Chapitre IV

Représentation d'état déduite du Bond Graph

I. Introduction

La représentation d'état est un outil essentiel pour la description des systèmes dynamiques. Outre les nombreuses propriétés, la représentation d'état permet d'état permet d'effectuer des simulations efficaces des systèmes. Enfin, ce formalise est à l'origine de nombreuses méthodes de commande des systèmes.

Le passage du BG à la représentation d'état s'effectue de façon systématique. C'est cette méthode qui est utilisée dans les modules de simulation des logiciels basés sur la représentation des systèmes par BG.

II. Définition

Le vecteur d'état est composé de variables d'énergie p_I et q_C associées aux éléments I et C du BG.

$$x = \begin{bmatrix} p_I \\ q_c \end{bmatrix} \text{.......(1)}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_I \\ f_c \end{bmatrix} \text{.................(2)}$$

Propriétés :

- Si tous les éléments sont en causalité intégrale, la dimension du vecteur d'état est égale au nombre des éléments I et C.
- Si parmi les n éléments I et C, il en existe n_d éléments en causalité dérivée, alors la dimension du vecteur d'état est (n-n_d).

III. Méthode de mise en forme d'état

La représentation d'état des systèmes ayant les entrées regroupées dans le vecteur u est les sorties regroupées dans le vecteur y est une équation différentielle du premier ordre où la dérivée du vecteur d'état x dans le cas des systèmes linéaires s'écrit :

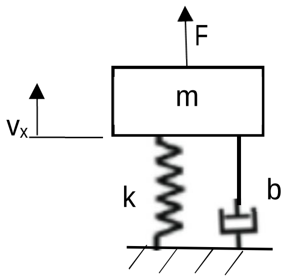
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C\,x + Du \end{cases} \qquad (3)$$

Pour obtenir la représentation d'état d'un système linéaire, il faut suivre les étapes suivantes:

- Compte tenu des causalités, écrire les lois associées aux jonctions ;
- Compte tenu des causalités, écrire les lois caractéristiques des éléments ;
- A partir de ces équations, expliciter les dérivées des variables d'état en fonction des variables d'état et des entrées (sources).

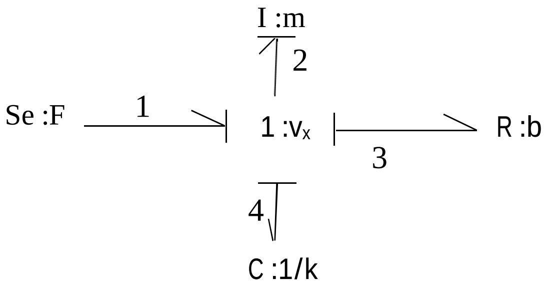
III.1. Premier exemple :

Soit le système mécanique suivant :



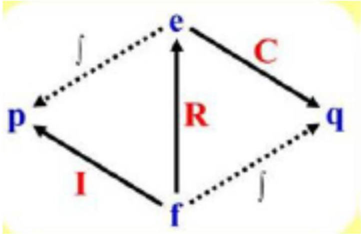
1. Donner le Bond Graph équivalent et affecter les causalités de ses éléments.
2. Donner la représentation d'état du système.

1. Le BG équivalent est le suivant :



On a numéroté les liens pour faciliter la tâche au niveau des équations du BG.

2. Pour obtenir la représentation d'état, nous récrivons les équations associées aux jonctions et aux éléments en tenant compte des causalités. Il est conseillé de représenter ces équations dans un tableau.
3. En utilisant le tétraèdre de Paynter, on écrit les équations de chaque élément du BG comme il est représenté par la suite.



Jonction : 1 : v_x	**Elément I :m**
$e_2 = e_1 - e_3 - e_4$ …….**(4)** .	$\dot{p}_2 = e_2$ …………..**(8)**
$f_1 = f_3 = f_4 = f_2$…….**(5)**	$f_2 = \frac{1}{m} p_2 = v_x$…….**(9)**
Elément C : $\frac{1}{K}$	**Elément R :b**
$e_4 = k.\, q_4$ …………**(6)**	$e_3 = b\, .\, f_3$ …………**(10)**
$\dot{q}_4 = f4$ ……………………**(7)**	

Puisque le BG possède 2 éléments (I et C) en causalité intégrale***, le vecteur d'état*** comporte 2 composantes $\Longrightarrow$ dim $(x) = 2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{pour } x_1 \longrightarrow p_2 & \text{(pour I)} \\ \text{pour } x_2 \longrightarrow q_4 & \text{(pour C)} \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = A . \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix} + B.F \qquad u = \text{F (une seule entrée)}$$

$\dot{p}_2$?

