

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد الصديق بن يحيى جيجل

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifiques
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Génie Civil et
Hydraulique

Filière : Génie Civil

Option : Géotechnique



كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم: الهندسة المدنية

والري

فرع: هندسة مدنية

ميدان: جيوتقني

Cours de la Matière :

Géostatistique

Master II Géotechnique

Préparé par :

Dr. Djamel DJEGHADER

Semestre:3
Unité d'enseignement: UEF 2.1.1
Matière: Géostatistique
VHS:45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)
Crédits:4
Coefficient:2

Objectifs de l'enseignement:

Ce cours a pour objet d'initier l'étudiant aux notions théoriques du calcul statistique appliqué à la géotechnique.

Connaissances préalables recommandées:

Statistique, Mécanique des sols.

Contenu de la matière:

Chapitre 1.	Bases théoriques de la géostatistique (Fonctions aléatoires, stationnarité, covariance, ajustement d'une fonction de structure théorique)	(3 Semaines)
Chapitre 2.	Analyse du variogramme	(4 Semaines)
Chapitre 3.	Théorie du krigeage	(4 Semaines)
Chapitre 4.	Logicielset applications	(4 Semaines)

Mode d'évaluation:

Contrôle continu: 40%; Examen: 60%

Références bibliographiques:

1. J.P.Chilès, P. Delfiner. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Second Edition. Ed. Wiley, 2012.
2. C. Lantuéjoul. *Geostatistical simulation: Models and Algorithms*. Ed. Springer, 2002.
3. H. Wackernagel. *Multivariate geostatistics: an introduction with applications*. Ed. Springer, 2003.
4. R. Webster, M. Olivier. *Geostatistics for environmental scientists. Statistics in Practice*. Ed. Wiley, 2001.
5. N. Cressie. *Statistics for Spatial Data*. Revised Edition. Ed. Wiley, 2015

Sommaire

Chapitre I : Bases théoriques de la géostatistique.....	1
I.1. Introduction.....	1
I.2. Définition de la géostatistique.....	1
I.3. Variable aléatoire et probabilité de distribution.....	1
I.3.1. Variable aléatoire discrète.....	2
I.3.2. Variable aléatoire continue.....	2
I.3.4. Probabilité de distribution.....	2
I.4. Rappel statistique.....	2
I.4.1. Espérance mathématique.....	2
I.4.2. Variance.....	3
I.4.3. Ecart type	3
I.4.4. Covariance.....	3
I.4.5. Le mode.....	4
I.4.6. La médiane.....	4
I.5. Inférence statistique, Stationnarité et hypothèse intrinsèque.....	5
I.5.1. Stationnarité au sens strict (d'ordre 1).....	5
I.5.2. Stationnarité au sens large (d'ordre 2).....	5
I.5.3. Hypothèse intrinsèque.....	6
I.6. Exemples d'application.....	7
Chapitre II : Analyse du variogramme.....	9
II.1. Introduction.....	9
II.2. Définition de variogramme.....	9
II.3. Propriété d'un variogramme	10
II.3.1. Portée a	10
II.3.2. Palier	11
II.3.3. Effet de pépite.....	11
II.4. Les variogrammes usuels.....	11
II.5. Les anisotropies.....	15
II.5.1. Anisotropie géométrique.....	15
II.5.2. Anisotropie zonale	15
II.6. Exemples d'application.....	16
Chapitre III : Théorie du Krigage.....	18
III.1. Introduction.....	18
III.2. Définition du Krigage	18
III.3. Objectif du Krigage.....	19

Sommaire

III.4. Type de Krigeage.....	19
III.4.1 Krigeage simple.....	19
III.4.2. Krigeage ordinaire	20
III.5. Quelques cas de krigeage.....	21
III.5.1. Estimation d'un point par un autre point situé à une distance " h ".....	21
III.5.2. Estimation d'un bloc " v " par un point situé en " x_1 ".....	21
III.5.3. Estimation d'un point situé en x_0 par deux points situés en " x_1 " et " x_2 ".....	21
III.5.4. Estimation d'un point par " n " points en présence d'un variogramme effet de pépité pur.	22
III.6. Lien entre krigeage simple et krigeage ordinaire.....	22
III.7. Remarque	22
III. 8. Exemples d'application.....	23
Chapitre IV : Logiciels et applications.....	25
IV.1. Introduction.....	25
IV.2.Quelques logiciels utilisés dans l'analyse géostatistique.....	25
IV.2.1.Logiciel GS+	25
IV.2.1.1 Définition de logiciel GS+	25
IV.2.1.2. Manuelle d'utilisation de logiciel GS+	26
IV.2.2. Logiciel VESPER.....	33
IV. 2.2.1. Définition de logiciel VESPER.....	33
IV.2.2.2. Manuelle d'utilisation de logiciel VESPER	34
Références bibliographiques	41

Chapitre I : Bases théoriques de la géostatistique

I. 1. Introduction

Dans les années 50 les ingénieurs faisaient des calculs pour évaluer la nature géologique, géotechnique et hydrologique à partir d'un petit nombre de sondages prélevés en des sites irrégulièrement répartis dans le domaine d'étude. Dans ce contexte, la quantité d'intérêt (la réserve totale disponible) était inconnue et traitée comme une variable aléatoire. Mais il était impossible d'assimiler les valeurs mesurées aux différents sites sondés à des réalisations de variables aléatoires indépendantes. En effet si on suppose une indépendance statistique entre les mesures réalisées entre différents points, la meilleure prédiction que l'on peut faire de la valeur en un site non informé (où l'on n'a pas réalisé de sondage) est d'attribuer la moyenne de l'échantillon. On sait bien que cette solution a quelque chose de sous optimal, en particulier il semble souhaitable d'utiliser une méthode qui donne plus de poids aux sites proches qu'aux autres points de mesure. Quand les mesures sont réalisées dans des sites irrégulièrement espacés choisis par l'expérimentateur (on dit alors que la position des sites est non informative), on se trouve exactement dans la situation du problème d'évaluation, qui a donné lieu à de nombreux développements méthodologiques (**la Géostatistique**).

I.2. Définition de la géostatistique

La géostatistique ou théorie des variables régionalisées a pour objet d'étudier les **fonctions aléatoires**. Elle permet de traiter des mesures de caractéristiques physiques, chimiques ou morphologiques du sol effectuées à partir d'un échantillonnage fixé en général à priori. Les variables régionalisées permettent de quantifier un phénomène à caractère aléatoire manifestant une structure de variabilité spatiale par exemple les paramètres géotechniques et le tassement [1].

L'application correcte des concepts de la géostatistique dépend des personnes directement concernées par chaque domaine. Par exemple, dans l'hydrogéologie, les conclusions adéquates d'une analyse de variabilité spatiale seront atteintes seulement s'il existe une collaboration étroite avec l'hydrogéologue, ou mieux encore si l'analyse est réalisée par l'hydrogéologue lui-même. Ceci souligne la nature instrumentale de la géostatistique.

I.3. Variable aléatoire et probabilité de distribution

Une valeur aléatoire est une variable qui prend un certain nombre de valeurs numériques conformément à une certaine distribution de probabilité. Les résultats possibles sont connus, mais le résultat final ne peut être déterminé, à priori, avant d'effectuer la mesure.

Cette définition d'une fonction aléatoire exprime les aspects aléatoire d'une valeur aléatoire [2] (Exemple: teneur en eau dans une carotte, le pourcentage des fines dans un échantillon).

I.3.1. Variable aléatoire discrète :

Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle donné (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération sont de types discrets.

I.3.2. Variable aléatoire continue :

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu.

La loi de probabilité pour une variable aléatoire continue associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies dans un intervalle donné. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'événement est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur [3].

I.3.4. Probabilité de distribution :

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de la variable aléatoire.

La fonction qui décrit ces probabilités est la fonction de densité de probabilité ou densité de probabilité [4].

La probabilité :

$$P(X) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} \quad (1)$$

- Toute probabilité d'une fonction aléatoire doit être positive $f_X(x) > 0$,
- L'intégrale de la fonction de densité donne une valeur de 1 : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
- La probabilité que x prenne une valeur comprise entre $[a \text{ et } b]$: $\int_a^b f_X(x) dx = P(a \leq X \leq b)$

I.4. Rappel statistique

I.4.1. Espérance mathématique

La moyenne est la caractéristique la plus importante d'une variable aléatoire, car elle nous indique sa tendance centrale.

Soit X une variable aléatoire avec la fonction de densité de probabilité $f(x)$. La valeur moyenne ou attendue de X , notée m_x , est définie par :

$$m_x = E[X] = \sum_x x f(x) , \quad \text{si } X \text{ est discrète} \quad (2)$$

Soit : $E(X) = x_1 * P(X = x_1) + x_2 * P(X = x_2) + \dots + x_n * P(X = x_n)$

$$m_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad \text{si } X \text{ est continue} \quad (3)$$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est définie comme étant la valeur de cette variable pondérée par sa probabilité.

I.4.2. Variance :

Il est souvent intéressant de savoir si les valeurs sont très dispersées ou si elles sont proches de la moyenne $E(X)$. On est tentés de calculer la moyenne des valeurs de $x_i - E(X)$, de la même façon qu'on calcule la moyenne des valeurs, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^N (x_i - E(X)) P_{(X=x_i)} \quad (4)$$

Les valeurs de $(x_i - E(X))$ peuvent être négatives ou positives, donc cette moyenne peut prendre une valeur nulle même les valeurs sont très dispersées. La solution est de calculer la moyenne des $(x_i - E(X))^2$, qui sont toujours positives :

La Variance est $V(X)$ ou $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^N (X_i - E(X))^2 P_{(i)}$. On peut voir que c'est aussi la différence entre la moyenne des carrés des valeurs et le carré de la moyenne des valeurs :

$$V(x) = [X_i^2 P_i - E(X)^2] \quad (5)$$

I.4.3. Ecart type :

L'écart-type (σ) sert à mesurer la dispersion, ou l'étalement, d'un ensemble de valeurs autour de leur moyenne. Plus l'écart-type est faible, plus le résultat est homogène.

σ , est la racine carrée de la Variance:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \quad (6)$$

I.4.4. Covariance:

La covariance. Il est montré que si deux valeurs aléatoires $Z(x)$ et $Z(y)$ ont des variances aux points x_i et y_i alors elles possèdent une covariance qui est fonction de x_i et y_i ; elle est écrite.

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}, \quad (7)$$

$$\text{Ou } \text{Cov}(x, y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} \quad (8)$$

\bar{x} : la moyenne des x_i , \bar{y} : la moyenne des y_i

I.4.5. Le mode

Il correspond au sommet de la distribution: **Le mode est la valeur la plus fréquente**

On appelle distribution unimodale, une distribution présentant un seul mode (Figure I.1)

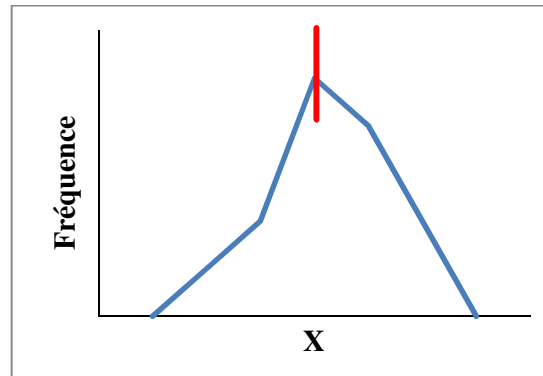


Figure I.1. Distribution unimodale

Une distribution bimodale est une distribution présentant deux modes (Figure. I.2)

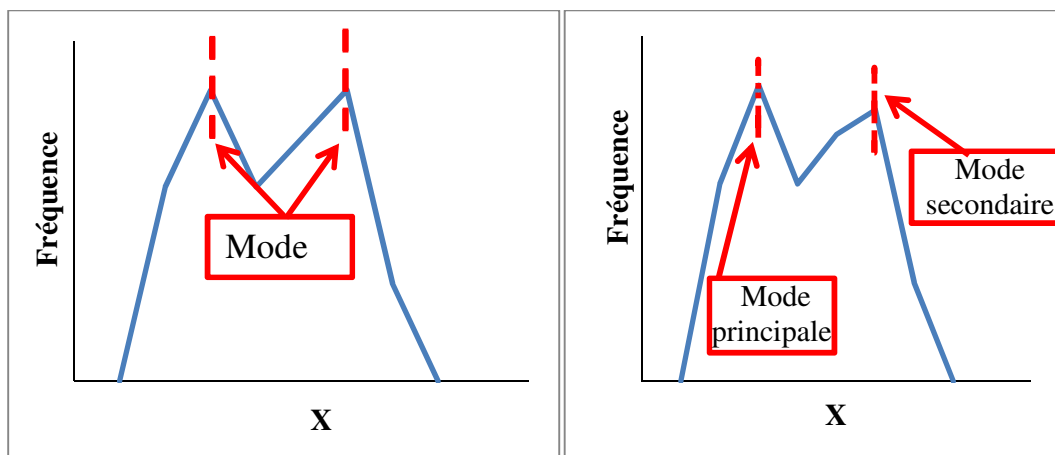


Figure. I.2. Distribution bimodale

Une distribution multimodale est une distribution présentant plusieurs modes (2,3,...). Elle est souvent le reflet d'une population composée de plusieurs sous-populations distinctes.

I.4.6. La médiane

La médiane est la valeur pour laquelle il y a autant d'individus à gauche qu'à droite dans l'échantillon (elle correspond au milieu de la distribution)

Pour déterminer la médiane d'un échantillon ou d'une population :

1. On classe les individus par ordre croissant
2. On prend celui du milieu

En règle générale, si n est le nombre d'individus dans l'échantillon, la médiane porte le numéro d'ordre $\frac{n+1}{2}$ dans la suite des individus classés par ordre croissant.

