REPUBLIQUE ALGERENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Jijel
Faculté Sciences de la technologie
Département Génie Mécanique

Cours " MECANIQUE RATIONELLE"

Année académique 2023-2024

Chapitre I

RAPPELS MATHEMATIQUES :

1.1) Grandeur scalaire :

Une grandeur scalaire se définit complètement par sa valeur numérique dans un système d'unité choisi et elle n'est liée à aucune direction dans l'espace (masse, volume, temps, ...).

1.2) Grandeur vectorielle :

Une grandeur vectorielle se définit non seulement par sa valeur numérique mais aussi par sa direction et son sens dans l'espace (force, vitesse, ...).

1.2.1) Vecteur :

Un vecteur est un segment de droite orienté (figure 1.1). IL est caractérisé par :

- Une origine ou point d'application (point A).
- Une extrémité munie d'une flèche indiquant le sens du vecteur (point B)
- Un module ou valeur numérique, donné par la longueur du segment AB et noté par : $\|\boldsymbol{AB}\|$
- Un support ou une ligne d'action (droite kl).

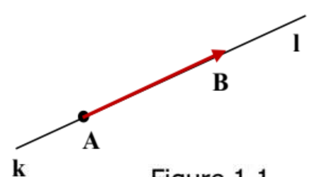

Figure 1.1

1.2.2) Différents types de vecteur :

- Vecteur libre : l'origine du vecteur peut se déplacer librement dans l'espace.
- Vecteur lie : l'origine du vecteur est fixe.
- Vecteur glissant : l'origine peut se de déplacer le long du support du vecteur.
- Vecteurs équipollents (ou égaux) : Ils ont le même module, le même sens et ils sont portés par le même support ou par des supports parallèles.

1.2.3) Produit scalaire de deux vecteurs :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ (Figure 1.2) est égal au produit de leurs modules par le cosinus de l'angle ente leurs directions.

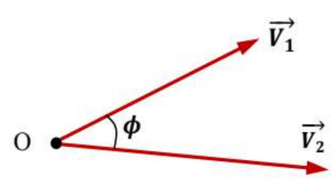

Figure 1.2

$$\left\|\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|.\cos\phi \tag{1.1}$$

1.2.4) Forme analytique du produit scalaire :

Soient les deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \quad (1.2)$$

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = x_1.x_2(\vec{i}.\vec{i}) + x_1.y_2(\vec{i}.\vec{j}) + x_1.z_2(\vec{i}.\vec{k}) + y_1.x_2(\vec{j}.\vec{i}) + y_1.y_2(\vec{j}.\vec{j}) + y_1.z_2(\vec{j}.\vec{k})$$
$$+ z_1.x_2(\vec{k}.\vec{i}) + z_1.y_2(\vec{k}.\vec{j}) + z_1.z_2(\vec{k}.\vec{k})$$

Nous avons : $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1.1.cos(0) = 1$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 1.1.cos(\pi/2) = 0$$

D'où :

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 \quad (1.3)$$

1.2.5) Propriétés du produit scalaire :

- Commutativité : $\vec{a}.\vec{b}. = \vec{b}.\vec{a}$ (1.4)
- Distributivité par rapport à l'addition : $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (1.5)
- Linéarité : $(\propto \vec{a}).(\beta\vec{b}) = \propto \beta(\vec{a}.\vec{b})$,(**α** et **β** des constantes) (1.6)

1.2.6) Produit vectoriel de deux vecteurs :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est un vecteur dont le module est égal au produit de leurs modules multiplié par le sinus de l'angle entre leurs lignes d'action et dont la direction est perpendiculaire sur le plan formé par les deux vecteurs.

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3} \quad (1.7)$$

$$\left\|\overrightarrow{V_3}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_3}\right\| . \left\|\overrightarrow{V_3}\right\| \sin\varphi \quad (1.8)$$

Le sens du vecteur $\overrightarrow{V_3}$ est défini par la règle de la main droite ou de la progression de tire-bouchon (Figure 1.3).

