

Chap 3 / - Variables aléatoires -

3-1) Définition d'une variable aléatoire (V-A)

a) Introduction: Lorsque une épreuve se produit, on est souvent intéressé par des fonctions des résultats et non pas les résultats eux-mêmes.

L'exemple, lorsqu'on lance 2 dés, on s'intéresse à la somme des chiffres égale à 7. Les couples $(1,6), (6,1), (5,2), (2,5), (3,4), (4,3)$ font que la somme est égale à 7. Comme cette somme se prend des valeurs aléatoires, il s'agit d'une V-A.

b) Définition d'une V-A:

Soit $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, une V-A X sur un ensemble fondamental Ω est une fonction de Ω sur $\mathbb{R}$, telle que l'image inverse de chaque intervalle de $\mathbb{R}$ par X est un événement de $\mathcal{S}$.

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array} \quad ; \quad I = [a, b] \subset \mathbb{R} \\ X^{-1}([a, b]) = \{ \omega \in \Omega / X(\omega) \in [a, b] \}$$

X est appelée V-A réelle

c) Propriétés des V-A:

si X et Y sont 2 V-A définies sur le même $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ et si k est un nombre réel quelconque:

$$(i) \quad X + Y \longmapsto (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

$$(ii) \quad X + k \longmapsto (X + k)(\omega) = X(\omega) + k.$$

$$(iii) \quad k \cdot X \longmapsto (k \cdot X)(\omega) = k \cdot X(\omega).$$

$$(iv) \quad X \cdot Y \longmapsto (X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega).$$

N-B: X désigne la V-A, x désigne la valeur possible de X , le domaine de définition de X est D_X . Exemple $D_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

4) les différents types de V-A:

On distingue 2 types de V-A:

(i) les V-A discrètes (VAD)

La VAD prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs distinctes.

$X \in D_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow$ VAD finie.

$X \in D_X = \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow$ VAD infinie.

(ii) les V-A continues (VAC)

La VAC prend un nombre infini de valeurs dans un intervalle.

$X \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

3-2/ Probabilité d'une V-A:

Soit X une V-A définie par une application: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pouvant prendre les valeurs dans $D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Par définition la probabilité pour que $X = x_i$ est la probabilité des éléments de Ω , ayant pour image la valeur x_i dans l'application.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
avec $p_i = P(X = x_i)$; $i = 1, n$.

ona: $p_i = P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\})$

Remarque:

(i) $P(X = x_i)$ est régie par les 3 axiomes de Kolmogorov:

1/ $P(X = x_i) \geq 0$

2/ $P(X \in D_X) = 1$.

3/ si les x_i sont incompatibles entre eux:

$P[(X = x_i) \text{ ou } (X = x_j)] = P(X = x_i) + P(X = x_j)$
(2)

3-3/ Loi de probabilité d'une V-A:

a/ loi de probabilité d'une VAD:

Soit X une VAD (finie). On appelle loi de probabilité de X la donnée:

1 - de l'ensemble des valeurs possibles:

$$D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

2 - de la probabilité de chaque valeur:

$$l = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \quad / \quad p_i = l(X = x_i)$$

N-B: on désignera par f la loi de probabilité de X , ce qui s'écrit:

$$\forall x_i, f(x_i) = l(X = x_i)$$

La fonction f s'appelle, fonction de distribution de la VAD X .