Lorsqu'on obtient un numéro demi-entier (ex : 24,5), on calcule la moyenne des deux valeurs adjacentes.

- **Calcul de la médiane pour les grands échantillons répartis en classes**

1. Déterminez le numéro d'ordre de la médiane.
2. Déterminez dans quelle classe elle se situe à l'aide du tableau des nombres cumulés (total des individus de cette classe et des précédentes).
3. Rangez par ordre croissant les éléments (individus) de cette classe.
4. Sélectionnez l'élément (individu) correspondant au numéro choisi.

I.5. Inférence statistique, Stationnarité et hypothèse intrinsèque :

L'interprétation probabiliste de $z(x)$ comme une réalisation particulière de la fonction aléatoire, $Z(x)$ n'est utilisable que si l'on connaît la loi de probabilité et les caractéristiques (moyenne et variance) de la fonction aléatoire $Z(x)$. Or, comment inférer la loi de probabilité de $Z(x)$, n'en connaissant qu'une réalisation $z(x)$? Plusieurs réalisations de $z(x)$ seraient alors requises : $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$. De même, comment inférer la loi de la fonction aléatoire $Z(x)$ ne connaissant qu'un nombre limité de réalisations uniques $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)$. D'autres hypothèses sont alors nécessaires [5].

I.5.1. Stationnarité au sens strict (d'ordre 1)

Une fonction aléatoire est stationnaire, au sens strict (d'ordre 1) si la loi spatiale est invariante par translation. Dans ce cas les deux variables aléatoires vectorielles à k composants $\{Z(x_1), \dots, Z(x_k)\}$ et $\{Z(x_1 + h), \dots, Z(x_k + h)\}$ présentent la même loi de distribution à k variables, quel que soit le vecteur translation h .

Cette hypothèse permet de résoudre le problème posé par l'inférence statistique, car à partir d'une réalisation on peut obtenir plusieurs.

En effet, une réalisation de la variable aléatoire vectorielle $\{T(x_1), \dots, T(x_n)\}$ est fournie par les valeurs du paramètre données par les sondages réalisés en x_1, x_2, \dots, x_n . Mais les valeurs données par les sondages implantés aux points : $x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h$ constituent également une réalisation de la variable vectorielle et ceci pour toute valeur de h . Mais ceci est rare en géotechnique. En pratique les lois de variation des paramètres changent fréquemment d'un point à un autre [6].

I.5.2. Stationnarité au sens large (d'ordre 2)

C'est l'hypothèse la plus courante. On dit que la fonction aléatoire $Z(x)$ est stationnaire au sens large si :

- La moyenne est constante : $E\{Z(x)\} = m = \text{constante}$, donc, l'espérance de $Z(x)$ ne dépend pas du point d'appui x ,
- Pour tout couple $\{Z(x), Z(x+h)\}$, la covariance existe, et ne dépend que de la distance h ($h = |x - (x+h)|$).

$$C(h) = E\{[Z(x) - m][Z(x+h) - m]\} = E\{Z(x), Z(x+h)\} - m^2, \forall x \quad (9)$$

$Z(x)$ et $Z(x+h)$ sont les valeurs de la variable aléatoire Z aux emplacements x et $x+h$, E indique l'espérance.

Ces deux propriétés impliquent l'existence de la stationnarité de la variance et du variogramme. En effet :

$$\text{Var}(Z(x)) = \text{Var}(Z(x+h)) = E\{[Z(x) - m]^2\} = C(0), \forall x \quad (10)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h)) \quad (11)$$

Cependant, il existe des phénomènes pour lesquels la variance n'existe pas ($C(0)$ est infini) mais l'accroissement $[Z(x) - Z(x+h)]$ a une variance finie. L'hypothèse de stationnarité d'ordre 2 peut alors être encore réduite et restreinte aux seuls accroissements : c'est l'hypothèse intrinsèque qui s'avère suffisante dans la plupart des applications géostatistiques [7].

1.5.3. Hypothèse intrinsèque

La fonction aléatoire $Z(x)$ est intrinsèque si les accroissements $(Z(x) - Z(x+h))$ sont stationnaires d'ordre deux :

- L'espérance des accroissements existe et ne dépend pas de x :

$$E(Z(x) - Z(x+h)) = 0$$

- La variance des accroissements existe et ne dépend que du vecteur h .

La variance des accroissements permet alors de définir la fonction intrinsèque appelée **variogramme** (Equation 11):

Si la fonction aléatoire est stationnaire d'ordre deux, alors :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (12)$$

Sous l'hypothèse intrinsèque, l'inférence statistique du Variogramme est possible à partir des données expérimentales $z(x_i)$. Le Variogramme est l'outil fondamental de la géostatistique : il caractérise les corrélations spatiales qui existent au sein de la structure régionalisée [8].

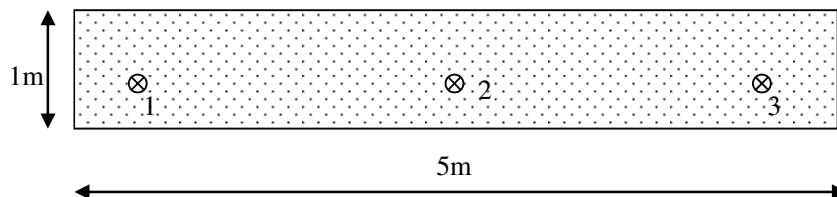
I.6. Exemples d'application :

Exemple 1 :

Un essai de compacité est effectué sur un sol graveleux bien compacté dans le but de mesurer la densité humide du remblai pour une surface de 5 x 1 m (Figure ci-dessous)

L'essai consiste à faire 3 points différents sur toute la surface dont 2 points doivent être \geq à 20 KN/m³ (**R**) sinon (**N**).

1. Trouver les probabilités possibles.
2. Calculer l'espérance mathématique E.
3. Calculer la variance
4. Calculer l'écart type
5. Trouver la probabilité possible pour que les couches du sol soit résistant (**R**).



Exemple 2 :

Soit les résultats obtenus par 15 données de la résistance à la pointe d'un essai pénétrométrique.

Q _d (MPa)	1,45	1,33	3,45	4,67	6,56	3,03	6,17	2,34	3,77	4,45	2,56	5,2	6,05	3,25	2,98
----------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-----	------	------	------

1. Donner le nombre des données selon les classes suivantes : 0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6 - 7 (MPa)
2. Trouver la médiane de l'ensemble des données par classe
3. Trouver la moyenne des données par classe.
4. Tracer l'histogramme des classes en fonction de **nombre** des données (Fréquence)
5. Tracer l'histogramme des classes en fonction de **nombre cumulé** des données (Fréquence cumulée).

Solution

Exemple 1 :

1. Probabilités possibles = $(R, N)^3 = 8$
2. Espérance mathématique E = 1,5
3. Variance = 0,75
4. Ecart type = 0,87
5. La probabilité possible pour le sol soit résiste est : 0,5.

Exemple 2

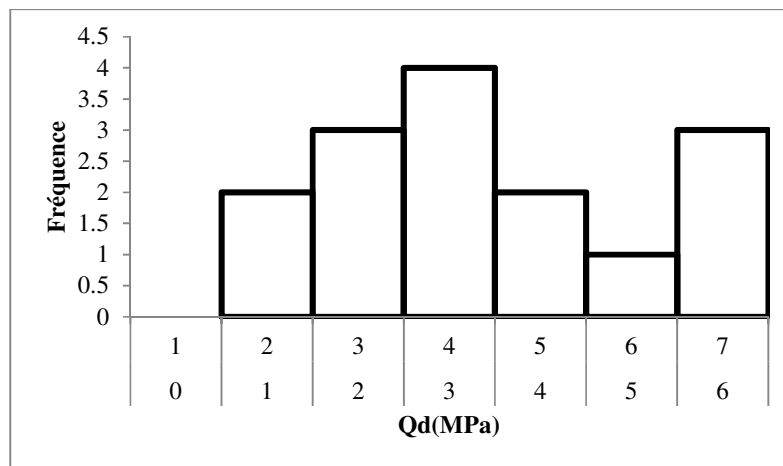
1. Nombre des données selon classes :

Classe	Nombre des données (Fréquence)	Nombre des données cumulées (Fréquence cumulée)	Moyenne de la Classe
0- 1	0	0	0.5
1- 2	2	2	1.5
2- 3	3	5	2.5
3- 4	4	9	3.5
4- 5	2	11	4.5
5- 6	1	12	5.5
6- 7	3	15	6.5

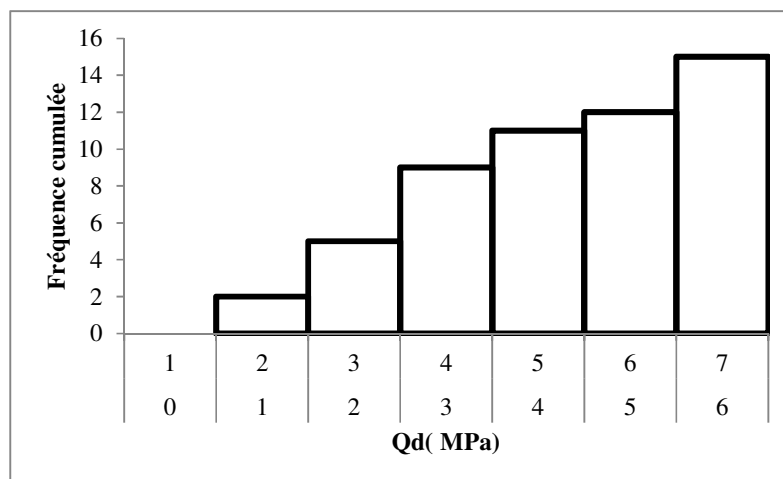
2. La médiane est : 3.45MPa

3. 3. Moyenne : 3.9MPa

4. Histogramme des classes en fonction de **nombre** des données (Fréquence)



5. Histogramme des classes en fonction de **nombre cumulé** des données (Fréquence cumulée).



Chapitre II : Analyse du variogramme

II.1. Introduction :

Lorsqu'on mesure une caractéristique en un point, on peut considérer la valeur obtenue comme la réalisation d'une variable aléatoire en ce point. Il en est de même pour tous les points d'un site donné. On a donc un grand nombre (ou une infinité) de variables aléatoires représentant conjointement un site. La géostatistique adopte ce point de vue et considère la distribution conjointe de toutes ces variables aléatoires.

La géostatistique utilise comme modèles de super-populations des fonctions aléatoires dont la structure d'auto-corrélation spatiale est résumée sous la forme de fonctions structurales. Ces fonctions structurales diffèrent selon la classe de la fonction aléatoire. Le variogramme utilisé comme outil géostatistique d'analyse de la corrélation spatiale.

II.2. Définition :

Le variogramme est un temps appelé fonction de dispersion intrinsèque, il décrit directement la structure spatiale (contrairement à la covariance), indépendamment des moyennes et des problèmes posés par l'estimation de ces moyennes. Le modèle de la fonction aléatoire dite intrinsèque est précisément caractérisé par ce seul variogramme [1].

Les corrélations spatiales d'une fonction aléatoire intrinsèque sont caractérisées par la fonction de semi-variogramme qui définie comme :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}[Z(x+h) - Z(x)] \quad (13)$$

Comme on a supposé que la moyenne de $Z(x+h) - Z(x)$ est nulle, $\gamma(h)$ est juste la moitié de la valeur quadratique moyenne de la différence. C'est:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[Z(x+h) - Z(x)]^2 \quad (14)$$

Le variogramme est estimé par le variogramme expérimental $\gamma^*(h)$, qui est calculé à partir des données expérimentales :

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [Z(x_i+h) - Z(x_i)]^2 \quad (15)$$

ou N est le nombre de couples de données distantes de h.

Quand la covariance $C(h) = E\{Z(x), Z(x+h)\} - m^2$, existe alors :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (16)$$

Dans le cas discret. = Nombre de paires

(x) et $(x + h)$ désignent des points dans l'espace à trois dimensions. Pour un angle fixe, le variogramme donne des valeurs différentes à mesure que la distance augmente. Lorsque l'angle est changé, le variogramme révèle les caractéristiques directionnelles, le cas échéant, du phénomène, telles que son anisotropie. Arithmétiquement, le variogramme est simple à comprendre. Les différences entre, disons, les valeurs de dosage dérivées des échantillons de roche et séparées par la distance « h » (décalage k) sont au carré et divisées par deux fois le nombre de différences (paires) trouvées. Il peut être décrit comme suit [9]:

- Il commence à 0 [pour $h = 0, Z(x + h) = Z(x)$]
- Il augmente généralement avec h .
- Il s'élève jusqu'à un certain niveau appelé le seuil, puis s'aplatit dans certains cas pour créer un palier (Figure II.1.A). Dans d'autres cas, il pourrait même continuer à augmenter (Figure II.1.B). Lorsque le variogramme n'est pas borné, la moyenne et la variance ne sont pas définies : cela indique le plus souvent une tendance à grande échelle

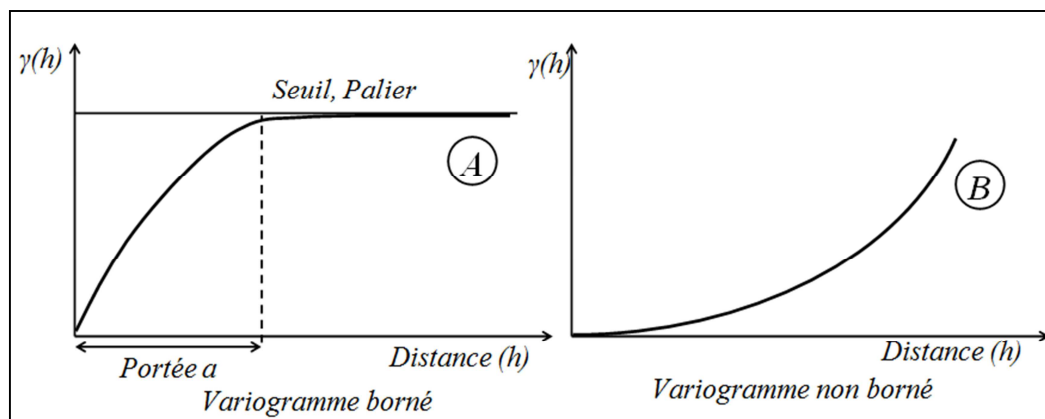


Figure II.1. Exemple type d'un variogramme

II.3. Propriété d'un Variogramme :

II.3.1. Portée a :

Dans la plupart des cas, le variogramme atteint un palier; les structures qui engendrent des variogrammes à palier sont parfois appelées phénomènes de transition. La distance à partir de laquelle le palier est atteint est appelée « portée du variogramme », elle est notée a (Figure II.1).