Le module du produit vectoriel représente l'aire (surface) du parallélogramme OABC construit sur les deux vecteurs (figure 1.4).

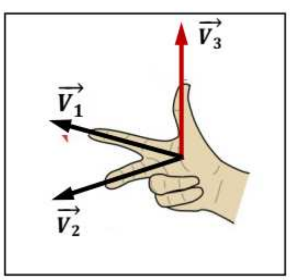

Figure 1.3

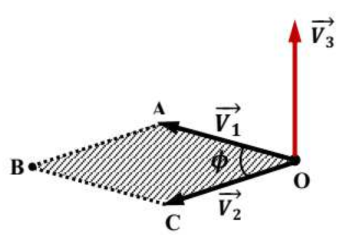

Figure 1.4

1.2.7) Forme analytique du produit vectoriel :

Soient les deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dans la base orthonormée directe$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur déterminé comme suit :

$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{cases} = \begin{cases} +\,(y_1.z_2 - z_1.y_2).\vec{i} \\ -\,(x_1.z_2 - z_1.x_2).\vec{j} \\ +\,(x_1.y_2 - y_1.x_2).\vec{k} \end{cases}$$

Les produits sont effectués suivant les flèches

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = +\,(y_1.z_2 - z_1.y_2)\vec{i} - (x_1.z_2 - z_1.x_2)\vec{j} + (x_1.y_2 - y_1.x_2)\vec{k} \qquad (1.9)$$

1.2.8) Exemple 1.1 :

On considère les deux vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$.

Calculer :$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

Solution 1.1 :

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) \bullet (6\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}) = 2.6 + (-3).4 + 5.(-7) = -35$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} +2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ +5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} +6\vec{i} \\ +4\vec{j} \\ -7\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} +\,[(-3).(-7) - (5).(4)] = -41\,\vec{i} \\ -\,[(2).(-7) - (5).(6)] = +44\,\vec{j} \\ +\,[(2).(4) - (-3).(6)] = +26\,\vec{k} \end{cases}$$

1.2.9) Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel des deux vecteurs est nul si les deux vecteurs ont la même direction.
- Non Commutative : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$ (1.10)
- Distributivité par rapport à l'addition :$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3)$ (1.11)
- Linéarité : $(\alpha.\vec{V}_1) \wedge (\beta.\vec{V}_2) = \alpha.\beta.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$ (1.12)

1.2.10) Double produit vectoriel :

Le double produit vectoriel de trois vecteurs$\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ est un vecteur.

$$\overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_3})\overrightarrow{V_2} - (\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2})\overrightarrow{V_3} \qquad (1.13)$$

1.2.11) Division vectorielle :

Soit les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, et $\overrightarrow{V_2}$ non nuls satisfaisant à la condition $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = 0$. Les vecteurs $\vec{x}$, solution de l'équation $\vec{x} \wedge \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2}$ sont données par la formule :

$$\vec{x} = \frac{\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}}{\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|^2} + \lambda\overrightarrow{V_1} \qquad (1.14)$$

Avec : $\lambda \in \Re$

1.2.12) Produit mixte :

Le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ est un scalaire **d** déterminé par la relation suivante :

$$d = \overrightarrow{V_1}.\left(\overrightarrow{V_2}\,\Lambda \overrightarrow{V_3}\right) \qquad (1.15)$$

1.2.13) Propriétés du produit mixte :

Une permutation circulaire des vecteurs ne modifie pas la valeur du produit mixte :

$$d = \overrightarrow{V_1}.\left(\overrightarrow{V_2}\,\Lambda \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_2}.\left(\overrightarrow{V_3}\,\Lambda \overrightarrow{V_1}\right) = \overrightarrow{V_3}.\left(\overrightarrow{V_1}\,\Lambda \overrightarrow{V_2}\right) \qquad (1.16)$$