La République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia De Jijel

Faculté Des Sciences Exactes et de l'informatique

Département de Mathématique

(**COURS DE MASTER MATHS**)

Systèmes Dynamiques Discrets

Arroud Chems Eddine

2020

Table des matières

Introduction

La notion de temps dans l'étude des modèles physiques et mathématiques remonte à Galilée, introduite pour la première fois dans l'étude de la chute des corps et le mouvement de la terre autour du soleil. Cet ajout du temps dans les équations est ce que l'on appellera l'étude des systèmes dynamiques. Dès le début du siècle, le mathématicien Henri Poincaré montre dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et des orbites instables et que, quelquefois, une très faible perturbation dans le système pouvait induire un changement d'état d'une orbite.

Le but de ce polycopié est de fournir les principales clés pour étudier le comportement des systèmes dynamiques discrets et apprendre la maitrise des récurrences unidimensionnelles ou bidimensionnelles qui peuvent être associées aux systèmes différentiels, il est adressé principalement aux étudiants intéressés par la dynamique non-linéaire et le chaos.

Ce polycopié est structuré en cinq chapitres, Le premier chapitre introduit les notions de base de la théorie des systèmes dynamiques. Le deuxième chapitre est consacré à une étude des systèmes dynamiques discrets de dimension 1. Le chapitre 3 représente une étude des systèmes dynamiques discrets de dimension 2. Le chapitre 4 est consacré à la théorie des bifurcations dans les systèmes dynamiques discrets. Le cinquième et dernier chapitre introduit une introduction à la théorie des chaos.

Chapitre 1

Notions générales de la théorie des systèmes dynamiques

Cet premier chapitre regroupe des notions de base et les techniques de la théorie des systèmes dynamiques, la définition des systèmes à temps continue et discrète, ainsi que quelque définitions qui nous seront utiles pour la suite du cours.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 *Un système dynamique est un modèle qui évolue dans le temps, par exemples :*

- *Réaction chimique.*
- *Mouvement d'une planète.*
- *Évolution d'une population.*

Définition 1.1.2 *Soit X un éspace métrique de $\mathbb{R}^n$ et soient $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ et*

$$f : X \times T \to X$$
$$(x,t) \mapsto f(x,t)$$

une fonction de classe C^1.

(X, T, f) *est appellé système dynamique s'il vérifier :*

1. $\forall x \in X,\ f(x, 0) = x,$

2. $\forall x \in X,\ \forall t_1, t_2 \in T,\ f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2),$

avec

X : Espace de phase.

T : Espace temporelle.

f *: Flot (Fonction d'évolution de système).*

Si $T = \mathbb{R}$ *le système dynamique* (X, T, f) *est dit* ***continue***.

Si $T = \mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{N}$ *le système dynamique* (X, T, f) *est dit* ***discret***.

Exemple 1.1.1 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y \\ y = y(t) \\ y(0) = x,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a :

$$y' = y \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dt \Rightarrow \exp(\ln y) = \exp(t + c)$$

$$\Rightarrow y(t) = k\exp(t)$$

$$y(0) = k\exp(0) = x \Rightarrow k = x$$

$$y(x, t) = x\exp(t)$$

1. $y(x, 0) = x\exp(0) = x$

2. $y(y(x, t_1), t_2) = y(x\exp(t_1), t_2) = x\exp(t_1)\exp(t_2) = x\exp(t_1 + t_2) = y(x, t_1 + t_2).$

Donc notre système est un système dynamique.

1.2 Systèmes dynamiques à temps continues.

Dans le cas générale un système dynamique à temps continue, peut être représenter par une équation différentielle.
Selon l'équation on distingue quelques types :

- Système autonomes : $x' = f(x),\ x(t_0) = x_0$.
- Système non-autonomes : $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$.

Exemple 1.2.1 *On considère le modèle du pendule*

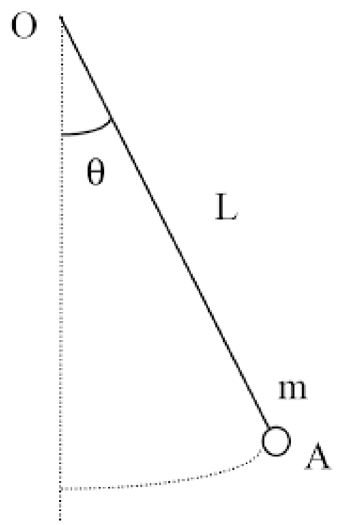


FIGURE 1.1 – Modèle du pendule

Une masse ponctuelle m attachée à une tige rigide de longueur fixe l dans un plan vertical (x, z).
On note $\theta(t)$, *l'angle entre la tige et la verticale à l'instant* t, *l'équation s'écrit :*

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin(\theta) - kl\frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta(0) = \theta_0 \tag{1}$$

$$\theta'(0) = \theta_1.$$

On peut écrire l'équation (1) *comme suite :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \beta & ;\beta(t) = \dfrac{d\theta}{dt} \\ \\ \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin(\theta) - \dfrac{k}{m}\beta & ;\dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt} \end{cases}$$