La portée correspond à la notion physique de la zone d'influence des échantillons :

- Pour les distances $h < a$ les échantillons sont corrélés ;
- Pour $h > a$ les échantillons ne le sont plus corrélés.

II.3.2. Palier

Pour les variogrammes qui atteignent un palier pour $h > a$, on peut démontrer que ce palier $\gamma(\infty)$ est la variance a priori de la fonction aléatoire $Z(x)$ [9] :

$$\gamma(\infty) = \text{Var}(Z(x)) = C(0) \quad (17)$$

Si la portée du variogramme est petite par rapport au domaine, de nombreux écarts auront une valeur proche du palier du variogramme : la variance expérimentale est alors pratiquement égale au palier. Dans le cas contraire, de nombreux écarts sont inférieurs au palier du variogramme expérimental, la variance expérimentale est alors inférieure au palier.

$$\gamma(h) = \sigma^2 - C(h) \quad (18)$$

$C(h)$ est appelé le covariogramme de Z . Cette relation est importante et elle est continuellement utilisée pour les variogrammes avec palier.

II.3.3. Effet de pépité :

Lorsqu'aux petites distances pour h décroissant vers 0, $\gamma(h)$ tend vers une valeur C_0 non nulle, il y a une discontinuité apparente à l'origine, appelée « effet de pépité » (Figure II.2). Cette discontinuité peut avoir deux causes [10] :

- Existence de microstructures, inaccessibles à l'échelle des observations
- Existence d'erreurs de mesures (erreurs d'analyse et d'échantillonnage).

Le cas extrême est l'effet de pépité pur : pour tout h , $\gamma(h) = C_0$ avec par définition $\gamma(0)=0$. Il caractérise alors une absence totale de corrélation entre échantillons.

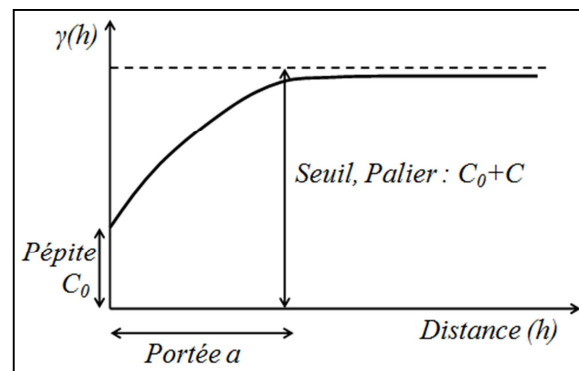


Figure II.2. Schéma type d'un variogramme avec la présence de l'effet pépité.

II.4. Les variogrammes usuels :

La littérature géostatistique propose de nombreuses fonctions qui satisfont les propriétés du variogramme tel qu'il est présenté dans la Figure II.3. Ces fonctions paramétrées doivent permettre de décrire les différentes composantes (portée, palier, pépité). Elles doivent aussi

gérer le comportement de la fonction à l'origine (tendance linéaire, tangence horizontale ou verticale) [2].

Les modèles les plus courants sont [11]:

$$\text{Effet de pépite: } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 & \text{Si } h > 0 \end{cases} \quad \text{Figure II.3. (a)}$$

$$\text{Sphérique : } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 + C \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] & \text{Si } 0 < h \leq a \\ C_0 + C & \text{Si } h > a \end{cases} \quad \text{Figure II.3. (b)}$$

$$\text{Exponentiel : } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 + C \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{h}{a} \right) \right) \right] & \text{Si } h > 0 \end{cases} \quad \text{Figure II.3. (c)}$$

$$\text{Gaussien : } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 + C \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right) \right] & \text{Si } h > 0 \end{cases} \quad \text{Figure II.3. (d)}$$

$$\text{Puissance : } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 + bh^p & \text{Si } h > 0, 0 < b < 2 \text{ (linéaire : } b=1) \end{cases} \quad \text{Figure II.3. (e)}$$

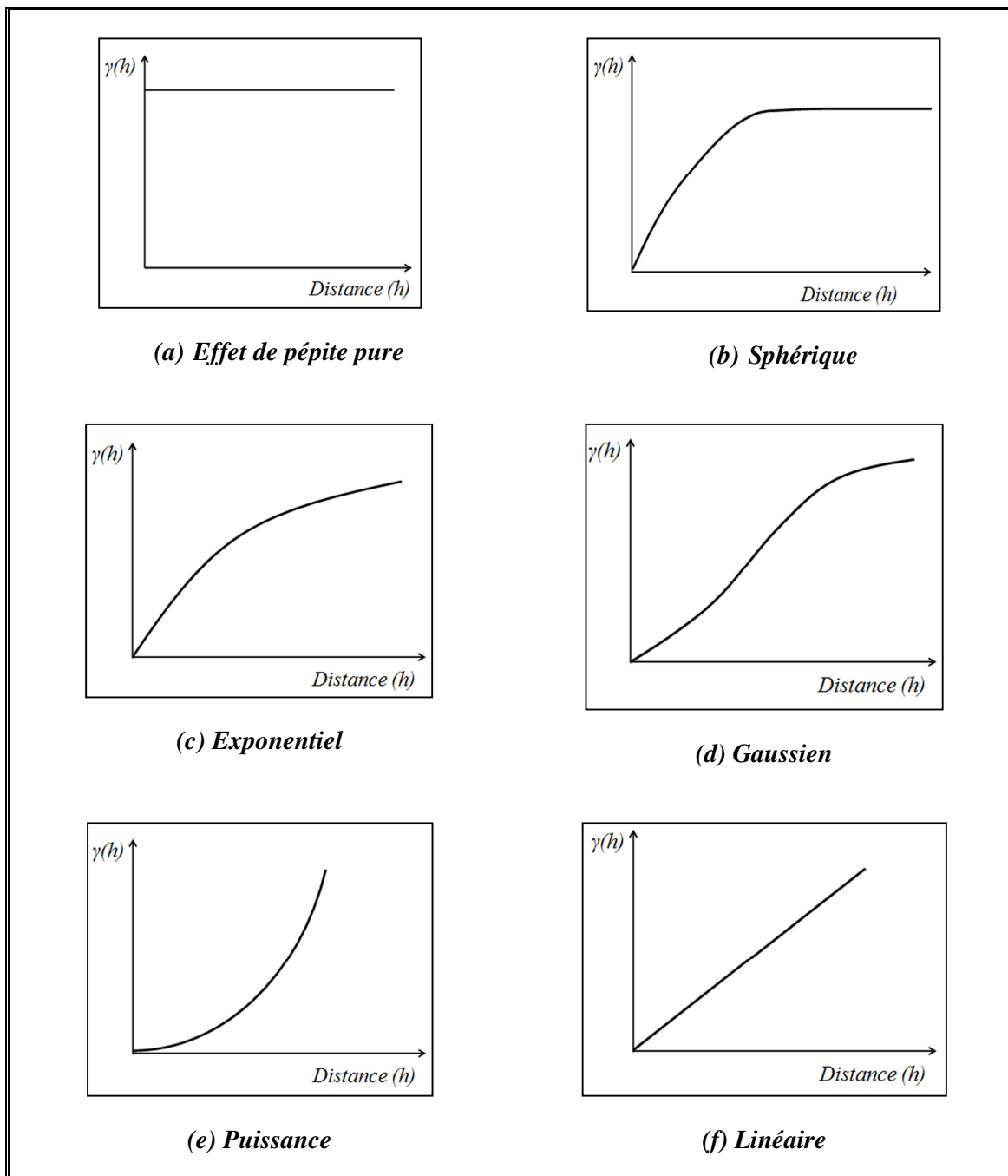


Figure. II.3. Allure des variogrammes usuels.

On peut combiner plusieurs modèles en les additionnant. Ainsi, l'effet de pépite est presque toujours présent en association avec un ou plusieurs des autres modèles décrits plus haut. Il est important de noter que ces modèles ne sont pas les seuls que l'on peut utiliser, en réalité, il existe aussi un très grand nombre des modèles de variogramme.

Il y a un lien étroit entre la nature de la variable étudiée et le type de modèle que l'on est susceptible de rencontrer. Ainsi, le modèle gaussien exprime une très grande continuité

typique d'une variable comme la topographie, l'épaisseur d'une formation, le champ gravimétrique, la charge hydraulique. Ce modèle n'est pratiquement jamais rencontré pour des variables comme les propriétés mécaniques des roches, les analyses géochimiques en général. Pour ces variables, les modèles sphériques et exponentiels sont beaucoup plus courants. Pour des variables discrètes, le modèle gaussien est même à proscrire complètement.

Remarque :

1. Parfois les variogrammes ne montrent pas de palier (cas de modèle linéaire). D'autres fois ils ne montrent qu'un palier atteint asymptotiquement (cas des modèles exponentiels et gaussiens). Dans ce dernier cas, l'on définit la portée effective comme la distance où 95% du palier est atteint. Ainsi, pour les modèles exponentiels et gaussiens, la portée effective est "a". Lorsque le variogramme ne montre pas de palier et que sa croissance s'effectue à un taux supérieur à h^2 alors il y a lieu de suspecter une dérive de la moyenne [7].
2. Lorsque les variogrammes montrent un palier alors on peut facilement établir le lien entre la valeur du variogramme pour la distance h et la covariance pour deux observations séparées de h. Lorsqu'il y a un palier, covariogramme et variogramme sont équivalents en ce sens que les deux fonctions fournissent la même information spatiale sur le phénomène étudié [2].
3. Dans l'expression du variogramme, la constante "m" n'apparaît pas. Donc pas besoin de l'estimer comme c'est le cas lorsqu'on veut calculer directement le covariogramme [2].
4. Lorsqu'on suppose que la moyenne et le covariogramme ne dépendent pas des emplacements précis considérés (x), ceci implique une certaine homogénéité du champ étudié. En termes statistiques, on formule une hypothèse dite de *stationnarité du 2e ordre*. Si on suppose plutôt que le variogramme ne dépend pas de l'emplacement x , alors ce cas inclut les cas sans paliers, il est donc légèrement plus général que le précédent. Cette hypothèse est nommée **hypothèse intrinsèque**. Elle est en fait une hypothèse de *stationnarité de 2eme ordre* postulé pour les incréments de Z plutôt que pour Z lui-même. On peut généraliser ce modèle en supposant la *stationnarité d'ordre 2* pour des incréments d'ordre supérieur de Z (dans ce cas, de nouvelles fonctions de structure spatiale, les covariances généralisées, peuvent être utilisées). À l'opposé, des modèles plus restrictifs (stationnarité stricte au niveau uni-variable ou même multi-variable) sont utilisés en géostatistique non-linéaire [2].

II.5. Les anisotropies

La continuité spatiale n'est pas nécessairement la même dans toutes les directions. Les variogrammes calculés le long ces directions seront donc distincts. Il existe deux types d'anisotropies :

II.5.1. Anisotropie géométrique :

Les variogrammes ont le même palier dans toutes les directions, mais des portées différentes d'une direction à l'autre. Une simple transformation linéaire des coordonnées permet alors de se ramener à un cas isotrope [12].

- Les portées maximales (a_g) et minimales (a_p) s'observent selon deux directions orthogonales.
- On peut rendre les portées identiques (et égale à a_g suivant toutes les directions en multipliant la composante de la portée parallèle à a_p par le facteur (a_g/a_p).

Bref, les portées décrivent une ellipse dont l'axe majeur est orienté parallèlement à a_g .

$$\frac{(a_\theta \cos \theta)^2}{a_g^2} + \frac{(a_\theta \sin \theta)^2}{a_p^2} = 1 \quad (19)$$

Connaissant a_g et a_p , on peut trouver a_θ , où θ désigne l'angle mesuré par rapport à la direction où est rencontré a_g .

$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\sqrt{(a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta)}} \quad (20)$$

On peut ainsi évaluer $\gamma(h, \theta)$ soit en utilisant a_θ , soit en corrigeant la distance h pour tenir compte de l'anisotropie:

$$\gamma(h_\theta, \theta) = \gamma(h_g) \text{ suivant la portée } a_g$$

Avec,

$$h_g = \sqrt{(h_\theta \cos \theta)^2 + \left(\frac{a_g}{a_p} h_\theta \sin \theta\right)^2} \quad (21)$$

II.5.2. Anisotropie zonale :

Les variogrammes présentent des paliers et des portées différentes selon les directions le long desquelles ils sont calculés. L'anisotropie zonale peut être modélisée, par exemple, en utilisant des structures gigognes caractérisées par leurs propres variabilités et anisotropies [2].

Le traitement des anisotropies doit conduire en fin de compte à la définition d'un variogramme isotrope [13].

