Chapitre I

Eléments du Bond Graph

I. Introduction

Les Bond Graphs sont apparus en 1961 par Paynter. C'est un outil de modélisation qui répond au besoin de plusieurs champs disciplinaires. Le principe fondamental de description repose sur les échanges d'énergie entre les sous-parties d'un système ; ce concept est compréhensible par les spécialistes de nombreux domaines scientifiques et permet une communication entre ces différentes communautés scientifiques.

II. Le modèle Bond Graph

II.1. Définition

Le modèle Bond Graph (BG) ou Graphes de liaisons est un modèle de connaissance; il exprime la distribution de l'énergie sur les composants du système et les liaisons entre ces composants.

II.2. Notion de puissance

La puissance est toujours le produit de deux variables ; appelées variables de puissance qui sont :

- La variable d'effort notée $e(t)$;
- La variable de flot notée $f(t)$;

Ces grandeurs sont soit scalaires, soit vectorielles.

Par exemple, en mécanique de translation : un corps de masse M, sous l'action d'une force $F(t)$, et une vitesse notée $v(t)$. Dans ce cas, l'effort est noté $e(t) = F(t)$, le flot est noté $f(t) = v(t)$.

La puissance (l'énergie) est donnée par :

$$E(t) = e(t).f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

Par convention, on utilise une liaison entre 2 objets échangeant de la puissance ; cette liaison est matérialisée par un lien terminé par une demi-flèche qui porte les informations $e(t)$ et $f(t)$. C'est un lien énergétique (lien = bond)

L'orientation de la demi-flèche indique que la puissance est transmise de A vers B.

$$A \xrightarrow[f]{e} B$$

L'énergie qui passe à travers la liaison est : $E(t) = \int_0^t e(\tau)f(\tau)d\tau$ **(2)**

Cette énergie s'écrit : $E(t) = \int_0^t e(\tau)dq(\tau) = \int_0^t f(\tau)dp(\tau)$ **(3)**

Le moment p(t) est donc défini par : $p(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$ **(4)**

Le déplacement q(t) est défini par : $q(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ **(5)**

III. Définitions des variables pour divers champs de la physique

Le tableau suivant donne les 4 variables utilisées dans la modélisation Bond Graph pour différents domaines de la physique :

Domaine	**Effort e**	**Flot f**	**Moment p**	**Déplacement q**
Electrique	Tension U(v)	Courant I(A)	Flux ϕ (v.s)	Charge q (c)
Hydraulique	Pression P (pa)	Débit Q (m^3/s)	Impulsion = $\int pression$ ($N.s/m^2$)	Volume (m^3)
Mécanique de Transaction	Force F (N)	Vitesse V (m/s)	Moment P (N.s)	Déplacement X (m)
Mécanique de Rotation	Couple τ (N.m)	Vitesse angulaire ω (rad/s)	Moment angulaire H (N.m.s)	Angle θ (rad)
Thermique	Température (C°)	Taux d'échange thermique dϕ/dt (J/s)	Non utilisé	Quantité de chaleur Q (J)

IV. Eléments du langage Bond Graph

Le modèle BG se compose de deux types d'éléments : éléments actifs et éléments passifs.

IV.1. Les éléments actifs :

Ce sont toutes les sources d'énergie dans un système**.** Il existe deux types de sources:

a. **Source de flot S_f:** elle est représentée par le bond graph suivant :

$$S_f \; \xrightarrow[f]{}$$

La source de flot S_f génère le flot du lien qui lui est connecté. Exemples : générateur de courant, pompe hydraulique à débit constant.

b. **Source d'effort S_e:**elle est représentée par le bond graph suivant :

$$S_e \; \xrightarrow{e}$$

La source d'effort S_e génère l'effort du lien qui lui est connecté. Exemples : pompe hydraulique à pression constante, générateur de tension électrique, générateur de couple.

IV.2. Eléments passifs R, I, C

Les éléments R, I, C sont dits éléments passifs car ils transforment la puissance qui lui est fournie en énergie dissipée (R) ou stockée (I, C).

a. **Elément résistif R :**

L'élément R est défini par une relation statique entre l'effort e et le flot f tel que :

$$e(t) = R.f(t) \qquad \textbf{(6)}$$

L'élément R est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant la variable d'effort e à la variable de flot f, il est dissipatif d'énergie. La puissance qui lui est transmise est transformée en chaleur. Il est représentée par le bond graph suivant :

$$\xrightarrow[f]{e} \; R$$

Exemple :

☞ En mécanique de translation, les variables de puissance sont : $\begin{cases} e(t) = F(t) \\ f(t) = v(t) \end{cases}$

Avec : $F(t)$ est la force appliquée et $v(t)$ est la vitesse de translation.

