Matière : Probabilités & Statistiques

Série de TD N° 1

(Eléments d'analyse combinatoire)

Exercice 1 :

Dans tout l'exercice, on suppose qu'il n'y a pas de répétition.

a) Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former à l'aide des 7 chiffres 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 ?

b) Combien de ces nombres sont inférieurs à 5000 ?

c) Combien de ces nombres sont pairs ?

d) Combien sont impairs ?

e) Combien sont des multiples de 5 ?

Exercice 2 :

Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.

- Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

- Généraliser le résultat précédent dans le cas d'un système de n équations à n inconnues ayant un déterminant non nul.

Exercice 3 :

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1	2	3
4	5	6
A	*B*	*C*

1) Combien de codes différents peut-on former ?

2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?

3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?

4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 4 :

Soit un lot de 7 pièces dont 4 sont bonnes et 3 défectueuses.

- Combien d'échantillons de 3 pièces peut-on réaliser ?
- Combien parmi ces échantillons contiennent 3 bonnes pièces ?
- Combien au moins contiennent une pièce bonne ?

Exercice 5 :

On appelle anagramme d'un mot, tout autre mot formé des mêmes lettres (par exemple : carte et trace). C'est donc une permutation avec répétition des lettres de ce mot.

- Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot COMMISSION ?

Exercice 6 :

Montrer que pour tout entier n et p, tel que : $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$, les relation suivantes sont vérifiées.

1°) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

2°) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots C_p^{p-1} + C_p^p$

Formules classiques d'analyse combinatoire

1- Principe fondamental d'analyse combinatoire (PFAC)

Soit $A_1, A_2, \dots A_p$ p ensembles distincts formés d'éléments complètement discernables. Le nombre de *p-uplet* $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ qu'on peut former à partir des ensembles $A_i, (a_i \in A_i, i = 1, \dots, p)$ est :

$$N = card(A_1 \times A_2 \times \dots A_p) = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p \text{ , ou } n_i = card(A_i)$$

2- Arrangement avec répétition

Le nombre d'arrangements avec répétition de *p-éléments* parmi *n* est :

$$A_n^p = n^p$$

3- Arrangement sans répétition

Le nombre d'arrangements sans répétition de *p-éléments* parmi *n* est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n.(n-1)\dots.(n-p+1)$$

4- Permutation sans répétition

C'est un arrangement sans répétition de *n-éléments* parmi *n* :

$$P_n = A_n^n = n!$$

5- Permutation avec répétition

C'est une disposition ordonnée de *n-éléments*, ou le 1[er] élément figure n_1 fois, le 2[ème] élément figure n_2 fois,….. Le nombre de permutations avec répétition de n éléments :

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad \text{Avec} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$$

6- Combinaison avec répétition

Le nombre de combinaisons avec répétition de *p-éléments* parmi *n* $(0 \leq p \leq n)$ est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n-1+p)!}{p!(n-1)!}$$

7- Combinaison sans répétition

Le nombre de combinaisons de *p-éléments* parmi *n* éléments discernables $(0 \leq p \leq n)$ est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

8- Relations utiles

(i) Les coefficients C_n^p sont aussi appelés *coefficients binomiaux*. Si *p* set strictement supérieur à *n*, on convient que dans ce cas $C_n^p = 0$.

(ii) Pour tout entier *n* et tout entier *p* tel que $(0 \leq p \leq n)$, on a :

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \ ; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \ ; \quad C_n^p = C_n^{n-p}$$

(iii) (Relation de Pascal) : Pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier *p* tel que $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

(iv) (Formule du binôme de Newton) : Pour tous nombres complexes *a* et *b* et tout entier naturel *n* non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

- Corrigé de la série de TD N°01 -

Exo1: $\Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\} \rightarrow Card\,\Omega = 7$.

$Nbre \equiv (a_1, a_2, a_3, a_4)$; $a_i \in \Omega \;/\; \forall i = \overline{1,4}$

a/ Total des Nbres de 4 chiffres:

- Le 1er chiffre (a_1) peut être choisi de 7 façons ≠
- Le 2ème " (a_2) " " 6 " "
- Le 3ème " (a_3) " " 5 " "
- Le 4ème " (a_4) " " 4 " "

⇒ d'après le PFAC (Principe Fondamental de l'analyse Combinatoire) :

Il y a : $N_1 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

b/ Total des Nbres < 5000

- Pour que le Nbre soit < à 5000, il faut que $a_1 \in \{1, 2, 4\} \Rightarrow 3$ possibilités

* $a_2 \longrightarrow 6$ possibilités ; * $a_3 \longrightarrow 5$ possibilités et $a_4 \longrightarrow 4$ possibilités

⇒ Il y a : $N_2 = 3 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$.

c/ Total des Nbres pairs:

$a_4 \in \{2, 4, 6, 8\} \longrightarrow 4$ possibilités

$a_1 \longrightarrow 6$ possibs, $a_2 \longrightarrow 5$ possib, $a_3 \longrightarrow 4$ possibs

⇒ Il y a : $N_3 = 6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$.

d/ Total des Nbres impairs:

- Même raisonnement :

$a_4 \in \{1, 5, 9\} \rightarrow$ 3 possibilités

$\Rightarrow N_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$

NB : on comme Nbre $\in \mathbb{N} \Rightarrow$

$N_4 = N_1 - N_3 = 360.$

e) Total des multiples de 5 :

Nbre $= \alpha . 5 \Rightarrow a_4 \in \{5\} \rightarrow$ 1 seule possib.