II.6. Exemples d'application

Exemple 1 :

Le tableau ci-dessous présente les résultats de mesure de la capacité portante de deux types de sol pour deux endroits différents. La profondeur de mesure est 10 m sur une longueur totale de 31 m. On demande de :

1. Calculer la moyenne, l'écart type et la variance des deux mesures.
2. Calculer la covariance et le Variogramme de chaque série pour ($h = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ m).
3. Présenter graphiquement la covariance et le Variogramme des deux mesures en fonction de la distance h

Distance (m)	Q1 (MPa)	Q2 (MPa)
1	4	5
2	3	4
3	3	4
4	4	4
5	5	3
6	5	3
7	4	4
8	4	5
9	5	10
10	4	11
11	7	12
12	9	11
13	9	8
14	6	5
15	4	4
16	3	5
17	6	6
18	7	7
19	6	9
20	6	9
21	8	3
22	9	6
23	9	7
24	10	6
25	11	4
26	12	8
27	11	9
28	8	9
29	5	6
30	4	4

Exemple 2 :

Soit les données géotechniques d'un sol modélisé par un modèle sphérique avec anisotropie géométrique. La valeur de $C = 17\%^2$ et effet de pépite $C_0 = 13\%^2$, les portées sont de 100m dans la direction (**convention trigonométrique**) de plus grande continuité (30°) et 60m dans la direction de plus petite continuité (120°). On donne deux observations situées aux coordonnées $(x_1, y_1) = (10, 30)$ et $(x_2, y_2) = (40, 20)$.

1. Calculer la distance séparant les deux points et la direction qu'ils définissent (x_1, y_1) et (x_2, y_2) .
2. Calculer la portée dans cette direction.
3. Calculer la valeur du variogramme.

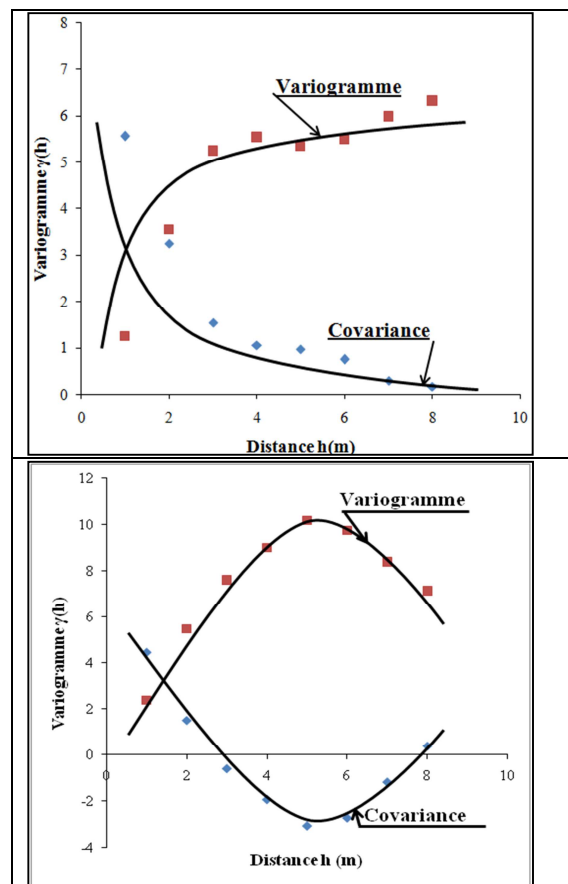
Solution**Exemple 1 :**

1. Moyenne, Ecart type et Variance

	Moyenne	Ecart type	Variance
Q1 (MPa)	6.37	2.65	7
Q2 (MPa)	6.37	2.65	7

2. Covariance et Variogramme de chaque série pour $(h = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ m})$.
3. Présentation graphique

	h(m)	Covariance	Variogramme
Q1 (MPa)	1	5.56	1.24
	2	3.25	3.54
	3	1.54	5.24
	4	1.0518	5.54
	5	0.9648	5.34
	6	0.74	5.48
	7	0.29	5.98
	8	0.16	6.32
Q2 (MPa)	1	4.47	2.4
	2	1.518	5.48
	3	-0.59	7.63
	4	-1.92	0.02
	5	-3.05	10.2
	6	-2.71	9.77
	7	-1	8.4
	8	0.39	7.16

**Exemple 2 :**

1. La distance : $h = 31.62 \text{ m}$
2. La portée $a_0 = 70.81 \text{ m}$
3. Variogramme $\gamma(h) = 23.33\%^2$

Chapitre III : Théorie du Krigeage :

III.1.Introduction :

Les principales grandeurs de la géologie et de la géotechnique sont très variables dans l'espace, leur variabilité spatiale n'est pas purement aléatoire, les mesures effectuées en deux points différents ont d'autant plus de chance d'être semblables que ces points sont plus rapprochés. Les variables non stationnaires dont la structure spatiale présente des tendances bien marquées dans certaines directions, par contre, les variables stationnaires pour lesquelles ils n'existent a priori pas de telles tendances régulières.

L'approche de la géostatistique a pour premier objet l'estimation des variables régionalisées, comment estimer la valeur de la variable à partir d'observations faites sur un ensemble nécessairement limité de points de mesures.

III.2.Définition du Krigeage:

Le krigeage est une méthode d'estimation applicable aussi bien aux variables stationnaires que non stationnaires. La méthode est qualifiée d'optimale, car moyennant certaines hypothèses, elle fournit un estimateur [2] :

- Sans biais,
- L'erreur quadratique moyenne minimale (c'est-à-dire de variance minimum).

Outre les problèmes d'interpolation, le krigeage peut également :

- Servir à évaluer des valeurs moyennes sur des blocs donnés : sous- ensemble du domaine d'étude, maille d'un modèle mathématique...
- Déterminer le nombre optimum de points d'observation d'un réseau de mesures, ainsi que l'emplacement le plus approprié de ces points, de façon à minimiser les investissements à réaliser pour une précision attendue.

Le krigeage est une méthode élaborée dans un cadre probabiliste (celui de la théorie des fonctions aléatoires). Le développement des calculs d'estimation nécessite en effet des hypothèses sur la structure du champ des variables et ces hypothèses doivent permettre de résoudre les problèmes d'inférence statistique des grandeurs qui interviennent dans les calculs, en particulier le variogramme et la covariance généralisée porteurs de l'information structurale sur le champ des valeurs [5].

La mise en œuvre du krigeage s'effectue en suivant certaines étapes :

- La première étape consiste en l'analyse variographique de la variable étudiée.
- Puis un modèle de variogramme s'ajustant au variogramme expérimental est trouvé et validé par une validation croisée. Cette étape permet de comparer la performance de

- différents modèles afin de sélectionner celui susceptible de mener aux meilleures prévisions.
- Finalement, l'interpolation est effectuée par krigage.

III.3. Objectif du Krigage

L'idée de base du krigage est de prévoir la valeur de la variable régionalisée étudiée en un site non échantillonné par une combinaison linéaire de données ponctuelles adjacentes. Le problème qui se pose très souvent dans les questions environnementales et celui de l'estimation d'une valeur non mesurée : à partir d'un échantillon z_1, \dots, z_n , comment évaluer la valeur qu'on aurait trouvée au site s_0 si on l'avait mesurée [2].

III.4. Type de Krigage :

Lorsque le bon modèle de variogramme est utilisé et que les hypothèses de stationnarité sont réalistes, le krigage est en moyenne au moins aussi juste que tous les autres estimateurs linéaires. Deux types de krigage sont décrits ci-après, le krigage simple et le krigage ordinaire.

III.4.1 Krigage simple

L'estimateur par krigage simple suppose la valeur moyenne d'un ensemble des données m ($E[Z] = m$) connues. La valeur estimée Z_v^* est obtenue par l'équation suivante [9]:

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i + (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) m, \quad \forall i = \{1 \dots n\} \quad (22)$$

où Z_i désignent les valeurs aléatoires correspondant aux points échantillons, λ_i est le poids de Krigage.

L'estimateur Z_v^* est construit de façon à être sans biais et à minimiser la variance d'estimation $\text{Var}[Z_v - Z_v^*]$, Z_v étant la vraie valeur du bloc. Ainsi, les paramètres λ_i sont obtenus en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min Var}[Z_v - Z_v^*] = \text{Var}[Z_v] + \text{Var}[Z_v^*] - 2\text{Cov}[Z_v, Z_v^*] \quad (23)$$

$$\text{Où } \text{Var}[Z_v^*] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] \quad (24)$$

$$\text{Cov}[Z_v, Z_v^*] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad (25)$$

Ce problème d'optimisation convexe sans contrainte peut être résolu en calculant les zéros des dérivées partielles par rapport à λ_i .

Le système de krigage simple obtenu est le suivant :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_i, Z_j] = \text{Cov}[Z_v, Z_j], \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (26)$$

La variance d'estimation minimale, nommée variance de krigage simple, est :

$$\sigma_{KS}^2 = Var[Z_v] - \sum_{i=1}^n \lambda_i Cov[Z_v, Z_i] \quad (27)$$

Le krigeage simple nécessite la stationnarité de la fonction aléatoire. Ainsi, il n'est pas possible d'effectuer un krigeage simple si le variogramme ne présente pas de palier.

Le système de krigeage simple (KS) ne peut s'écrire directement en termes de variogrammes puisqu'on n'a pas la condition : $\sum \lambda_i = 1$.

III.4.2. Krigeage ordinaire

Dans la majorité des cas, la valeur moyenne des données est inconnue; la définition de l'estimateur diffère alors du krigeage simple. Afin que la moyenne soit exclue du calcul de l'estimateur, une condition est nécessaire pour assurer que l'estimateur soit sans biais [10]:

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i + (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) m, \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (28)$$

$$\text{D'où } Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$$

Les poids de krigeage λ_i sont obtenus en résolvant le problème d'optimisation suivant les équations précédentes (23) (24) et (25) avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$:

Ce problème d'optimisation convexe sous contrainte d'égalité peut être résolu par le Lagrangien :

$$L(\lambda) = Var[Z_v - Z_v^*] + 2\mu(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1) \quad (29)$$

Où μ est le multiplicateur de Lagrange. Le minimum est atteint lorsque toutes les dérivées partielles par rapport à chacun des λ_i et par rapport à μ s'annulent. Ceci conduit au système de krigeage ordinaire:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Cov[Z_i, Z_j] + \mu = Cov[Z_v, Z_i], \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

La variance d'estimation minimale, nommée variance de krigeage ordinaire, est :

$$\sigma_{KO}^2 = Var[Z_v] - \sum_{i=1}^n \lambda_i Cov[Z_v, Z_i] - \mu \quad (30)$$

La variance de krigeage ordinaire ne dépend pas des valeurs observées, elle ne dépend que du variogramme et de la configuration des points servant à l'estimation par rapport au point (ou bloc) à estimer [13].

Il est intéressant de visualiser le système de krigeage ordinaire et la variance de krigeage ordinaire sous forme matricielle:

$$K_0 \lambda_0 = k_0 \quad (31)$$

$$\sigma_{k_0}^2 = \sigma_v^2 - \lambda_0' k_0 \quad (32)$$

$$K_o = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \text{Cov}(Z_1, Z_2) & \bullet & \text{Cov}(Z_1, Z_n) & 1 \\ \text{Cov}(Z_2, Z_1) & \sigma^2 & \bullet & \text{Cov}(Z_2, Z_n) & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{Cov}(Z_n, Z_1) & \text{Cov}(Z_n, Z_2) & \bullet & \sigma^2 & 1 \\ 1 & 1 & \bullet & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_o = \begin{bmatrix} \text{Cov}(Z_1, Z_v) \\ \text{Cov}(Z_2, Z_v) \\ \bullet \\ \text{Cov}(Z_n, Z_v) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_o = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \bullet \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \sigma_v^2 = \bar{C}(v, v)$$

III.5. Quelques cas de krigeage [2]

Ces quelques cas sont présentés dans le seul but d'acquérir une certaine intuition du comportement du krigeage. On suppose un variogramme sphérique de portée finie " a ".

III.5.1. Estimation d'un point par un autre point situé à une distance " h "

Krigeage ordinaire	$\lambda_1 = 1, \sigma_{k_0}^2 = 2(\sigma^2 - C(h)) = 2\gamma(h)$	Si $h > a, \sigma_{k_0}^2 = 2\sigma^2$
Krigeage simple	$\lambda_1 = \frac{C(h)}{\sigma^2}, \sigma_{k_s}^2 = \sigma^2 - \frac{C(h)^2}{\sigma^2}$	Si $h > a, \sigma_{k_s}^2 = \sigma^2$

III.5.2. Estimation d'un bloc " v " par un point situé en " x_1 "

Krigeage ordinaire	$\lambda_1 = 1, \sigma_{k_0}^2 = \sigma^2 + \sigma_v^2 - 2\bar{C}(v, x_1)$
Krigeage simple	$\lambda_1 = \frac{\bar{C}(v, x_1)}{\sigma^2}, \sigma_{k_s}^2 = \sigma_v^2 - \frac{\bar{C}(v, x_1)^2}{\sigma^2}$

III.5.3. Estimation d'un point situé en x_0 par deux points situés en " x_1 " et " x_2 "

Krigeage ordinaire	$\lambda_1 = \frac{\sigma^2 + C(x_0, x_1) - C(x_1, x_2) - C(x_0, x_2)}{2(\sigma^2 - C(x_1, x_2))}$ $\lambda_2 = \frac{\sigma^2 + C(x_0, x_2) - C(x_1, x_2) - C(x_0, x_1)}{2(\sigma^2 - C(x_1, x_2))}$
Krigeage simple	$\lambda_1 = \frac{[\sigma^2 * C(x_0, x_1)] - [C(x_1, x_2) * C(x_0, x_2)]}{(\sigma^2)^2 - (C(x_1, x_2))^2}$ $\lambda_2 = \frac{[\sigma^2 * C(x_0, x_2)] - [C(x_1, x_2) * C(x_0, x_1)]}{(\sigma^2)^2 - (C(x_1, x_2))^2}$

Dans les deux cas, les poids peuvent être négatifs dépendant de la position respective des trois points. Dans le cas du krigeage simple, les poids sont nuls si les 2 points sont à une distance de x_0 supérieure à la portée.