On a de l'équation (8) : $\dot{p}_2 = e_2$

de (4) $\longrightarrow$ $\dot{p}_2 = e_1 - e_3 - e_4$ avec $e_1 = F$

de (6) et (10) $\longrightarrow$ $\dot{p}_2 = F_1 - b\, f_3 - k\, .\, q_4$

de (5) $\longrightarrow$ $\dot{p}_2 = F_1 - b\, f_2 - k\, .\, q_4$

de (7) $\longrightarrow$ $\boxed{\dot{p}_2 = F_1 - b\,\frac{P2}{m} - k\, .\, q_4}$ … (11)

$\dot{q}_4$ **?**

de (7) : $q_4 = f_4 = f_2 = \frac{P2}{m}$ .... (12)

La sortie est $v_x = y = \frac{1}{m}\, p_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix}$ ....(13)

de (11) et (12) et (13), on obtient la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/m & -k \\ 1/m & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} . F$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix} ; \qquad D = 0$$

Le calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état donne :

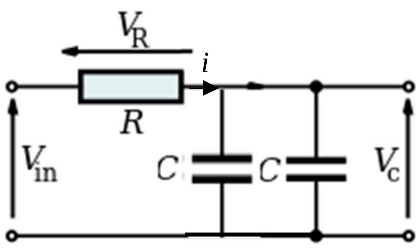
$G(p) = \frac{Vx\,(p)}{F(p)} = \frac{P}{mp^2 + bp + k}$ .... (13)

<u>Rappel:</u> Le passage d'une représentation d'état à une fonction de transfert:

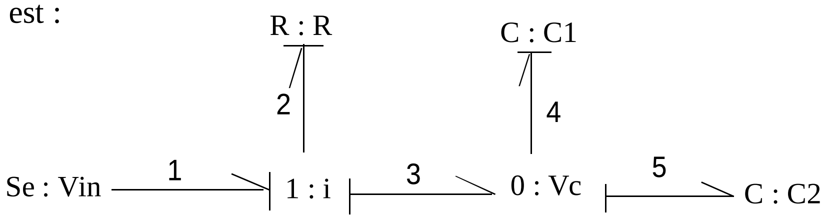
$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(PI - A)^{-1}.B + D$ …………… (14).

III.2. deuxième exemple : Cas de la causalité Mixte

Soit le système électrique suivant :



Le BG associé est :



La capacité C_1 est en causalité dérivée donc elle sera supprimée du vecteur d'état : x= [q_5] .
La représentation d'état du système est de la forme :

$$\dot{x} = \dot{q}_5 = A\, q_5 + B.u$$

$$y = C\, q_5 + D.u$$

Jonction 1 :i

$f_1 = f_2 = f_3$ …(1) .

$e_1 = e_2 + e_3 = Vin$…(2)

L'élément C_1 :

$q_4 = C_1.\, e_4$…..(3)

$\dot{q}_4 = f_4$……...(4)

L'élément C_2 :

$q_5 = C_2.\, e_5$……(5)

$\dot{q}_5 = f_5$……....(6)

Jonction O :Vc

$f_3 = f_4 + f_5$ …..(7) .

$e_3 = e_4 = e_5$….(8)

L'élément R :

$e_2 = R\,.\, f_2$…..(9)

On calcul d'abord l'état de l'élement à **causalité dérivée** : q_4 en fonction de q_5

De (3) : $q_4 = C_1\,.\, e_4$ or $e_4 = e_5$

$\Rightarrow q_4 = C_1\,.\, e_5$

$= C_1\,.\,\frac{q5}{c2}$

Donc : $$\boxed{q_4 = \frac{C_1}{C_2}\, q_5 \text{ …………..(10)}}$$

$\dot{q}_5$?

$$\dot{q}_5 = f_5 = f_3 - f_4 = f_3 - f_4 = \frac{e_2}{R} - f_4$$

$$= \frac{e_2}{R} - \dot{q}_4$$

$$\Rightarrow \dot{q}_5 = \frac{e_1 - e_3}{R} - \frac{C_1}{C_2}\,\dot{q}_5$$

$$\Rightarrow \dot{q}_5\,(1 + \frac{C_1}{C_2}) = \frac{1}{R}\,(e_1 - e_3)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_5\,(1 + \frac{C_1}{C_2}) = \frac{1}{R}\,(Vin - \frac{q_5}{C_2})$$ (sachant que $e_3 = e_5$ et e_1=Vin)

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}_5 = \frac{-1}{R(C_1+C_2)}\, q_5 + \frac{C_2}{R(C_1+C_2)}\, Vin}$$

Sachant que $C = C_1 = C_2$, on obtient :

$$\boxed{\dot{q}_5 = \frac{-1}{2RC} q_5 + \frac{C}{2RC} Vin}$$

y ?

$y = \mathrm{Vc} = \frac{1}{C_1} q_4 = \frac{1}{C_2} q_5 \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{C_2} q_5 = \frac{1}{C} q_5}$