Chapitre III: Statique

1.1. INTRODUCTION

La statique est une branche de la mécanique rationnelle qui traite l'équilibre des corps matériels par rapport à un système de référence supposé fixe, et ses moyens de réduire un système de forces à une forme élémentaire. Dans ce chapitre on aborde des notions sur le point matériel, le corps solide parfait, la force, le moment d'une force et les torseurs des forces extérieures. Ensuite, on donne les conditions d'équilibres statiques, et les différents types des liaisons et de réactions. Enfin, on explique quelques opérations sur les forces concernant la réduction d'un système de forces à une résultante et la décomposition d'une force à plusieurs composantes.

1.2. NOTIONS FONDAMENTALES DE LA STATIQUE

1.2.1. Point matériel

On appelle un point matériel, une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré. La différence par rapport au point géométrique, réside en le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie, et d'interactions avec d'autres points matériels.

1.2.2. Corps solide parfait

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels : on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante (il reste indéformable) tant dans son ensemble qu'en chacune de ses parties.

1.2.3. Force

Par la force, on désigne en mécanique la mesure quantitative d'interaction mécanique des corps matériels. On appellera force l'action d'un corps sur un autre, se traduisant par une pression, une attraction, une répulsion…ect. L'action de la force sur le corps est déterminée par (Figure 1.1) :

- le point d'application : **A ;**
- le sens : **A→B**
- La direction où la ligne d'action : (Δ),
- le module où la valeur numérique : $\left|\vec{\mathbf{F}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|$.

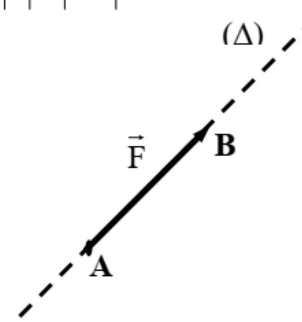

Figure 1.1. *Représentation vectorielle d'une force*

Les forces exercées sur un solide sont de deux types. Les forces extérieures qui sont exercées par d'autres corps et appliquées aux points du solide donné. Par contre, les forces intérieures sont les forces d'interaction, qui se développent entre les points matériels du solide donné et dont leur résultante est nulle.

1.2.4. *Moment d'une force par rapport à un point*

Soit une force $\vec{\mathbf{F}}$ et un point O (Figure 1.2.). Menons par O un plan contenant $\vec{\mathbf{F}}$. Abaissons de O une perpendiculaire OP sur la direction AB de la force $\vec{\mathbf{F}}$. La longueur de la perpendiculaire est le bras de levier h de la force $\vec{\mathbf{F}}$ par rapport au point O ; ce point s'appelle pôle.

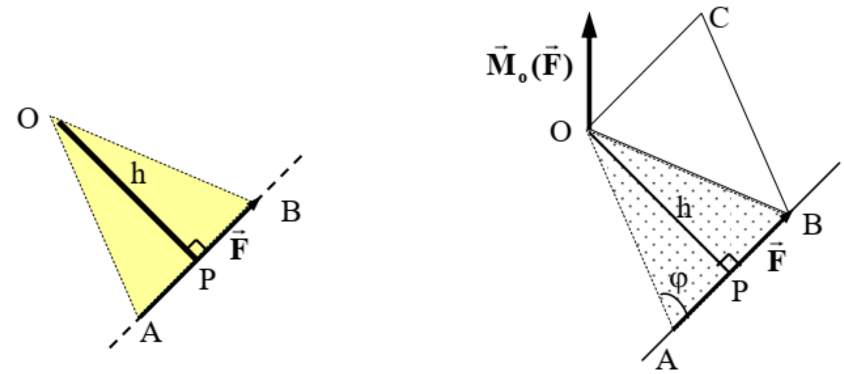

Figure 1.2a Figure 1.2b

Figure 1.2. *Moment d'une force par rapport à un point*

Le moment de $\vec{\mathbf{F}}$ par rapport à O est le produit du module F du vecteur de la force $\vec{\mathbf{F}}$ par le bras de levier **h**, qui peut être affecté de signe positif ou négatif.

$$\mathbf{M_0(\vec{F}) = \pm F\,h} \tag{1.1}$$

$\mathbf{M_0(\vec{F}) \rangle 0}$ si la force fait tourner le plan dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

$\mathbf{M_0(\vec{F}) \langle 0}$ si la force fait tourner le plan dans le sens des aiguilles d'une montre.

La valeur absolue du moment d'une force est le double de l'aire du triangle OAB construit sur la force $\vec{\mathbf{F}}$ et le pôle O ou l'aire du parallélogramme OABC (Figure 1.2b).

$$\left|\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}})\right| = \mathbf{F\,h = 2\ S_{OAB}}$$

où :

$$\left|\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}})\right| = \mathbf{F\,h = F\ OA\sin\varphi = F\,r\sin\varphi} = \left\|\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}}\right\|$$

d'où

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{M}_O}(\vec{\mathbf{F}})\right| = \left\|\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}}\right\| \quad (1.2)$$

Le vecteur moment $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{F}})$ est égal en module à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{\mathbf{r}}$ où $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ et $\vec{\mathbf{F}}$. Il est perpendiculaire au plan de ces deux vecteurs.