III.5.4. Estimation d'un point par "n" points en présence d'un variogramme avec effet de pépite pur.

Krigeage ordinaire	$\lambda_i = \frac{1}{n}, \sigma_{k_0}^2 = \frac{n+1}{n} \sigma^2$
Krigeage simple	$\lambda_i = 0, \sigma_{k_s}^2 = \sigma^2$

III.6. Lien entre krigeage simple et krigeage ordinaire :

On peut démontrer que le krigeage ordinaire d'un point ou d'un bloc à partir de "n" points observations peut se décomposer en deux étapes [7]:

- Estimation de la moyenne "m" (inconnue) du processus par krigeage ordinaire en utilisant les "n" points.
- Estimation du point ou du bloc par krigeage simple en prenant la moyenne estimée par krigeage ordinaire comme une moyenne connue et toujours utilisant les mêmes "n" points.

Soit $\lambda_{m,i}$, μ_m et $\sigma_{K0,m}^2$, les poids de krigeage ordinaire, le multiplicateur de Lagrange et la variance de krigeage ordinaire obtenus pour l'estimation de la moyenne. Soit $\lambda_{0,i}$ et μ les poids et le multiplicateur de Lagrange pour le krigeage ordinaire du point ou bloc, $\lambda_{s,i}$ les poids de krigeage simple et $S_s = (1 - \sum_i \lambda_{s,i})$

Le poids attribué à la moyenne dans le krigeage simple. On a alors les égalités suivantes:

$$\lambda_{0,i} = \lambda_{s,i} + S_s \lambda_{m,i} \quad (33)$$

$$\mu = S_s \mu_m \quad (34)$$

$$\sigma_{K0}^2 = \sigma_{Ks}^2 + S_s^2 \sigma_{K0,m}^2 \quad (35)$$

III.7. Remarque:

- La variance de krigeage simple est toujours inférieure à la variance de krigeage ordinaire, car on n'a pas besoin d'imposer de contrainte sur les poids λ . Toutefois, elle requiert la connaissance de la moyenne "m". De plus, l'hypothèse de stationnarité requise est plus forte que dans le cas du krigeage ordinaire. Dans le cas du krigeage ordinaire, seule l'hypothèse intrinsèque est requise. Dans le cas du krigeage simple, la stationnarité est nécessaire. Ainsi, il n'est pas possible d'effectuer un krigeage simple si le variogramme ne présente pas de palier [1].
- Le système de krigeage simple (KS) ne peut s'écrire directement en termes de variogrammes puisqu'on n'a pas $\sum \lambda_i = 1$.

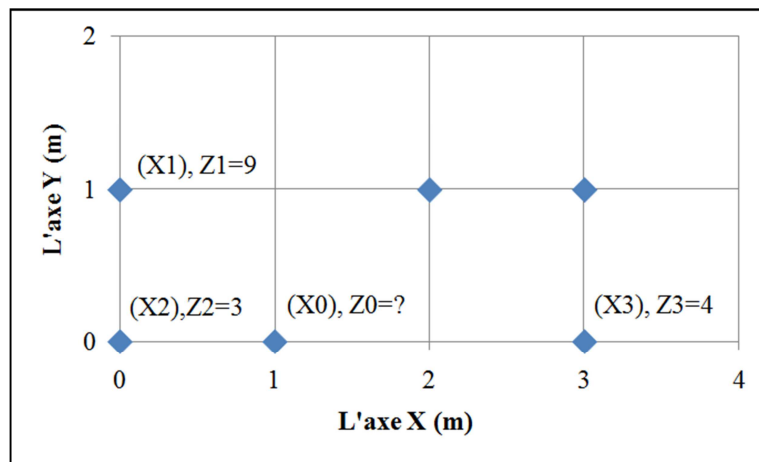
- En termes pratiques, les estimés obtenus par krigeage ordinaire (*KO*) et simple (*KS*) sont très similaires lorsqu'on effectue le krigeage à courte distance par rapport aux points connus et par rapport à la portée du variogramme et que le variogramme montre une structure importante. Lorsqu'on effectue l'estimation à grande distance ou si le variogramme montre un effet de pépité plus important, alors l'estimation *KO* consistera essentiellement en une moyenne des points du voisinage et l'estime *KS* sera simplement la moyenne supposée connue, i.e. "*m*"[14].

III. 8. Exemples d'application

Exemple 1 :

Soit les données d'un Variogramme sphérique $C_0 = 1$, $C = 10$, $a = 3$ de l'ensemble des valeurs X_0, \dots, X_n .

- Estimer la valeur de Z_0 située en point $X_0(1,0)$ en utilisant les données $Z_1=9$, $Z_2=3$, $Z_3=4$



Exemple 2 :

Soit les points $X_0(0,0)$, $X_1(-35,0)$, $X_2(0,20)$, $X_3(10,20)$, $X_4(35,0)$ de mesure de la teneur en Fe dans un site rocheux. On désire effectuer un Krigeage ordinaire au point X_0 . Le Variogramme est sphérique et isotrope. La portée est de 30 m. L'effet de pépité est de $5\%^2$, le « C » du sphérique est de $50\%^2$ (palier total $55\%^2$).

- Fournissez, sous forme matricielle, les équations du krigeage ordinaire du point X_0 avec les points X_1 à X_4 .
- Quelle serait la covariance entre les teneurs aux points X_3 et X_0 si l'on avait plutôt un modèle sphérique anisotrope avec $a_x=30\text{m}$ et $a_y=50\text{m}$ (C_0 et C inchangés) ? .

Solution :

Exemple 1 :

- La valeur estimée de Z_0 est : 8.75

Exemple 2 :

$$1. K_0 \lambda_0 = k_0 = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 55 & 25.92 & 0 & 1 \\ 0 & 25.92 & 55 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 55 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.41 \\ 4.46 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Covariance des teneurs aux points X_3 et X_0 : $C(h) = 14.55\%^2$

Chapitre IV : Logiciels et applications

IV.1.Introduction

L'analyse des données géostatistique nécessite un recours à de gros supports informatiques (logiciel et matériel). Ces outils ne sont pas à la portée de tous et leur emploi peut donc s'avérer assez coûteux et long. La précision numérique offerte par les gros systèmes informatiques dépasse souvent de beaucoup l'exigence de l'utilisateur. En plus, l'informatique permet d'obtenir de façon quasi instantanée des graphiques dont l'élaboration pouvait demander une année ou plus de calcul à la main.

IV.2.Quelques logiciels utilisés dans l'analyse géostatistique

IV.2.1.Logiciel GS+

IV.2.1.1. Définition de logiciel GS+ :

GS+ est un programme d'analyse géostatistique qui permet de mesurer et d'illustrer facilement les relations spatiales des données géoréférencées. GS+ analyse les données spatiales pour l'auto corrélation, puis utilise ces informations pour créer des cartes optimales et statistiquement rigoureuses de la zone échantillonnée. Les cartes peuvent être créées dans GS+ ou dans d'autres programmes de cartographie ou systèmes d'information géographique[15].

Le logiciel GS+ est le plus utilisé dans notre travail.

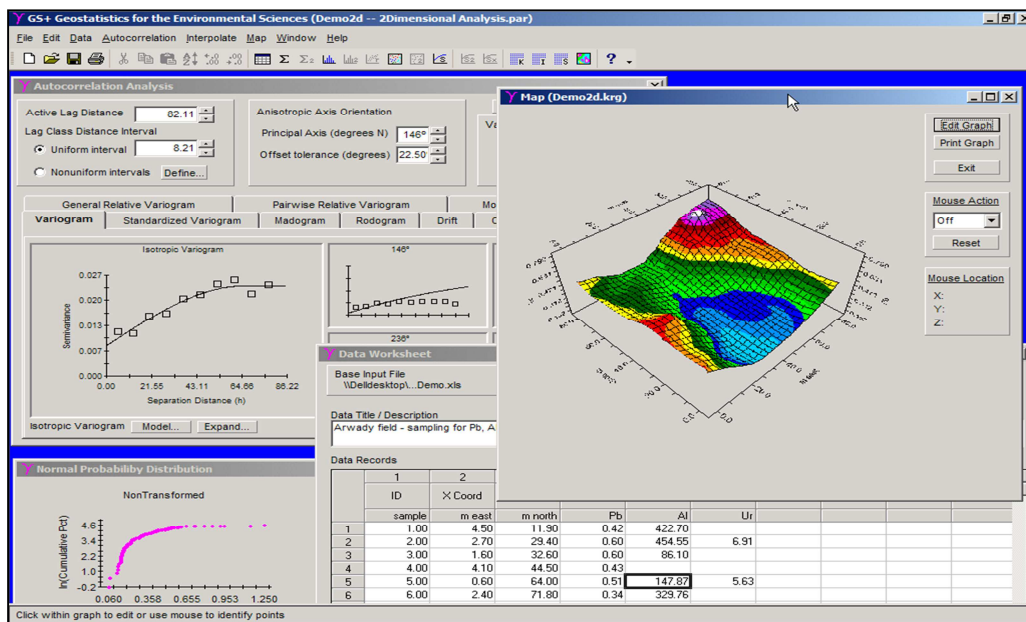


Figure IV.1.Fenêtre de logiciel GS+

IV.2.1.2. Manuelle d'utilisation de logiciel GS+ :[15]

- **Disposition générale de l'écran**

La fenêtre principale de GS+ a un menu de commandes en haut et contient chacune des différentes fenêtres d'analyse actuellement ouvertes. Les fenêtres principales sont:

- La fenêtre de la feuille de données (Data Worksheet)
- La fenêtre de résumé des données (Data Summary)
- La fenêtre d'auto-corrélation (Autocorrelation)
- La fenêtre d'interpolation (Interpolation)
- La fenêtre de la carte (Map)

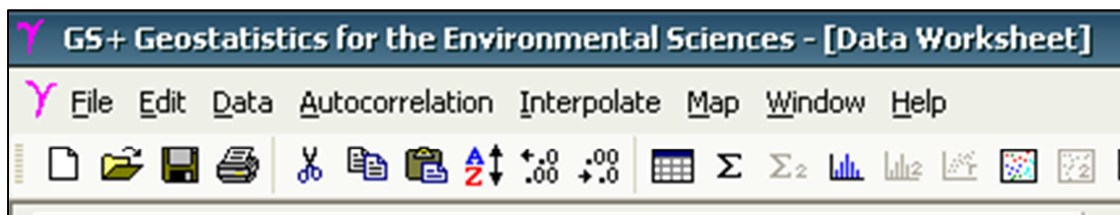


Figure IV.2. Menu Principale de GS+

(a) *Menu Fichier (File)*

Le menu Fichier propose des commandes pour enregistrer et récupérer des fichiers de paramètres GS+, utilisés pour stocker et récupérer des paramètres d'analyse, ainsi que des commandes pour l'impression et la définition des préférences de l'utilisateur.

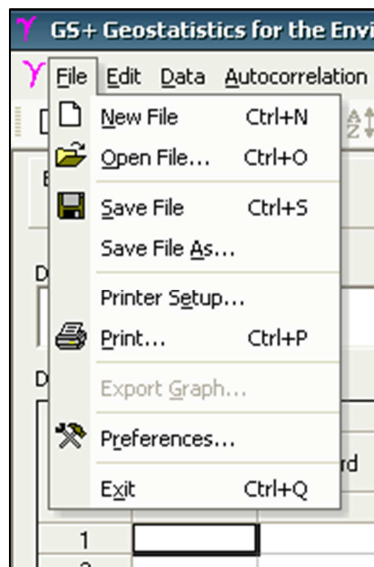


Figure IV.3. Menu Fichier de GS+

(b) Menu d'Édition (Edit)

Le menu Édition permet d'accéder aux commandes d'édition couper-copier-coller-supprimer. Ces commandes sont disponibles chaque fois que le curseur se trouve dans un champ éditable d'une fenêtre particulière.

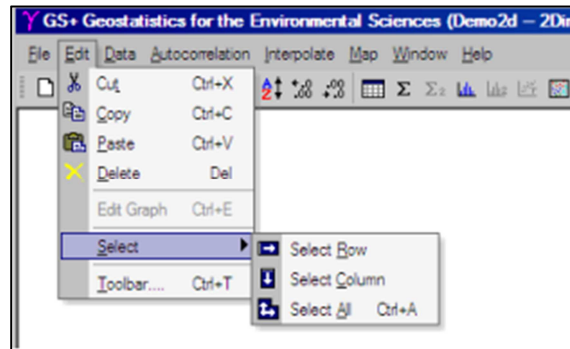


Figure IV.4. Menu d'Édition de GS+

(c) Menu de Données (Data)

Le menu Données permet d'accéder à la feuille de calcul des données et aux fenêtres de statistiques récapitulatives, ainsi que des commandes permettant d'importer et d'exporter des fichiers de données et de manipuler des données dans la feuille de calcul.

