Exercice1:

Soient les vecteurs :

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$, $\vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{P} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{Q} = -2\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}$

1) *Déterminer y et z pour que les vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$ *soient colinéaires ;*

2) *Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs* $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ *soient perpendiculaires;*

Solution :

1) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires alors: $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 6 \end{cases} \wedge \begin{cases} 8 \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} -6y \\ -2z+48 \\ 2y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$

2) Si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont perpendiculaires alors : $\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \\ -4 \\ 2 \end{cases} \bullet \begin{cases} -2 \\ y \\ 12 \end{cases} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 - 4y + 24 = 0 \quad y = \frac{9}{2}$$

Exercice2:

Trouvez le volume d'un parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs : $\vec{U}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, *tel que :*

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{P} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$,

Solution :

Le volume d'un parallélépipède est un scalaire positif. On doit utiliser une opération vectorielle dont le résultat est un scalaire positif : c'est le module du produit mixte des trois vecteurs : $v = \left| \vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right|$

$$\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} 0 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 1 \\ 4 \\ -2 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \begin{cases} -26 \\ 5 \\ -3 \end{cases} = -52 + 30 = -22 \ ; \ \Rightarrow$$

$$v = \left| \vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right| = |-22| = 22$$

Exercice3:

1.1. On considère deux vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

Calculer:
- leurs longueurs (modules)
- leur produit scalaire
- leur angle
- les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires
- le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

1- les longueurs (modules) des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

$$\left\|\vec{v}_1\right\| = \sqrt{6^2 + 8^2 + (-10)^2} = 14{,}14$$

$$\left\|\vec{v}_2\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 12^2} = 12{,}8$$

2- le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 6.(-2) + 8.4 + (-10).12 = -100$$

3- l'angle entre les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

Nous avons :

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = \left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\| \cos\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$$

Donc :

$$\cos\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{\left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\|} = \frac{-100}{14.14\text{x}12.8} = -0.55$$

D'où, l'angle entre les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ est :

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = 123.54°$$

4- les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires

- le vecteur unitaire du vecteur $\vec{v}_1$ est :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\left\|\vec{v}_1\right\|} = \frac{6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}}{14.14} = 0{,}42\vec{i} + 0.57\vec{j} - 0.71\vec{k}$$

D'où, les cosinus directeurs du vecteur unitaire de $\vec{v}_1$ est :

$$\vec{u}_1\,(0{,}42, 0.57, -0.71)$$

- le vecteur unitaire du vecteur $\vec{v}_2$ est :

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}2}{\left\|\vec{v}2\right\|} = \frac{-2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{12.8} = -0{,}16\vec{i} + 0.31\vec{j} + 0.94\vec{k}$$

les cosinus directeurs du vecteur unitaire de $\vec{v}_2$ est :

$$\vec{u}_2\,(-0{,}16, \quad 0.31, \quad 0.94)$$

5- le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$$\vec{V}_1 = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & +8 & -10 \\ -2 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(8\text{x}12 - (-10)\text{x}4\right)\vec{i} - \left((6)\text{x}12 - (-10)\text{x}(-2)\right)\vec{j} + \left((6)\text{x}(4) - (8)\text{x}(-2)\right)\vec{k}$$

D'où, le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, s'écrit :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 136\vec{i} - 52\vec{j} + 40\vec{k}$$