Ainsi, le vecteur moment d'une force $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{F}})$ par rapport à un point O est un vecteur lié en O, qui s'écrit :

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{F}}) = \vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}} \quad (1.3)$$

1.3. TORSEURS DES FORCES EXTERIEURES

Les efforts appliqués sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O :

$$[\mathbf{F}]_O = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}_O} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Où

$\vec{\mathbf{F}}$ Représente la résultante des forces extérieures appliquées $\vec{\mathbf{R}}$;

$\overrightarrow{\mathbf{M}_O}$ Le moment de la force $\vec{\mathbf{F}}$ par rapport au point O.

Les efforts extérieurs à un système matériel **(S)** sont les efforts exercés sur **(S)** par d'autres systèmes extérieurs. Si **(S)** est soumis à des forces $\overrightarrow{\mathbf{F_i}}$ et des couples $\overrightarrow{\mathbf{M_i}}$ (Figure 1.3a), le torseur des efforts extérieurs exercés sur **(S)** en un point O, s'écrit :

$$[\mathbf{F}_e]_O = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathbf{F}_e} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}_O}(\mathbf{F}_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{R}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \sum \overrightarrow{\mathbf{OM}_i} \wedge \vec{\mathbf{F}}_i \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

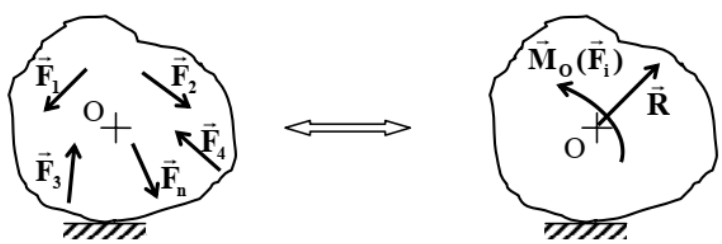

Figure 1.3a **Figure 1.3b**

1.4. CONDITION D'EQUILIBRE STATIQUE

1.4.1. Cas Général

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère fixe (R) si chaque point de (S) reste fixe dans le temps par rapport à (R). En conséquence, le torseur des forces extérieurs est en tout point O, où :

$$[\mathbf{F}_e]_O = [\mathbf{0}]_O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{F}_e} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}_O}(\mathbf{F}_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Pour que le système de forces appliquées à un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale du système et le moment résultant par rapport à un centre de réduction quelconque soient égaux à zéro, où :

$$\vec{R}=\vec{0}, \quad \vec{M}_O(\vec{F}_i)=\vec{0} \tag{1.7}$$

1.4.2 Condition d'équilibre analytique

La condition d'équilibre analytique d'un corps solide est la projection des éléments du torseur des forces extérieurs nulle. Cette projection sur les axes d'un repère orthonormé **R(O, xyz)** permet d'obtenir en général six équations :

- Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

et trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right)=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{ix}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{iy}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{iz}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \end{cases}$$

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

-Deux équations liées à la résultante statique :

$$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = 0 \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = 0 \end{cases}$$

· et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right)=\vec{0}$$

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre **O**, le moment sera nul par rapport à O, il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

$$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

1.5. LES LIAISONS ET LES REACTIONS

1.5.1. Définition

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction. Par exemple une pierre lancée dans l'espace est un solide libre. Un solide est dit lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés liaisons, et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

1.5.2. Différents types des liaisons et de réactions

Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, etc. Dans les cas énumérés sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et que le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est négligeable.

a) Liaison libre

Cette liaison est en fait une absence de liaison, le solide est « livré à lui même » (cas d'un satellite dans l'espace, ou d'un projectile). Il existe six degrés de liberté et aucun effort de contact transmis (pas de réaction).

b) Liaison ponctuelle et appui plan (appui simple)

Le solide repose simplement sur une surface polie (horizontale, verticale où inclinée) Figure 1.4 (a, b) où sur le rouleau cylindrique Figure 1.4c. La réaction de la surface est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle réaction normale et se note $\vec{\mathbf{R}}$.

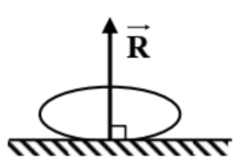

Figure 1.4a

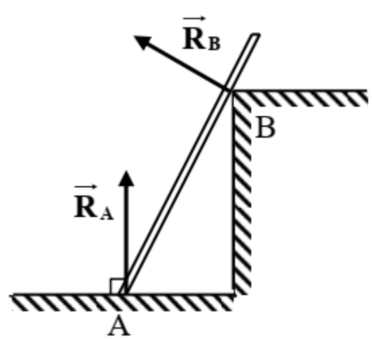

Figure 1.4b

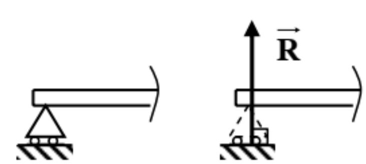

Figure 1.4c

c) Solides articulés (Appuis doubles)

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par :
- un appui articulé (Figure 1.5a),
- une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire) (Figure 1.5b),
- ou une articulation sphérique (liaison rotule) (Figure 1.5c).