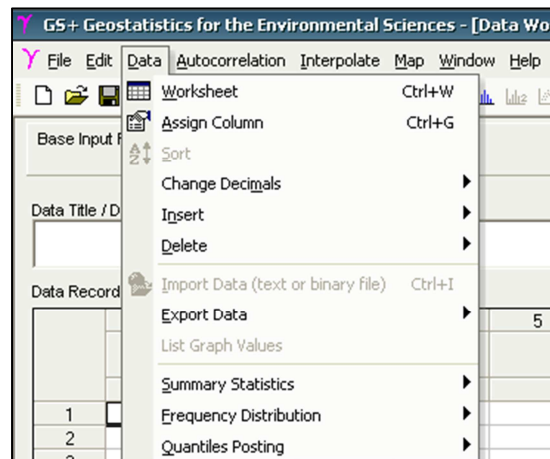


Figure IV. 5. Menu de Données de GS+

(d) Menu d'Auto-corrélation (Autocorrelation)

Le menu Auto-corrélation donne accès à l'un des nombreux types d'analyses d'auto-corrélation dans GS+:

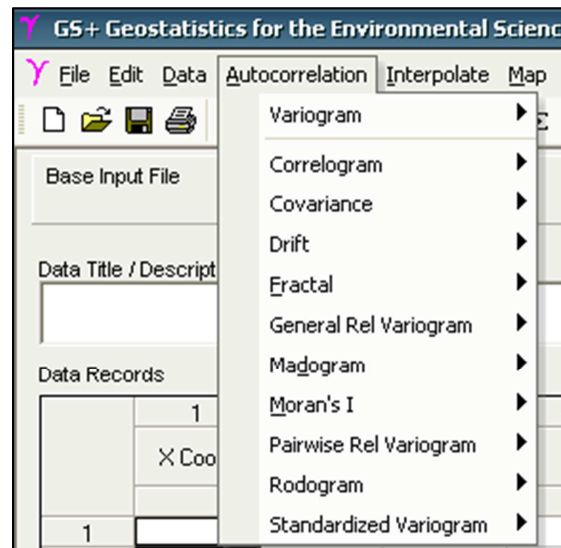


Figure IV. 6. Menu d'Autocorrélation de GS+

- Variogramme (Variogram).
- Variogramme relatif général (General Relative Variogram).
- Corrélogramme (Correlogram).
- Madogram (Madogram).
- Analyse de covariance (Covariance Analysis).
- Analyse de Moran I (Moran's I Analysis).
- Dérive(Drift).
- Variogramme relatif par paire (Pairwise Relative Variogram).
- Analyse fractale (Fractal Analysis).
- Variogramme normalisé (Standardized Variogram).

(e) Menu Interpoler (Interpolate).

Le menu Interpoler permet d'accéder à l'un des quatre principaux types d'interpolation fournis par GS+.

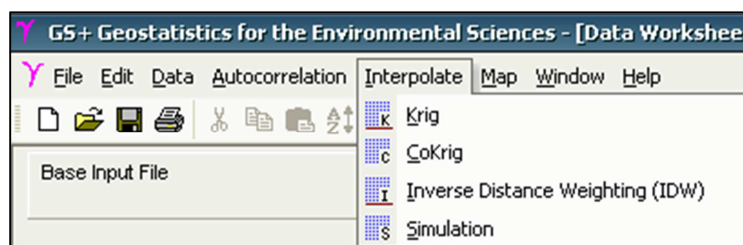


Figure IV. 7. Menu d'Interpoler de GS+.

- Krigeage (Kriging) : permet d'afficher la fenêtre d'interpolation avec accès au krigeage.
 - Co-Krigeage (CoKriging) : permet d'afficher la fenêtre d'interpolation avec accès à Co-krigeage.
 - Pondération inverse de la distance (Inverse Distance Weighting) IDW : permet d'afficher la fenêtre d'interpolation avec accès à l'interpolation de la distance inverse et de la distance normale.
 - Simulation (Simulation) : permet d'afficher la fenêtre d'interpolation avec accès à la simulation conditionnelle.
- (f) *Menu de la Carte (Map).*

Le menu Carte donne accès aux fonctions de cartographie GS+.



Figure IV. 8. Menu de la Carte de GS+

(g) *Menu Fenêtre (Window) :*

Le menu Fenêtre vous permet de vous déplacer rapidement pour ouvrir des fenêtres dans GS+.

- Cascade : réorganiser toutes les fenêtres ouvertes
- Feuille de données (Data Worksheet) : permet d'afficher la fenêtre de la feuille de travail.
- Résumé des données (Data Summary) : permet d'afficher la fenêtre de résumé des données pour la variable principale ou secondaire
- Analyse d'auto-corrélation (AutocorrelationAnalysis) : permet d'afficher les fenêtres d'auto-corrélation pour les variables primaires (Z), secondaires (Z_2) ou croisées (Z, Z_2).
- Interpolation (Interpolation) : permet d'afficher le krigeage, la simulation conditionnelle et la fenêtre d'analyse IDW
- Carte (Map) : permet d'afficher la fenêtre de cartographie.

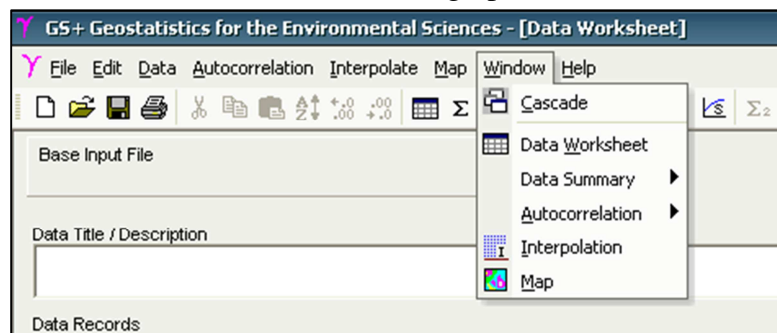


Figure IV. 9. Menu de Fenêtre Window GS+

- **Travailler avec les données**

- (a) *Fenêtre de la feuille de données (Data Worksheet Window)*

La fiche technique contient les données pour les analyses GS+. Les données peuvent être saisies manuellement ou importées via la commande Importer un fichier. Les données saisies peuvent être éditées, filtrées (délimitées) et peuvent être temporairement ou définitivement supprimées des analyses ultérieures. Les affectations de champs (attribution de champs ou de colonnes à des valeurs de coordonnée x, à des coordonnées y, etc.) sont effectuées dans la fenêtre de la feuille de calcul en cliquant sur la deuxième ligne.

The screenshot shows the 'Data Worksheet' window in GS+. The window title is 'GS+ Geostatistics for the Environmental Sciences (Demo) - 1Dimensional Analysis.par - [Data Worksheet]'. The menu bar includes File, Edit, Data, Autocorrelation, Interpolate, Map, Window, and Help. Below the menu bar, there is a 'Base Input File' section showing 'C:\Documents and Settings\...demo1.d.dat'. The 'Data Title / Description' section shows 'File Demo1.d.dat' and 'day, date, mean daily C, daily max C, daily min C'. The 'Data Records' section displays a table with 11 columns: 1 (X Coord), 2 (date), 3 (mean daily C), 4 (daily max C), 5 (daily min C), 6, 7, 8, 9, 10, and 11. The table contains 30 rows of data, with the first row highlighted in yellow.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	X Coord		Z								
	day	date	mean daily C	daily max C	daily min C						
1	1.00	890101.00	-3.00	0.30	-6.10						
2	3.00	890103.00	-5.60	-0.90	-6.10						
3	5.00	890105.00	-4.30	2.70	-10.20						
4	6.00	890106.00	-0.60	1.20	-2.10						
5	10.00	890110.00	-1.70	1.40	-5.90						
6	11.00	890111.00	-2.30	5.70	-6.70						
7	12.00	890112.00	1.00	6.20	-4.00						
8	14.00	890114.00	-4.00	-0.40	-7.20						
9	15.00	890115.00	0.00	2.00	-2.50						
10	17.00	890117.00	2.00	3.90	0.30						
11	18.00	890118.00		6.20	-0.10						
12	19.00	890119.00	2.60	8.60	-1.00						
13	21.00	890121.00	-6.70	-1.40	-12.70						
14	23.00	890123.00	4.00	10.70	-0.60						
15	25.00	890125.00	1.10	7.40	-0.60						
16	26.00	890126.00	2.00	8.60	-1.20						
17	27.00	890127.00	0.60	4.90	-2.40						
18	28.00	890128.00	4.10	9.90	0.20						
19	30.00	890130.00	2.00	4.60	-0.30						
20	31.00	890131.00	8.50	15.90	8.10						
21	32.00	890201.00	1.90	10.50	-5.20						
22	33.00	890202.00	-5.70	-4.10	-7.30						
23	36.00	890205.00	-9.00	-6.20	-14.10						
24	37.00	890206.00	-11.40	-7.40	-15.10						
25	38.00	890207.00	-11.10	-7.10	-13.90						
26	41.00	890210.00	-7.50	-4.50	-11.60						
27	42.00	890211.00	-3.60	-0.20	-7.00						
28	44.00	890213.00	-0.10	3.70	-3.90						
29	45.00	890214.00	0.40	4.80	-2.00						
30	46.00	890215.00	-1.00	1.40	-5.60						

Figure IV. 10. Fenêtre de la feuille de travail GS+ illustrant un fichier de données d'entrée.

- (b) *Importation de données à partir de fichiers externes*

Un certain nombre de types de fichiers différents peuvent être importés dans GS+. Ceux-ci incluent des feuilles de calcul (par exemple, les formats Microsoft Excel), des bases de données (par exemple, des formats Microsoft Access), des pages HTML (Web) et des fichiers texte. Les fichiers sont importés via la commande Importer dans la fenêtre de la feuille de travail, qui ouvre la boîte de dialogue ci-dessous. Dans cette boîte de dialogue, vous choisissez le fichier et le format (comme illustré dans la liste déroulante située au bas de la fenêtre).

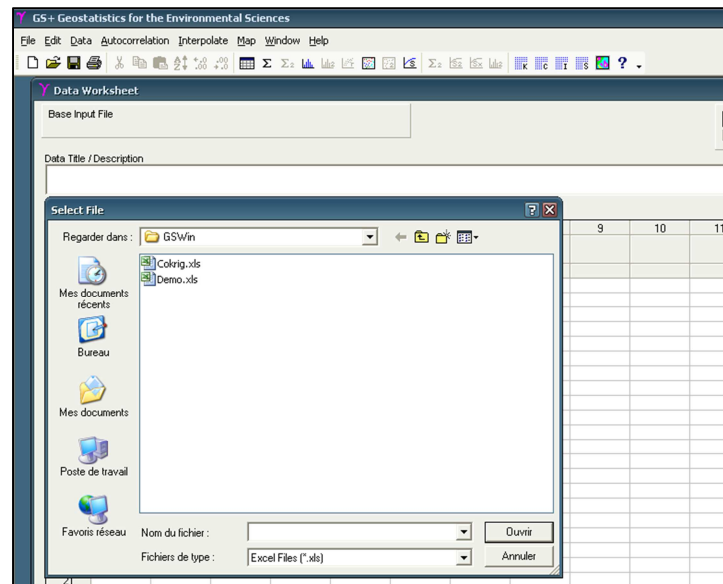


Figure IV. 10. Fenêtre de la feuille de travail GS+ illustrant l'importation des données à partir de fichiers externes.

- **Analyse de semi-variance**

La semi-variance est évaluée dans GS+ en calculant $\gamma(h)$ pour toutes les paires de points possibles de l'ensemble de données et en affectant chaque paire à une classe d'intervalles h .

(a) *Fenêtre d'Auto-corrélation (Autocorrelation Window)*

La fenêtre d'auto-corrélation est l'endroit où diverses options pour les calculs de Variogramme et les résultats finaux apparaissent.

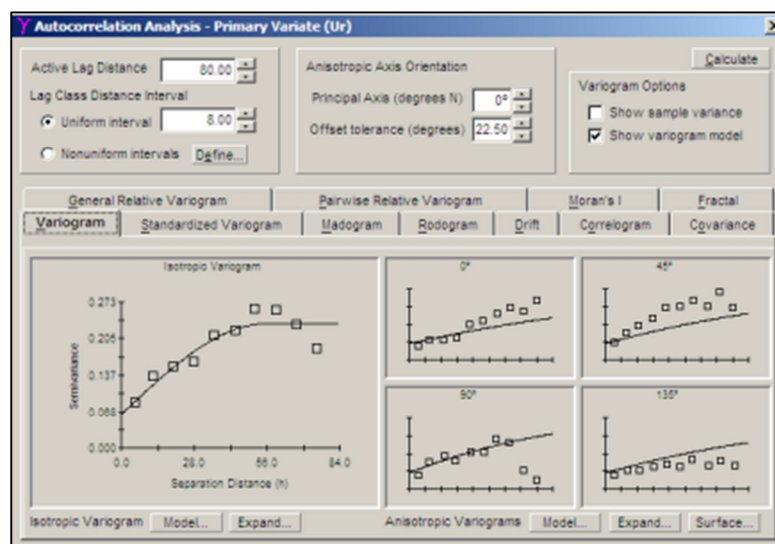


Figure IV.11. Fenêtre GS+ avec les paramètres de saisie

(b) Fenêtre Variogrammes (Variograms Window)

La fenêtre « Variogram Window » présente un Variogramme plein fenêtre pouvant être édité et imprimé. Différents onglets contiennent des Variogrammes pour les différentes directions anisotropes. En outre, les valeurs de semi-variance utilisées pour produire le Variogramme peuvent être répertoriées et l'analyse de nuance de variance peut être réalisée. Les nuages de variance permettent de détecter les paires de points aberrants susceptibles de fausser artificiellement le Variogramme.

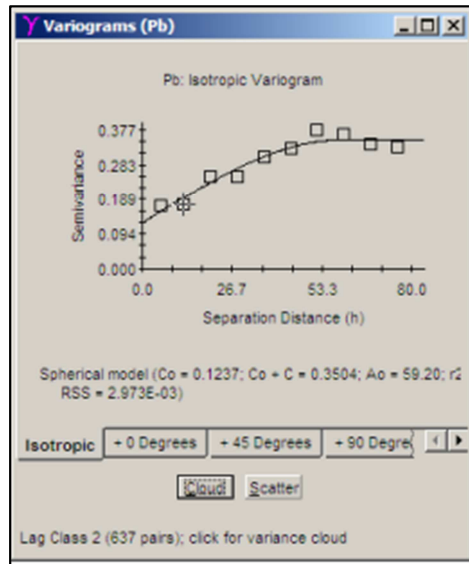


Figure IV.12. Fenêtre GS+ montrant le semi-Variogramme expérimental et le modèle mathématique ajusté

- **Krigeage et Cokrigeage**

Le krigeage permet d'interpoler les valeurs de points non échantillonnés physiquement à l'aide de connaissances sur les relations spatiales sous-jacentes dans un jeu de données. Les Variogrammes fournissent cette connaissance. Le Krigeage est basé sur la théorie des variables régionalisées et fournit une estimation d'interpolation optimale pour un emplacement de coordonnées donné. GS+ effectue plusieurs types de Krigeage.