La relation **(6)** devient : $F(t) = R.v(t)$; donc l'élément $R = b$:c'est l'amortissement, et il sera représenté par le bond graph suivant :

$$\underset{f}{\overset{e}{\rightharpoondown}}\ R\!:\!b$$

b. L'élément inertiel I :

L'élément I est défini par une relation statique entre le flot f et le moment p tel que :

$$p(t) = I.f(t) \qquad \textbf{(7)}$$

En remplaçant $p(t)$ par **(4),** on trouve :

$$\int_0^t e(\tau)d\tau = I.f(t)$$

$$\Rightarrow\ e(t) = I.\frac{df}{dt} \qquad \textbf{(8)}$$

L'élément I modélise tout phénomène physique liant la variable de flot f à la variable de moment p, il transforme la puissance qui lui est fournie en énergie stockée. Il est représenté avec le bond graph suivant :

$$\underset{f}{\overset{e}{\rightharpoondown}}\ I$$

Exemple :

☞ En mécanique de translation, les variables de puissance sont : $\begin{cases} e(t) = F(t) \\ f(t) = v(t) \end{cases}$

Avec : $F(t)$ est la force appliquée et $v(t)$ est la vitesse de translation.

La relation **(9)** devient : $F(t) = I.\frac{dv(t)}{dt}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $F(t) = M.\frac{dv(t)}{dt}$; donc par identification ; l'élément $I = M$: C'est la masse.

Le moment $p(t)$ représente la quantité de mouvement tel que : $p(t) = M.v(t)$.

$$\xrightharpoonup[f]{e} I:M$$

☞ En mécanique de rotation : les variables de puissance sont : $\begin{cases} e(t) = \Gamma(t) \\ f(t) = \omega(t) \end{cases}$

Avec : $\Gamma(t)$ est le couple appliqué et $\omega(t)$ est la vitesse de rotation.

On a : $e(t) = I.\frac{df}{dt} \Rightarrow \Gamma(t) = I.\frac{d\omega}{dt}$ (*)

Le principe fondamental de la dynamique en rotation s'écrit : $\Gamma(t) = J.\frac{d\omega(t)}{dt}$ (**)

En comparant (*) avec (**), on trouve : $I = J$, donc I représente l'inertie en rotation.

Le moment $p(t)$ représente la quantité de mouvement tel que : $p(t) = J.\omega(t)$.

$$\xrightharpoonup[f]{e} I:J$$

c. L'élément capacitif C:

L'élément C est défini par une relation statique entre l'effort e et le déplacement q tel que :

$$q(t) = C.e(t) \qquad \textbf{(9)}$$

En remplaçant $q(t)$ par **(5),** on trouve :

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = C.e(t)$$

$$\Rightarrow \quad e(t) = \frac{1}{C}\int_0^t f(\tau)d\tau \qquad \textbf{(10)}$$

Donc l'élément C modélise tout phénomène physique liant la variable d'effort e à la variable de déplacement q et il transforme la puissance qui lui est fournie en énergie stockée. Il est représenté comme suit :

$$\xrightharpoonup[f]{e} C$$

Exemple :

☞ En mécanique de translation, les variables de puissance sont : $\begin{cases} e(t) = F(t) \\ f(t) = v(t) \end{cases}$

Avec : $F(t)$ est la force appliquée et $v(t)$ est la vitesse de translation.

On a : $F(t) = k.x(t) = k.\int_0^t v(\tau)d\tau$ (*)

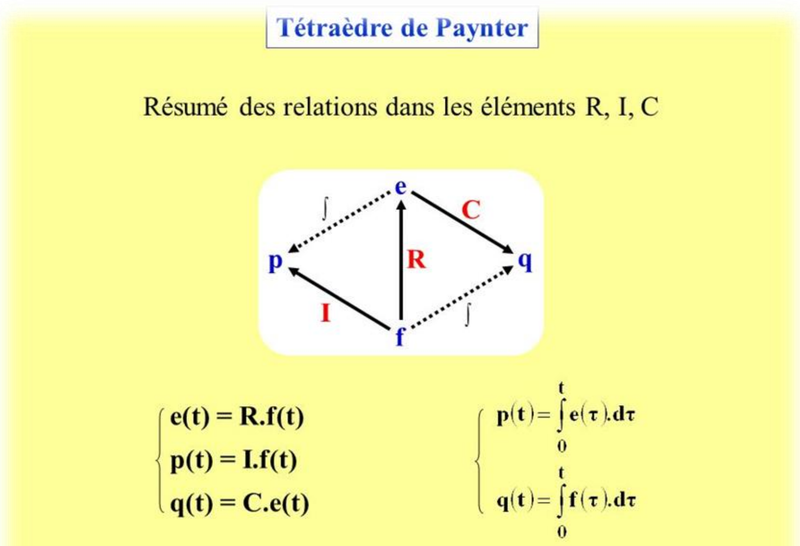
Selon l'équation (10) : $e(t) = \frac{1}{C}\int_0^t f\,(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; F(t) = \frac{1}{C}\int_0^t v\,(\tau)d\tau$ (**)

En comparant (*) et (**) , on trouve : $C = \frac{1}{K} \Rightarrow$ L'élément C matérialise un ressort de raideur k .

$$\xrightarrow[f]{e} C{:}1/k$$

IV.3. Le tétraèdre de Paynter

Le tétraèdre de Paynter regroupe les 4 variables généralisées et les 3 éléments passifs.



