصطفى، الاحتمالات والاحصاء، ملخصات شوم، الطبعة الأولى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2004.

باللغة الأجنبية:

6. Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, Introduction to Probability, Swarthmore College, 2005.
7. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, Introduction to Probability: Problem Solutions, 2nd Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2015.
8. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, Introduction to Probability, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
9. Dirk P. Kroese, A Short Introduction to Probability, The University of Queensland, 2009.
10. F.M. Dekking, Kraaikamp, H.P. Lopuhaa,¨ L.E. Meester, A Modern Introduction to Probability and Statistics, Understanding Why and How, Springer-Verlag London Limited, 2005.
11. Heather Haney and Ernest Johnson, Probability and Statistics, 4ed Edition CK-12 Foundation, 2011.
12. Hwei P. Hsu, Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes, Schaum's Outline, The McGraw-Hill Companies, 1997.
13. Kai Lai Chung, A Course in Probability Theory, Third Edition, Academic Press, 2001.
14. Miroslav Lovri, Students’ Solutions Manual Probability and Statistics, McMaster University, 2011.
15. Rick Durrett, Probability: Theory and Examples, Edition 4, Cambridge University Press, 2013.
16. Sheldon Ross, A first course in probability, 8th ed. Pearson Prentice Hal, 2010.
17. Sheldon Ross, Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Third Edition, Elsevier Academic Press, 2004.
18. Sheldon Ross, Introduction to Probability Models, Tenth Edition, Academic Press is an Imprint of Elsevier, 2010.