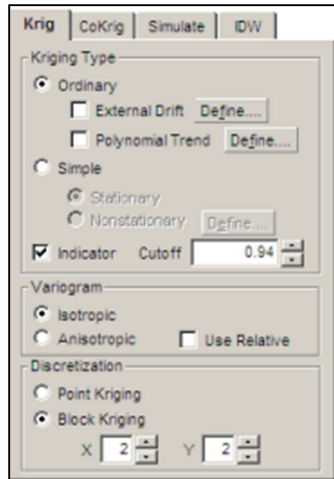


Figure IV.13. Fenêtre de GS+ montrant le Krigeage

- **Création d'une carte avec GS+**

Pour créer une carte avec GS+ on doit suivre les étapes suivantes :

- Tout d'abord, prélevez des échantillons d'endroits connus. Les emplacements d'échantillonnage ne besoin d'être espacés de manière égale ou même de s'allonger sur une grille, vous devez simplement savoir leur emplacement dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y) ;
- Deuxièmement, importez les données dans la feuille de calcul GS+ Data; vous pouvez entrer les données directement dans la feuille de calcul ou importez les données à partir d'un fichier texte, d'une feuille de calcul ou une autre source; souvent, le moyen le plus simple d'importer des données est de couper-coller depuis la feuille de calcul source ou le fichier texte ;
- Troisièmement, effectuez une analyse de semi-variance pour produire un modèle de Variogramme de l'autocorrélation présente dans les données ;
- Quatrièmement, utilisez Kriging, Cokriging ou simulation conditionnelle pour produire un fichier d'interpolation qui contiendra des estimations optimales des valeurs à intervalles réguliers sur la zone d'échantillonnage ;
- Enfin, dessinez une carte en 3 ou 2 dimensions de la propriété. Cette carte constituera une représentation optimale et impartiale du bien sur la zone d'intérêt. Vous pouvez également créer une carte de confiance pour les estimations, ce qui vous permettra d'évaluer l'erreur statistique associée à chaque intervalle de contour estimé.

IV.2.2. Logiciel VESPER

IV. 2.2.1. Définition de logiciel VESPER

VESPER (Estimation de Variogramme et Prévision Spatiale avec ERror) est un programme pour PC-Windows développé par le Centre australien de l'agriculture de précision (ACPA) pour la prévision spatiale capable de réaliser un Krigeage avec des Variogrammes locaux. Les

applications du programme incluent génération de cartes de rendement, interpolation de modèles numériques. Le programme permet également le Krigeage classique avec un Variogramme de surface entière, avec des options pour réglage manuel et ajustement du Variogramme sur toute la surface. L'interface conviviale permet la création d'une limite de champ et génération d'une grille d'interpolation [16].

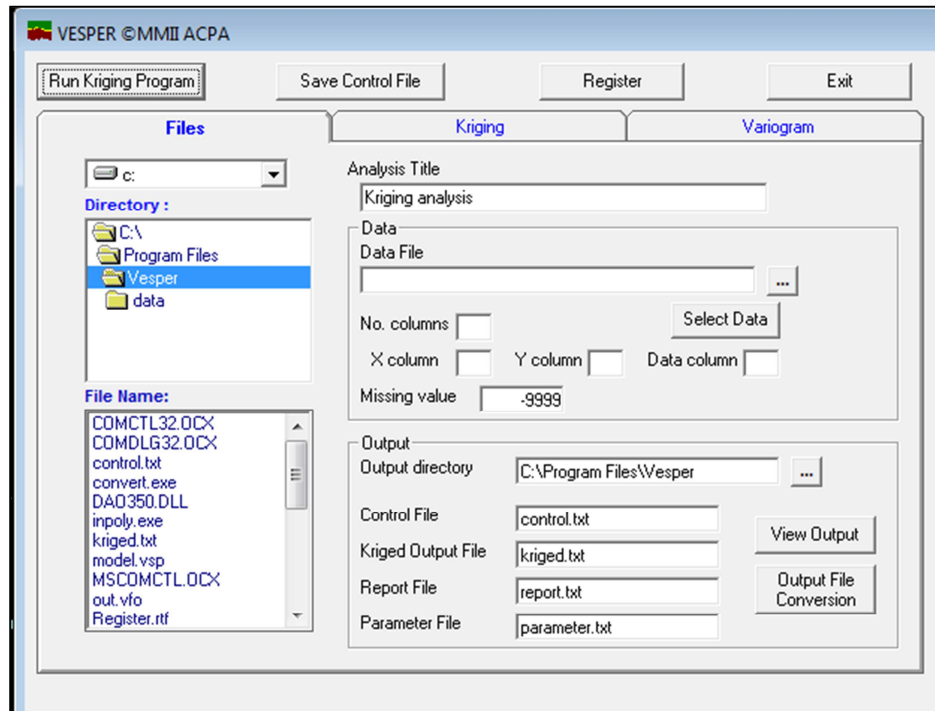


Figure IV. 14. Fenêtre de logiciel VESPER

IV.2.2.2. Manuelle d'utilisation de logiciel VESPER : [16]

VESPER accepte les données dans un format de fichier texte. Les données doivent contenir deux colonnes de données spatiales (X et Y emplacements) et au moins une colonne d'une variable à interpoler. VESPER acceptera les fichiers texte contenant jusqu'à 50 variables délimitées par des tabulations, des espaces ou des virgules. Il accepte les fichiers avec ou sans en-tête.

```
x, y, z
50.16571, 38.60503, 6.73180134
51.81264, 38.41478, 5.38031385
53.48674, 37.77423, 4.83549547
```

Figure IV. 15. Fichier 1HXYZ.TXT (situé dans le répertoire VESPER)

VESPER possède quatre (4) boutons de menu opérationnels situés en haut de la fenêtre et trois onglets de configuration permettant de contrôler les paramètres du programme.

- **Boutons de menu opérationnels**

(a) **Exécuter le Programme de Krigeage (Run Kriging Program):** Permet de lancer le processus d'interpolation une fois que tous les paramètres opérationnels ont été définis par l'utilisateur.

(b) **Enregistrer le Fichier de Contrôle (Save Control File):** permet d'enregistrer une copie du fichier de contrôle. Le fichier de contrôle enregistre les paramètres utilisés pour interpolation.

(c) **À propos de (About):** fournis des détails sur VESPER.

(d) **Sortie (Exit):** quitte VESPER.



Figure IV. 16. Boutons de menu opérationnels de VESPER

- **Onglets de configuration**

(a) *Fichiers (File):*

Fournis des contrôles pour les fichiers d'entrée et de sortie.

(b) *Krigeage (Kriging):*

Fournit des options pour le type de Krigeage à utiliser et l'établissement ou la définition des limites et de la grille des dossiers.

(c) *Variogramme (Variogram):*

Fournis des options pour estimer les Variogrammes.

Les fonctions et options de chaque onglet seront expliquées en détail dans les sections suivantes.



Figure IV. 17. Onglet de configuration de VESPER.

- **Onglet Configuration des fichiers :**

(a) *Fichier d'entrée (Data File) :*

Les données d'entrée peuvent être sélectionnées de deux manières. Le menu déroulant et les volets de navigation sur le côté gauche peuvent être utilisés pour choisir le dossier souhaité et le fichier d'entrer sélectionné par un «double-clic» sur le nom du fichier, dans ce cas

« 1HAXYZ.TXT ». Vous pouvez également cliquer sur le bouton  à la fin de la zone « Data

File » pour ouvrir une fenêtre Windows standard permettant de rechercher le fichier sur votre ordinateur. La figure suivante montre la structure générale de l'onglet Configuration des fichiers.

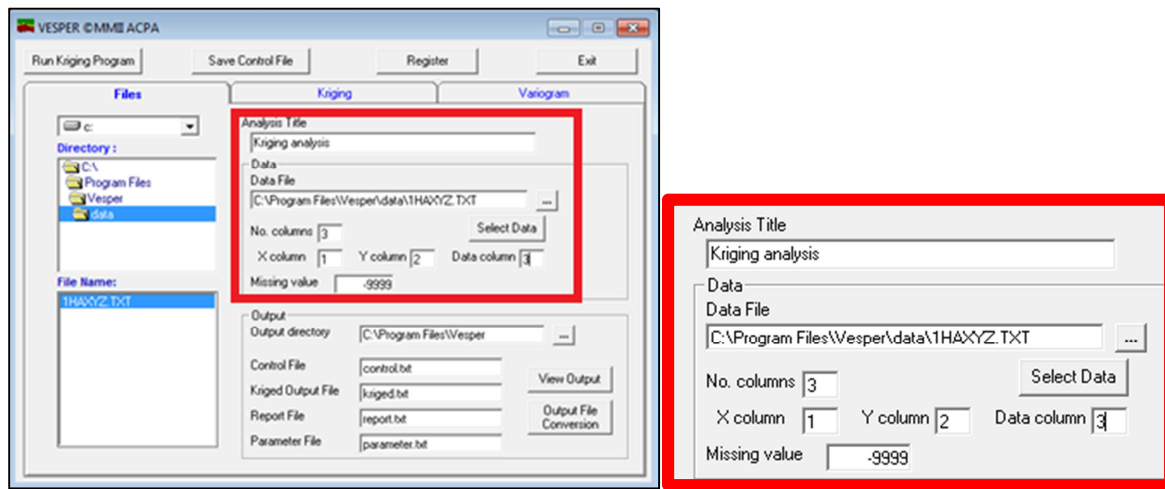


Figure IV.18. Fenêtre de fichier d'entrée de VESPER.

(b) *Fichier de sortie (Output File) :*

Un répertoire de sortie dans lequel tous les fichiers de sortie seront sauvegardés. Le répertoire se trouve par défaut dans le dossier «data» du dossier du programme VESPER (généralement dans Program Files sur le lecteur C:). Pour changer le répertoire de sortie, cliquez sur le bouton à la fin de la boîte répertoire de sortie pour lancer une fenêtre permettant de naviguer dans un répertoire préféré. Tous les fichiers de sortie seront stockés à cet emplacement. Le nom (mais pas l'emplacement) de chaque fichier de sortie peut être modifié en tapant dans les zones de texte associées à chaque fichier dans la zone "Output".

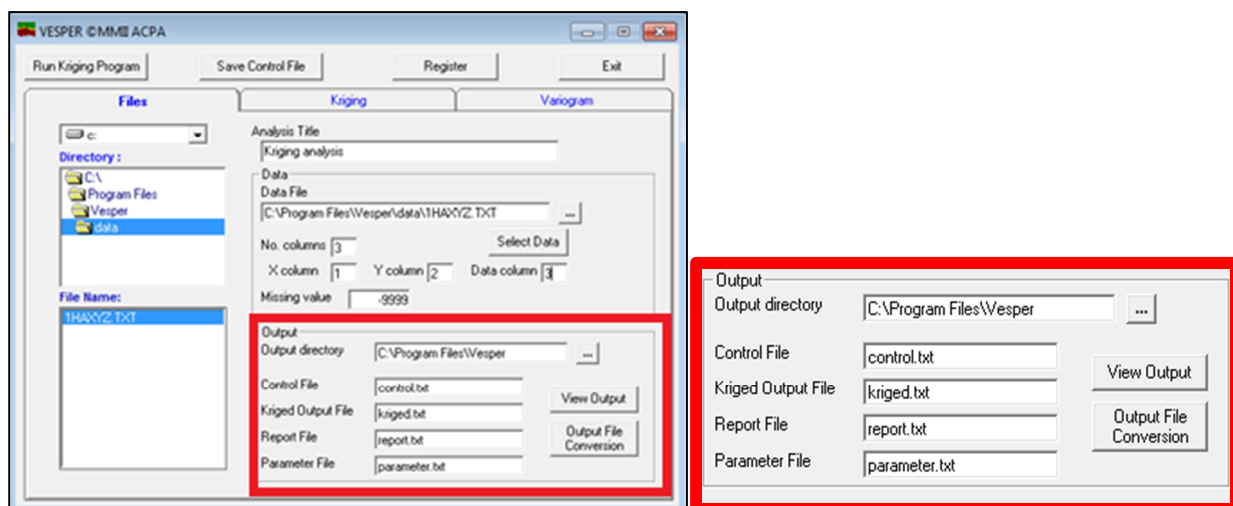


Figure IV.19. Fenêtre de fichier de sortie de VESPER.

- **Onglet Configuration du Krigeage**

(a) Définir la grille d'interpolation :

La grille d'interpolation forme les points sur lesquels les données brutes sont prédites. La grille d'interpolation permet aux données collectées à différents intervalles d'être co-localisées et corrélées. La grille d'interpolation peut être spécifiée dans l'une des options suivantes:

- Lorsque le champ a une forme rectangulaire, spécifiez la distance d'interpolation dans le champ interpolation ;
- Lorsque le champ a une forme irrégulière, la limite peut être définie manuellement
- Un fichier contenant une grille prédéfinie peut être spécifié.

Le bouton « Generate Boundary » ouvre la fenêtre « Boundary Definition » qui affiche les emplacements X et Y des données dans le fichier d'entrée. La fenêtre « Boundary Definition » est une fenêtre active dans laquelle la limite du champ peut être entrée manuellement.