1.3 Systèmes dynamiques à temps discrets

Définition 1.3.1 *Un système dynamique discret, noté* $(X, \mathbb{N}, f)$ *tel que* $f \in C^1$ *sur un ouvert* $X \subset \mathbb{R}^n$*, est une relation de la forme :*

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Ainsi, on a

$$x_n = f^n(x_0)$$

où

$$f^n(x) = fofo\ldots of(x),\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } f^o = Id.$$

Exemple 1.3.1 *Supposons que nous avons une population des lapins qui au début de notre expérience compte* x_0 *lapin, nous savons que dans une année la population augmente de* 10%*. Notons par* x_n *le nombre de lapins de la* $n^{ème}$ *année.*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 0.1x_0 = 1.1x_0 \\ x_2 &= x_1 + 0.1x_1 = 1.1x_1 \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_n + 0.1x_n = 1.1x_n. \end{aligned}$$

1.4 Échantillonnage : passage de temps continue à temps discret

Il existe plusieurs techniques de discrétisation (échantillonnage) des systèmes. On peut considérer comme un exemple simple, la méthode d'Euler.
Soit l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\dot{x} = f(x).$$

Nous voulons étudier la trajectoire de cette équation seulement à des instants choisit

$$t_n = t_0 + n\Delta t.$$

Si la période d'échantillonnage Δt est choisit assez petite on peut approcher la dérivée de $x(t)$ par la différence

$$\dot{x} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta t}.$$

Alors le système dynamique à temps continue peut être approché par le système dynamique discret suivant :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x).$$

1.5 Notion d'orbite d'un système

Définition 1.5.1 *Soit $(X, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret, on appelle orbite (où trajectoire) du système :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \ n \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La suite

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, \ x(1) = f(x(0)), \ \ldots, \ x(n+1) = f(x_n), \ldots\}.$$

Définition 1.5.2 (Ensemble w-limite) *Soit $x \in X$, l'ensemble w-limite de x, noté $W(x)$:*

$$W(x) = \{y \in X,\ \forall \epsilon > 0,\ \forall t_0 \in \mathbb{R}^+,\ \exists t \geq t_0,\ d(f(x,t),y) < \epsilon\},\ d \text{ est une distence de } \mathbb{R}^n.$$

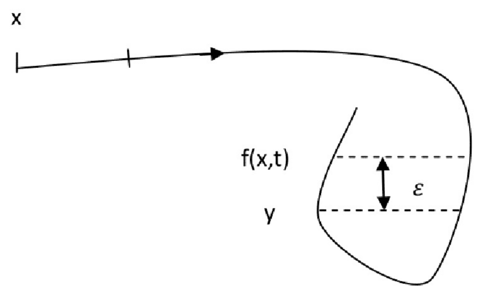


Figure 1.2 – Ensemble w-limite

Exemple 1.5.1 *Soit $(X, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret de dimension 1 définie par la fonction*

$$f(x) = x^2,\ sur\ \ [0, +\infty[.$$

Prenons pour la condition initiale $x_0 = \frac{1}{2}$, l'orbite correspondante est,

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = \frac{1}{2} \\ x(1) &= f(x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ x(2) &= f(x(1)) = \frac{1}{16} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} x(n) &= f(x(n-1)) = f^n(x(0)) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Prenons un autre point initiale ; $x_0 = 2$ *alors*

$$\begin{aligned} x(0) &= 2 \\ x(1) &= f(x(0)) = 4 \\ x(2) &= f(x(1)) = 16. \end{aligned}$$

Dans ce cas quand $n \to +\infty$ *on a ;*

$$x(n) = f(x(n-1)) = f^n(x(0)) = 2^{2n} \longrightarrow +\infty.$$

Enfin si on choisit un point initial $x_0 = 1$*, on voit que :*

$$O(x_0) = \{1,\ 1,\ x(n) = 1^{2n} = 1,\ \ldots\}.$$

On observe donc trois comportements différents du même système en fonction du point initial choisi.

1.6 Points fixes, points périodiques

Définition 1.6.1 *On appelle point fixe d'un système dynamique discret* $(X, \mathbb{N}, f)$ *tout point* x_s *tel que :*

$$x_s = f(x_s).$$

Par fois, ces points sont appellés aussi points stationnaires ou points d'équilibres.

Exemple 1.6.1 *Revenons au système de l'exemple précédent ;* $x(n+1) = x^2(n),\quad x(0) = x_0$

$$\begin{aligned} f(x_s) = x_s &\Rightarrow x_s - x_s^2 = 0 \\ &\Rightarrow x_s(1 - x_s) = 0. \end{aligned}$$