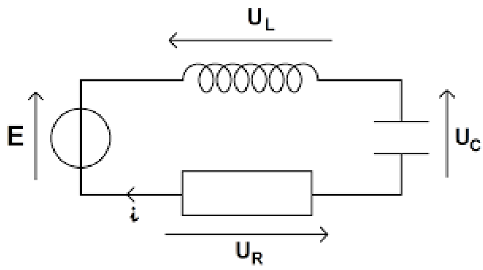
Les flèches continus traduisent les multiplications tandis que les flèches discontinues traduisent les relations intégrales.

V. Les Jonctions :

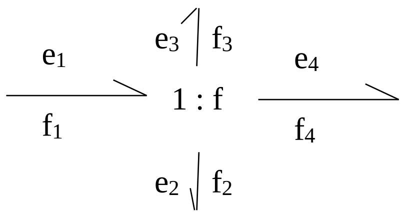
Il existe 2 types de jonctions dans la modélisation bond graph : la jonction 0 et la jonction 1.

V.1. La jonction 1

La jonction 1 implique que la variable flot est commune à plusieurs éléments. Par exemple, en électricité, dans une branche le même courant traverse les composants (inductance, résistance, capacité) placés en série.

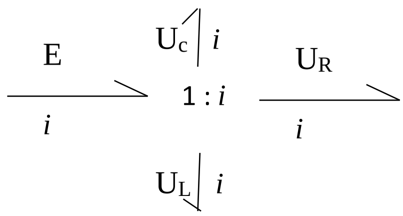


Le bond graph équivalant est représenté par la jonction 1 suivante :



(jonction 1 avec 4 branches)

$\Rightarrow$



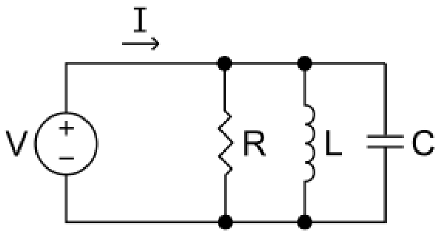
Donc: $f = f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = i$ et $\sum_K e_K = 0$ **(11)**

$\sum_K e_K = 0 \Rightarrow e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = 0$

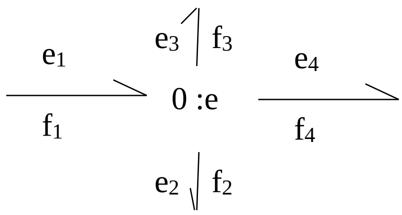
$\Rightarrow E - U_C - U_R - U_L = 0$

V.2. La jonction 0

La jonction 0 implique que la variable effort est commune à plusieurs éléments. Par exemple, en électricité, les composants (inductance, résistance, capacité) placés en parallèle sont soumis au même effort.

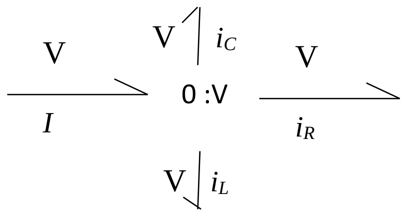


Le bond graph équivalant est représenté par la jonction 0 suivante :



(jonction 0 avec 4 branches)

⇒



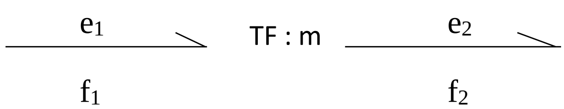
$$e = e_1 = e_2 = e_3 = e_{4} = V \quad \text{et} \quad \sum_K f_K = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

$$\sum_K f_K = 0 \Rightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$$

$$\Rightarrow I - i_C - i_L - i_R = 0$$

VI. Le transformateur

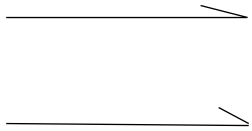
C'est un élément qui a 2 liens : un en entrée et l'autre en sortie. On appelle m le module de transformateur. Le bond graph équivalant est le suivant :



Les relations caractéristiques du transformateur sont : $\begin{cases} e_1 = m.e_2 \\ f_2 = m.f_1 \end{cases}$ **(13)**

VII. Le détecteur

Le détecteur de flot D_e et d'effort D_f sont des éléments qui ne consomment pas d'énergie. Ils sont placés dans le modèle bond graph pour indiquer la présence d'un capteur ou d'un instrument de mesure ; aucune puissance n'intervient. Pour les représenter dans un modèle bond graph, on utilisera un lien d’information classique, représenté par une flèche entière classique :



D_e

D_f