$\Rightarrow N_5 = 6 \times 5 \times 4 \times 1 = 120.$

NB : Au lieu d'utiliser le PFAC, on peut utiliser la formule des arrangements sans répétitions. $A_n^p = n! / (n-p)!$

a) $\longrightarrow A_7^4 = \dfrac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$

Exo 2 :

1/ 5, -1, 3 $\rightarrow$ solution d'un système de 3 eqts à 3 inconnues (det $\neq 0$).

Le nombre de triplets $\neq$ est :

$\left\{ (5,-1,3) ; (5,3,-1) ; (-1,5,3) ; (-1,3,5) ; (3,-1,5) ; (3,5,-1) \right\} \rightarrow N = 6$

2/ On peut généraliser dans le cas d'un système de n eqts à n inconnues (où det $\neq 0$)

Soit $X = (x_1, x_2, ---, x_n)$ un n-uplets solutions du système avec $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$

on remarque que X et une permutation sans répétition de n éléments $\Rightarrow$

$$N = P_n = n!$$

Exo 3:

$$\text{Code} \equiv (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ avec } \begin{cases} e_1 \in \{A, B, C\} \\ e_2, e_3, e_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$$

1°/ Nbre de codes possibles (ou capacité de codage).

1ère méthode: (d'après le PFAC)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \in A_1 = \{A, B, C\} \Rightarrow 3 \text{ possibilité} \\ a_2 \in A_2 = \{1, \ldots 6\} \Rightarrow 6 \quad // \\ a_3 \in A_3 = \quad // \quad \Rightarrow \quad // \\ a_4 \in A_4 = \quad // \quad \Rightarrow \quad // \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Il y a $N_1 = 3 \times 6 \times 6 \times 6 =$

2ème méthode: (d'après la formule des arrangements)

$$\text{Code} \equiv (e_1, \underbrace{e_2, e_3, e_4}) = (e_1, X)$$

X est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 6 $\Rightarrow$

$$N_1 = 3 \times A_6^3 = 3 \times 6^3 =$$

2°/ Codes sans le chiffres 1

$e_1 \in \{A, B, C\}$; $e_2, e_3, e_4 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\text{Code} \equiv (e_1, \underbrace{e_2, e_3, e_4}) = (e_1, Y)$$

Y est un arrangement ~~sans~~ avec rép de 3 chiffres parmi 5 $\Rightarrow$ $N_2 = 3 \times A_5^3 = 3 \times 5^3 =$

3°/ Code avec au moins le chiffre 1 :
Le contraire de {Code avec au moins le chiffre 1}
est {Code sans le chiffre 1} ⇒

$N_3 = N_1 - N_2 =$

4°/ Code avec des chiffres ≠ : $e_2 \neq e_3 \neq e_4$

$\text{Code} \equiv (e_1, \underbrace{e_2, e_3, e_4}) = (e_1, Z)$

Z est un arrangement sans rép de
3 elements parmi 6 ⇒

$N_4 = 3 \times A_6^3 = 3 \times \frac{6!}{3!\,(6-3)!} =$

5°/ Code avec au moins 2 chiffres identiques :
Le contraire de est {Code avec des chiffres ≠}

$\Rightarrow N_5 = N_1 - N_4 =$

Ex04 :

Lot de 7 pièces → 4 b-p. / 3 m-p.

NB : les pièces sont differents 2 à 2.

a/ NB : les échantillons de 3 pièces sont des Combinaisons ⇒

Il y a $C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$ échantillons de 3 pièces.

b/ Il y a $C_4^3 = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$ échant avec (3 b-p) c/ $\left\{\begin{array}{l}\text{Echanti avec}\\ \text{au moins } 1 \text{ b-p}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Echanti}\\ 2 \text{ b-p } 1.\\ 1 \text{ m-p}\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l}\text{Echanti}\\ 1 \text{ b-p}\\ 2 \text{ m-p}\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l}\text{Echanti}\\ 3 \text{ b-p}\end{array}\right\}$

$\Longrightarrow$

Il y a : $C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^2 + C_4^3 =$

Exo 6 :

1°/ $\forall n, p \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 2 \,,\, 1 \leq p \leq n-1$:

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

$\leftarrow$ Relation de Pascal.

on a :

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-p) + p\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,[n-p+p]}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{\text{''}}$$

$$= C_n^p$$

2°/ $\forall n \geq 2, \forall p : 1 \leq p \leq n-1.$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \cdots + C_p^{p-1} + C_p^p \quad ?$$

D'après la relation de Pascal, on a :

$$C_i^p = C_{i-1}^p + C_{i-1}^{p-1} \; ; \forall i \geq 2, \forall p : 1 \leq p \leq i-1$$

Appliquons la relation de Pascal de l'ordre $i = n$ jusqu'à l'ordre $i = p+1$.

$$\left.\begin{array}{l}
i=n \Rightarrow C_n^p = \cancel{C_{n-1}^p} + C_{n-1}^{p-1} \\
i=n-1 \Rightarrow \cancel{C_{n-1}^p} = \cancel{C_{n-2}^p} + C_{n-2}^{p-1} \\
i=n-2 \Rightarrow \cancel{C_{n-2}^p} = \cancel{C_{n-3}^p} + C_{n-3}^{p-1} \\
\quad \vdots \\
i=p+1 \Rightarrow \cancel{C_{p+1}^p} = C_p^p + C_p^{p-1}
\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

Sommation terme à terme.

$$\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \cdots + C_p^p + C_p^{p-1}}$$