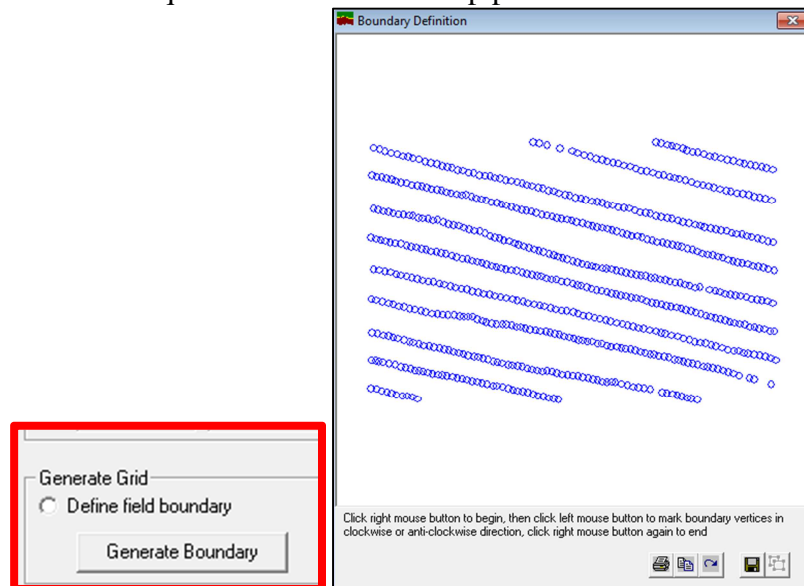


Figure IV.20. Fenêtre de «BoundaryDefinition » de VESPER

(b) Choisir une méthode de Krigeage

Le côté gauche du menu de l'onglet Krigeage est illustré dans la figure ci-dessous et offre plusieurs options pour établir une méthode pour le processus de Krigeage.

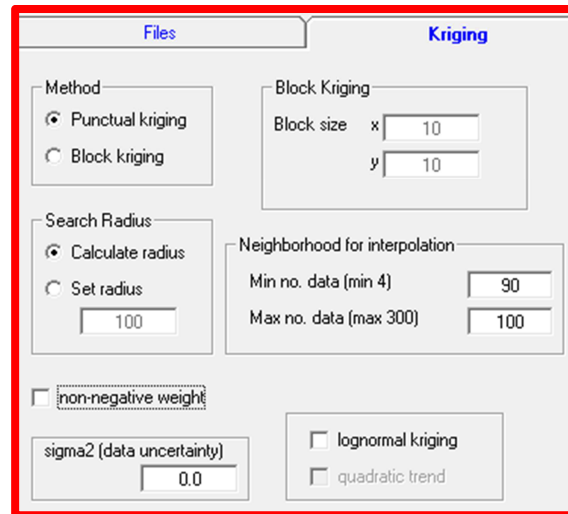


Figure IV.21. Fenêtre illustre les méthodes de Krigeage

Ces options sont:

- **Méthode (Method):** fournis une option pour le krigeage ponctuel ou en bloc. Le Krigeage Ponctuel prédit une valeur exacte à chaque point de la grille et attribue cette valeur au point de la grille. « Block Kriging » prédit toutefois une valeur représentant une moyenne pondérée statistiquement pour une zone centrée sur le point de la grille.
- **Quartier d'interpolation (Neighbourhood for Interpolation):** définis le nombre minimal et maximal de points de voisinage utilisés dans le processus de krigeage. Pour le krigeage local (voir la section Onglet Variogramme), le minimum par défaut de 90 points est recommandé, car les points de voisinage sont utilisés pour calculer le nuage de variogramme.
- **Rayon de recherche (Search Radius):** définis le rayon d'un cercle qui englobera le nombre minimum de points de voisinage spécifiés. Lorsque le bouton «Search Radius» est coché, le rayon de recherche est calculé en fonction de la densité des données.
- **Autres paramètres de krigeage (Other Kriging Parameters):** Ce sont des options utilisées principalement dans un contexte de recherche et ne sont pas requises pour une utilisation générale.

• Onglet Configuration du Variogramme

Le calcul de Variogramme peut être effectué de deux manières: en tant que Variogramme «local» ou «global». La méthode de calcul du Variogramme est indépendante de la méthode de krigeage (ponctuelle ou par bloc) choisie. Le calcul du Variogramme global utilise toutes les données du champ pour produire un Variogramme. Le calcul du Variogramme local est conçu pour les données à haute densité. La densité de données élevée permet de calculer les Variogrammes «local» à chaque point de la grille d'interpolation en utilisant un nombre prédéfini de points de voisinage.

L'option Variogramme locale ou globale est sélectionnée en cochant le bouton dans la section « Variogram calculation» de l'onglet Configuration «Variogram ».

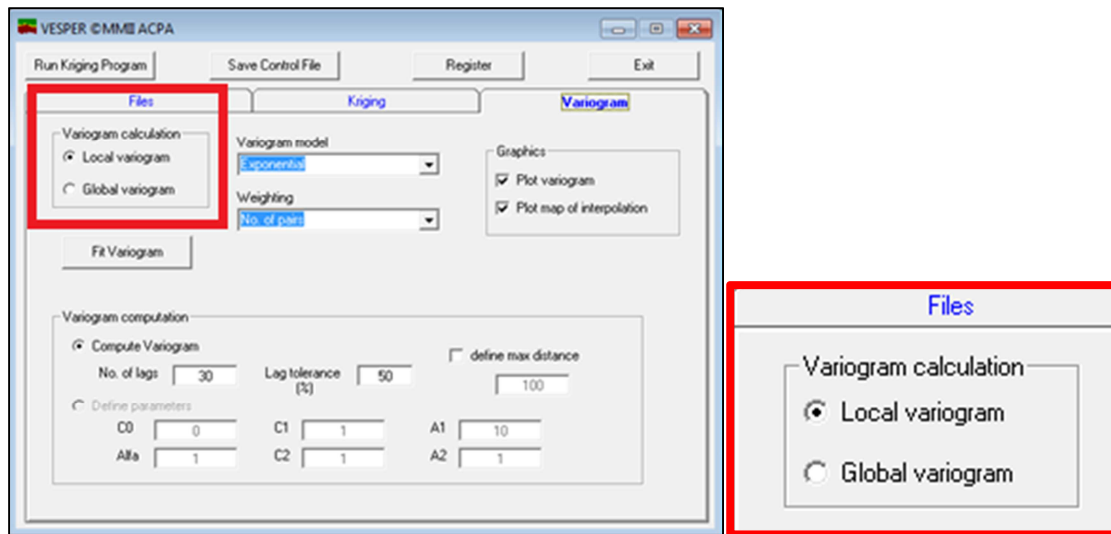


Figure IV.22. Fenêtre de l'onglet Configuration du variogramme

(a) Calcul du Variogramme global et ajustement du modèle

Une fois que l'option « Global Variogram » a été cochée dans la case « Variogram calculation », vous devez cliquer sur le bouton « Fit Variogram » de l'onglet « Variogram Configuration » pour accéder à la fenêtre modèle de « Variogram Model ».

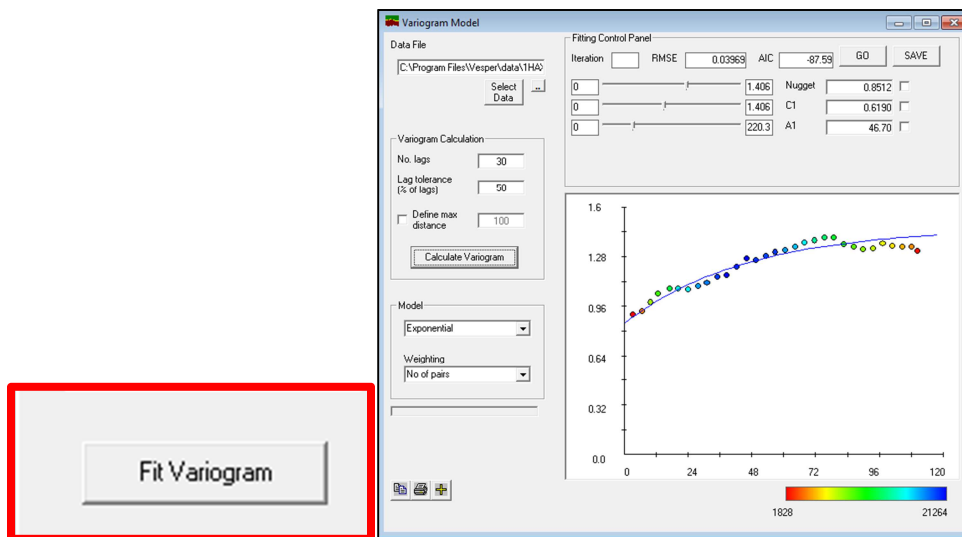


Figure IV.22. Fenêtre d'un modèle de Variogramme

(b) Calcul du Variogramme local et ajustement du modèle

Lorsque l'option « Local Variogram » est sélectionnée, VESPER adapte automatiquement le Variogramme local. Il n'est donc pas nécessaire d'accéder à la fenêtre « Variogram Model ». VESPER requiert certaines contraintes de base pour l'estimation du Variogramme local, qui sont

saisies dans l'onglet de configuration «Variogram». Dans l'onglet de configuration « Variogram », deux menus déroulants permettent de sélectionner le modèle et l'option de pondération préférés pour le Krigeage local. Ce sont les mêmes options données dans la fenêtre « Variogram Model » pour le Krigeage global.

- **Lancer le programme de Krigeage« *Run Kriging Program* »**

Lorsque les paramètres suivants ont été spécifiés:

- Fichiers d'entrée / sortie
- Grille d'interpolation
- Paramètres de Krigeage
- Paramètres du Variogramme

Le programme peut être lancé en cliquant sur le bouton« *Run Kriging Program* » dans le menu opérationnel. Le programme va trier les données et commencer le processus de Krigeage. Si les options graphiques ont été sélectionnées, alors, pour toutes les formes de Krigeage, deux cartes de progression de la prédiction sont affichées, ainsi qu'un compteur de points interpolés par rapport au nombre total de points de la grille d'interpolation. La carte du haut montre que le point de la grille d'interpolation est prévu sous forme d'un seul point bleu solide et que les points de voisinage sont utilisés pour la prévision sous forme de carrés roses creux. Cela permet de visualiser quels points bruts contribuent à un point de grille d'interpolation à un emplacement donné. La carte du bas est une carte spatiale des données prédites. Lorsque le programme est terminé, il invite l'utilisateur à afficher le résultat.

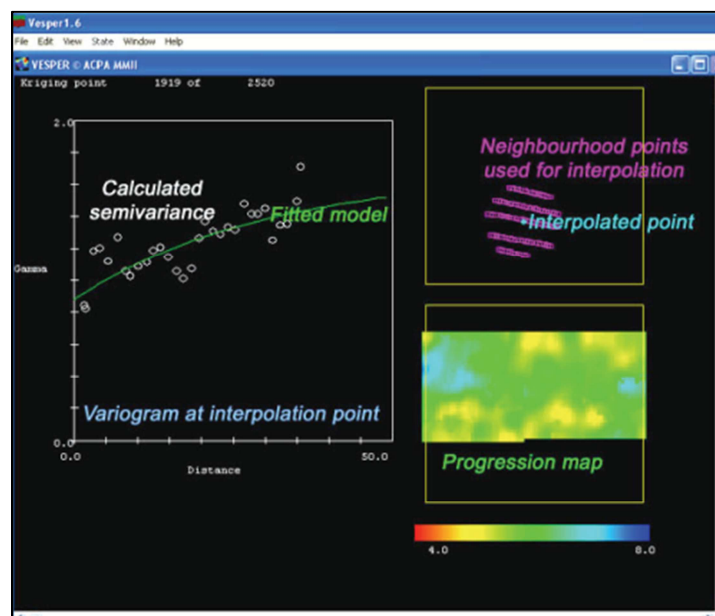


Figure IV.23. Fenêtre VESPER en action effectuant un Krigeage local

Références Bibliographiques

- [1] C. de Fouquet, (2006), « La modélisation géostatistique des milieux anthropisés. Mathématiques [math], Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, France
- [2] D. Marcotte, (2007), « Cours Géostatistique GML6402A » Institut de recherche en mines et en environnement, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, Canada.
- [3] A. Perrut, (2010), « Cours de probabilités et statistiques », Université Claude Bernard Lyon 1. France.
- [4] D.V. Griffiths, G .A. Fenton, (2007) « Probabilistic methods in geotechnical engineering », International centre for Mechanical Sciences.
- [5] F. Deverly (1984), « Echantillonnage et géostatistique », Thèse de doctorat, Ecole Supérieur des Mines, Paris, France.
- [6] G. Guillot, (2004), « Introduction à la géostatistique », Institut National Agronomique de Paris-Grignon, France.
- [7] J.P. Chilès, (2004), « La modélisation géostatistique de la variabilité spatiale et ses applications » Sciences de la Terre, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, France.
- [8] J. R. Benjamin, C. A. Cornell, (1970), « Probability, Statistics, and decision for civil engineers », Mcgraw hill Book Company, New York.
- [9] C. Lantuéjoul, (2002), « Geostatistical simulation: Models and Algorithms ». Edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- [10] D.O. Sarma, (2009), « Geostatistics with Applications In Earth Sciences, Second Edition », Edition Springer, Capital Publishing Company, New Delhi, India.
- [11] H. Wackernagel, (2003), « Multivariate geostatistics : an introduction with applications », Edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- [12] M. A. Oliver, R. Webster, (2015), « Basic Steps in Geostatistics: The Variogram and Kriging », Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, UK.
- [13] M. A. Oliver, R. Webster ,(2007), « Geostatistics for Environmental Scientists », John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, UK.
- [14] J.C. Martin, J. Schwartz, J.J. Seguin, V. Thiery, J.P. Sauty, (1989), « Quelques applications de la géostatistique à l'hydrogéologie » Bureau de recherches géologiques et minières, France.
- [15] G.P. Robertson, (2008), «GS+: Geostatistics for the Environmental Sciences ». Gamma Design Software, Plainwell, Michigan USA.
- [16] User manual Vesper 1.6 April 2004.