Remarque importante:

$$(i) \quad \forall i: f(x_i) = l(X = x_i) \geq 0$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{n(\infty)} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} l(X = x_i) = 1$$

$$(iii) \quad l(a \leq X \leq b) = \sum_{x_i \in [a, b]} f(x_i)$$

Exemple: Soit X la V-A donnée par le tableau suivant:

x_i	$f(x_i)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 2) &= \sum_{x_i \in [0, 2]} f(x_i) \\ &= f(0) + f(1) + f(2) \\ &= 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 \end{aligned}$$

b) loi de probabilité d'une VAC:

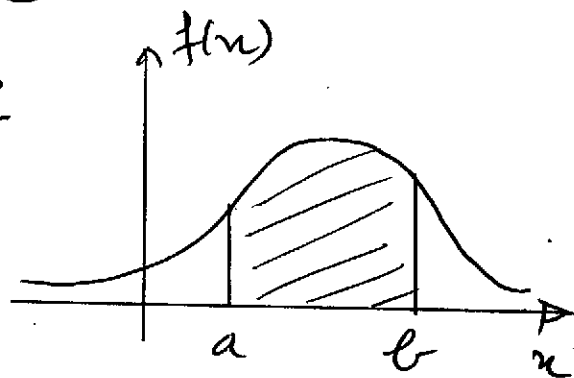
Soit X une VAC, on appelle loi de probabilité de X ou densité de probabilité la fonction f telle que:

$$\begin{cases} 1) \forall n \in \mathbb{R}; f(n) \geq 0 \\ 2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(n) dn = 1 \end{cases}$$

NB: soit $X \equiv$ VAC de densité f

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(n) dn.$$

(c-à-d, l'aire sous la courbe de f entre a et b).



Exemple: soit f une fonction-densité d'une VAC X définie par:

$$f(n) = \begin{cases} k \cdot n, & 0 \leq n \leq 1 \\ 0, & n \leq 0 \text{ ou } n \geq 1 \end{cases} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

1°) Déterminer la valeur de la cste k pour que f soit une densité?

f est une densité si:

$$\begin{cases} ①, \forall n \in \mathbb{R}, f(n) \geq 0 \\ ② \int_{-\infty}^{+\infty} f(n) dn = 1 \end{cases}$$

$$① \Rightarrow k \cdot n \geq 0 \Rightarrow \boxed{k \geq 0} \quad (n \in [0, 1])$$

$$\begin{aligned} ② \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(n) dn &= \int_{-\infty}^0 \underbrace{f(n)}_0 dn + \int_0^1 \underbrace{f(n)}_0 dn + \int_1^{+\infty} \underbrace{f(n)}_0 dn \\ &= k \cdot \int_0^1 n dn = k \cdot \left[\frac{n^2}{2} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow \boxed{k=2} \end{aligned}$$

$$k=2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{k=2}$$

$$\text{donc } f(n) = \begin{cases} 2n, & n \in [0, 1] \\ 0, & n \notin [0, 1] \end{cases}$$

20/ Calculer $\mathbb{I}(1/2 \leq X \leq 1)$.

$$\mathbb{I}(1/2 \leq X \leq 1) = \int_{1/2}^1 f(u) du = \int_{1/2}^1 2u du = 3/4$$

3-4/ Fonction de répartition:

a) Fonction de répartition d'une VAD:

* Def: Soit X une VAD (finie ou infinie), on appelle fonction de répartition de X définie sur $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto F_X(x) = \mathbb{I}(X \leq x) = \sum_{n_i \leq x} \mathbb{I}(X = n_i)$$

N-B: Comme $\mathbb{I}(X = n_i) = f(n_i) \Rightarrow$

$$F_X(x) = \sum_{n_i \leq x} f(n_i) \quad \begin{array}{l} i \in [1, n] \text{ (fini)} \\ i \in \mathbb{N} \text{ (infini)} \end{array}$$

Ce qui correspond au tableau suivant:

n_i	n_1	n_2	----	n_n
$f(n_i)$	$f(n_1)$	$f(n_2)$	----	$f(n_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_X(n_1) = f(n_1) \\ F_X(n_2) = f(n_1) + f(n_2) \\ \vdots \\ F_X(n_n) = f(n_1) + \dots + f(n_n) = 1. \end{array} \right.$$

**/ Propriétés de F_X :

- F_X est une fonction croissante: $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- F_X est constante sur tout intervalle $[n_i, n_{i+1}[$ (dans le cas d'une VAD, le graphique de F_X est une fonction en escalier).