Le module et la direction de la réaction $\vec{\mathbf{R}}$ dans son plan sont inconnus

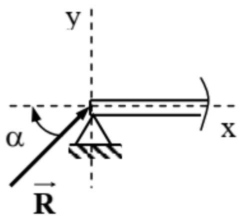

Figure 1.5a

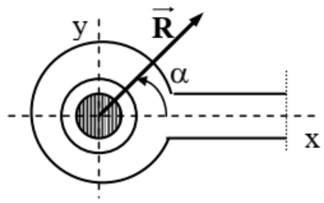

Figure 1.5b

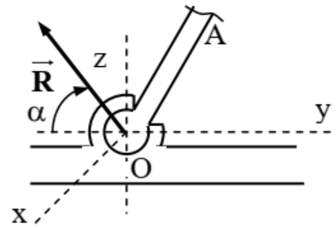

Figure 1.5c

d) Barres rigides

Les barres de poids négligeables peuvent servir comme des liaisons. Leur réaction sera dirigée suivant la longueur de celle-ci (Figure 1.6).

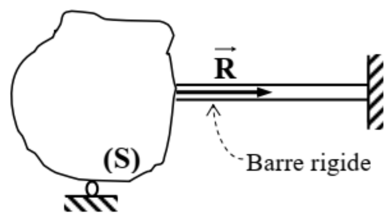

Figure 1.6

e) Liaison flexible (fil, corde, chaîne) (Figure 1.7)

La réaction $\vec{T}$ porte le nom de tension. Elle est appliquée au point d'attache du lien flexible au solide, dirigée le long de la liaison flexible (du fil, de la corde, de la chaîne, etc…..).

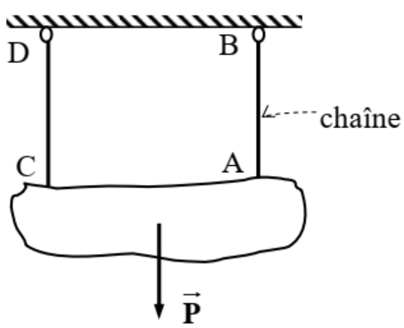

Figure 1.7a

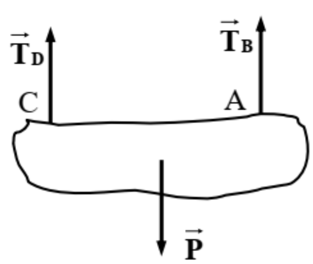

Figure 1.7b

f) Liaison Encastrement (Figure 1.8a)

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides. Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide, et des réactions horizontale et verticale, qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux.

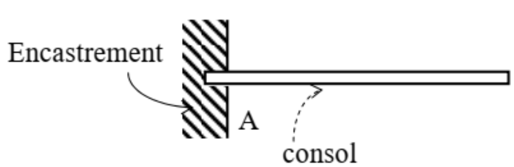

Figure 1.8a

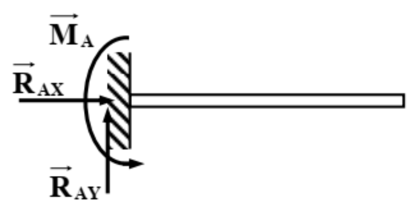

Figure 1.8b

1.5.3. *Axiome des liaisons*

Pour tout corps solide lié (Figure 1.9a), il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et de lui considérer comme un corps solide libre (Figure 1.9b) soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.

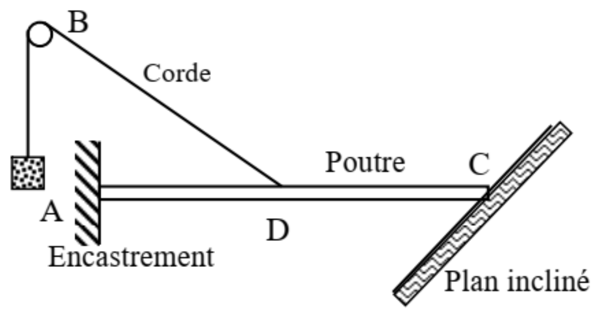

Figure 1.9a. *Corps solide lié*

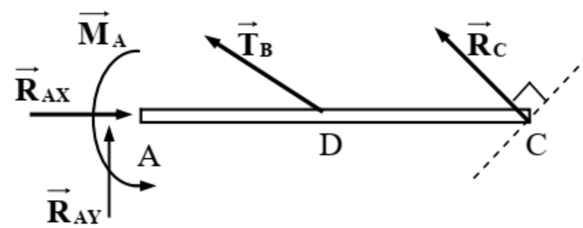

Figure 1.9b. *Corps solide libre*