•) Selon l'écriture de F_X , on distingue:

- si $F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n) \Rightarrow F_X$ est continue à droite en tout point $n \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow n_0} F_X(n) = F_X(n_0).$$

- si $F_X(n) = \mathbb{P}(X < n) \Rightarrow F_X$ est continue à gauche en tout point $n \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow n_0^-} F_X(n) = F_X(n_0).$$

$$n \mapsto n_0^-$$

$$\bullet) \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

(cas où F_X est une fonction continue sur $\mathbb{R}$).

b) Fonction de répartition d'une VAC:

* Def: Soit X une VAC, de densité f , on appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie par:

$$F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n) = \int_{-\infty}^n f(t) dt.$$

NB: même propriétés que celles des VAD, sauf:

•) le graphe de F_X est une fonction continue.

$$\bullet) \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

(cas où F_X est continue).

Remarque importante:

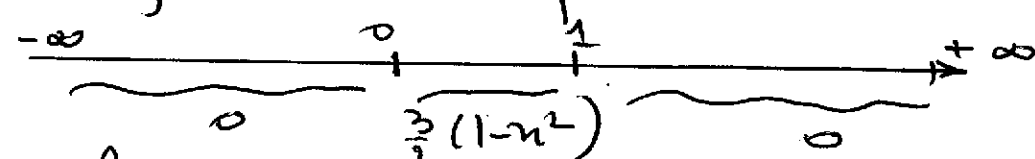
Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et si f est continue, $\forall n \in \mathbb{R}$ alors F_X est dérivable et on a:

$$F_X'(n) = f(n)$$

Exercice: Soit f la fct-densité d'une VAC X , telle que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & ; x \in [0, 1] \\ 0 & ; \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de répartition de X .

Solution: 

On distingue les cas suivants:

* / si $x \leq 0$: on a $f(t) = 0, \forall t \leq 0 \Rightarrow$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

* / si $0 \leq x \leq 1$: on a $f(t) = \frac{3}{2}(1-t^2); t \in [0, 1] \Rightarrow$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^x (1-t^2) dt$$

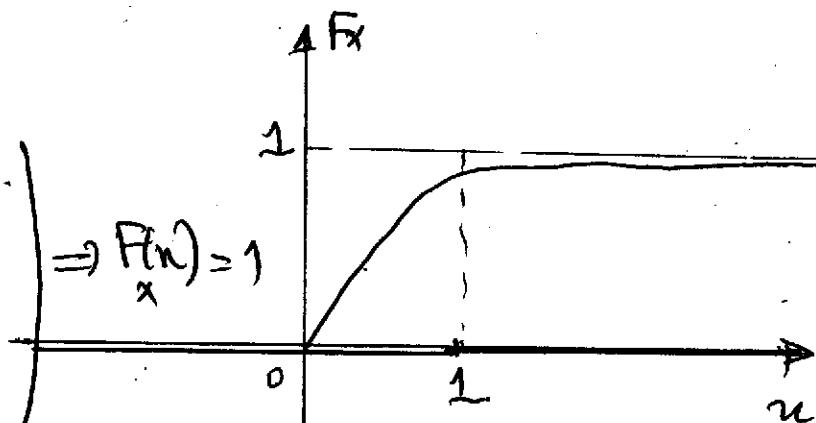
$$= \frac{3}{2} \cdot [t]_0^x - \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{2}$$

* / si $x > 1$:

on a: $F_X \nearrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

$$F_X(1) = 1.$$

(F_X continue à droite)



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{2} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

3-5/ Caractéristiques des V-A:

a) Espérance mathématique (ou moyenne).

a-1) Cas d'une VAD

Soit X une VAD, de fonction de distribution F .
L'espérance mathématique de X que l'on note par $E(X)$ est définie par:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i f(n_i) = x_1 f(n_1) + \dots + x_n f(n_n).$$

a-2) Cas d'une VAC:

Soit X une VAC, de densité f :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

a-3) Propriétés de la moyenne:

(i) L'espérance mathématique est linéaire:

$$E(aX + bY) = a E(X) + b E(Y) \text{ avec}$$

X et Y 2 V-A définies sur le même $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(ii) E(aX + b) = a \cdot E(X) + b \quad / \quad E(b) = b$$

b) Variance et Ecart-type:

b-1) Cas d'une VAD:

$$\text{- Variance: } \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 \cdot f(n_i)$$

$$\text{- L'écart-type: } \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (\sigma^2 = \text{Var}(X))$$

b-2) Cas d'une VAC:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$$

(8)

3-3/ Propriétés de la variance:

Soit X une VA d'espérance mathématique $E(X)$.

$$(i) \text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

$$(ii) \text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \text{Var}(X) ; a = \text{cte} \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \text{Var}(X + k) = \text{Var}(X) ; k = \text{cte} \in \mathbb{R}$$

NB: $E(X^2) = \sum_{i=1}^n n_i^2 \cdot f(n_i) \quad (\text{VAD})$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 \cdot f(n) dn \quad (\text{VAC})$$

Démonstration de (i):

$$E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2E(X) \cdot X + E^2(X))$$

$$= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E^2(X) \quad (\text{Liné})$$

$$= E(X^2) - E^2(X)$$

3-6/ V-A centrée réduite (ou VA réduite)

Soit X une VA de moyenne $\mu = E(X)$ et d'écart-type $\sigma > 0$, on définit une VA notée X^* par:

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} ; X^* \text{ est dite V-A réduite}$$

N-B: Pour $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} E(X^*) = 0 \\ \text{Var}(X^*) = 1 \end{cases}$

3-7/ V-A indépendantes:

a/ Déf: 2 V-A X et Y (cas des VAD) sont indépendantes, si:

$$\mathbb{P}[(X = n_i) \text{ et } (Y = y_i)] = \mathbb{P}(X = n_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_i) \quad \forall i$$

b) Propriétés:

si X et Y sont indépendantes alors :

$$(1) E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$(2) \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

N-B: si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v-a indépendantes alors :

$$(*) E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n).$$

$$(*) \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

- Fin -

NB: Voir aussi les pages suivantes sur
le calcul des intégrales impropres

Rappels sur les intégrales impropres de 1^{ère} espèce

a) la forme: toutes les intégrales de la forme:

$$\textcircled{1} = \int_a^{+\infty} f(u) du ; \textcircled{2} = \int_{-\infty}^b f(u) du ; \textcircled{3} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$$

avec:

① f continue sur $[a, +\infty[$

② „ „ $] -\infty, b]$

③ „ „ $] -\infty, +\infty[$

b) Méthodes de Calculs

$$*/ \textcircled{1} = \int_a^{+\infty} f(u) du = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(u) du$$

Si f admet une primitive $F \Rightarrow$

$$\textcircled{1} = \lim_{T \rightarrow +\infty} [F(u)]_a^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} [F(T) - F(a)]$$

① est soit conv ou D.V.

**/ ② = $\int_{-\infty}^b f(u) du$. On peut ramener le calcul de ② à celui de ①, en utilisant un changement de variable:

on pose $u = -t \Rightarrow du = -dt \Rightarrow$

$$\textcircled{2} = \int_{+\infty}^{-b} f(-t) \cdot (-dt) = \int_{-b}^{+\infty} f(-t) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-b}^T f(-t) dt$$

(11)

*** / (3) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$ se ramène à un calcul de (1) et (2)

soit $c \in]-\infty, +\infty[\Rightarrow$

$$(3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \underbrace{\int_{-\infty}^c f(u) du}_{(2)} + \underbrace{\int_c^{+\infty} f(u) du}_{(1)}$$