Donc les points d'équilibres sont $x = 1$ *et* $x = 0$*.*

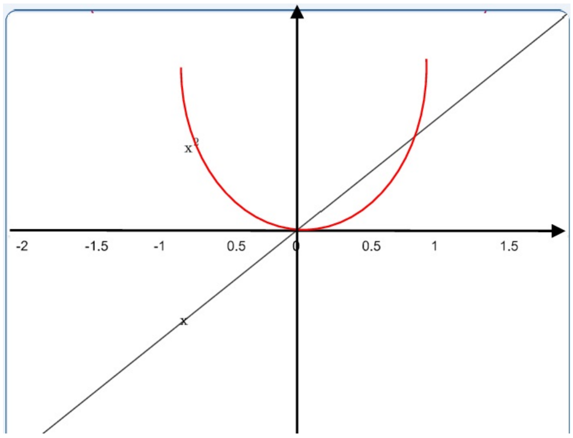


FIGURE 1.3 – Les points fixes de $f(x) = x^2$

Définition 1.6.2 *Une orbite $O(x_0)$ s'appelle périodique s'il existe un $p > 0$ tel que*

$$x(n+p) = x(n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un $p > 0$ et $N > 0$ tel que l'égalité (1) est vérifié pour tout $n \geq N$.

Exemple 1.6.2 *Soit le système :*

$$x_{n+1} = x_n^2 - 1, \ x_0 = 1.$$

$$x_1 = f(x_0) = 0$$
$$x_2 = f(x_1) = -1$$
$$x_3 = f(x_2) = 0 = x_1.$$

Donc le système est périodique de période 3.

1.7 Équivalence topologique des systèmes

Dans cette section, nous nous intéressons à la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est trés importante pour l'étude des systèmes dynamiques, notamment pour les comportements complexes.
Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \to D$, $g : E \to E$ deux applications.

Définition 1.7.1 *Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques.*
On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective)

$$h : D \longrightarrow E \text{ tel que } hog = goh$$

cette équivalence peut être écrit :

$$(D, f) \sim (E, g).$$

Le théorème suivant montre l'importance de cette définition

Théorème 1.7.1 *Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques.*
Supposons qu'ils sont topologiquement conjugués par l'homéomorphisme $h : D \to E$ alors :

a) *L'application $h^{-1} : E \to D$ vérifie aussi la définition 1.7.1 est assure donc l'équivalence topologique entre les systèmes (D, f) et (E, g).*
b) *$hof^{(n)} = g^{(n)}oh$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
c) *Si $p \in D$ est un point périodique de f de période fondamentale k (ordre d'orbite périodique) alors $h(p) \in E$ est un point périodique de g de période fondamentale k.*

Exercices du chapitre 1

Exercice 1.7.1 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} y' = t + y \\ y(0) = x \end{cases} \tag{1}$$

1) *Trouver la solution de ce problème* (1).
2) *Vérifier est-ce-que ce problème* (1) *est un système dynamique.*

Exercice 1.7.2 *Consédérons l'équation aux différences suivante :*

$$\begin{cases} x(k+2) + x(k) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

- *Trouver la solution générale de cette équation.*

Exercice 1.7.3 *Soit la fonction* $f(x) = x^2 - 2$

1) *Trouver les points fixes de* f.
2) *Tracer le graphe de* f *et ces points fixes.*

Exercice 1.7.4 *Soit le système dynamique discret engendré par :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 2 \end{aligned}$$

1) *Pour* $k = 1,\ k = 2$ *déterminer les k-cycles de ce système.*
2) *Etudier leurs stabilité.*
3) *Soit* $I = [-2, 2]$, *vérifier que toute les k-cycles* $(k = 1,\ 2) \in I$.
4) *Montrer que* $f(I) = I$.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques discrets du premier ordre unidimensionnel

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés locales et globales du système dynamique discret du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ \\ x_0 \ \text{donné} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

où ;

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
- $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ la valeur initial .
- $x \in D$ valeur des états du système.

On s'intéresse surtout au comportement des orbites autour des points fixes et des orbites périodiques.

Premièrement on donne quelques rappels sur les propriétés des fonctions différentiables.

Théorème 2.0.1 *Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$.*

Alors ; il existe un point $c \in [a, b]$ tel que ;

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

Théorème 2.0.2 *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, supposons que g est dérivable dans tout les points de l'intervalle $[a, b]$ sauf éventuellement en nombre fini de points, alors ; pour tout $(x, y) \in [a, b]$, il existe un point $c \in [x, y]$ tel que ;*

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)||x - y|.$$

Les deux théorèmes qui suivent peuvent être utilisés pour analyser l'existence des points fixes.

Théorème 2.0.3 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et soit $g : I \to I$ une fonction continue. Si $I \subseteq g(I)$ alors g a un point fixe dans l'intervalle I.*

Théorème 2.0.4 *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$, supposons que $|g'(x)| < 1,\ \forall x \in [a, b]$ alors ; la fonction $g(x)$ a un unique point fixe x_0 dans $[a, b]$.*

2.1 Stabilité des points fixes et des orbites périodiques

2.1.1 Stabilité des points fixes :

Définition 2.1.1 *On dit que le point fixe x^* d'un système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ est stable si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \textit{tel que si } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |f^{(n)}(x_0) - x^*| < \epsilon.$$

Autrement dit, toutes les orbites qui commencent prés du point x^* restent dans un voisinage de ce point.

$$x_0 \in U_\delta(x^*) = \{y : |y - x^*| < \delta,\ \delta > 0\} \Rightarrow f^{(n)}(x_0) \in U_\delta(x^*).$$

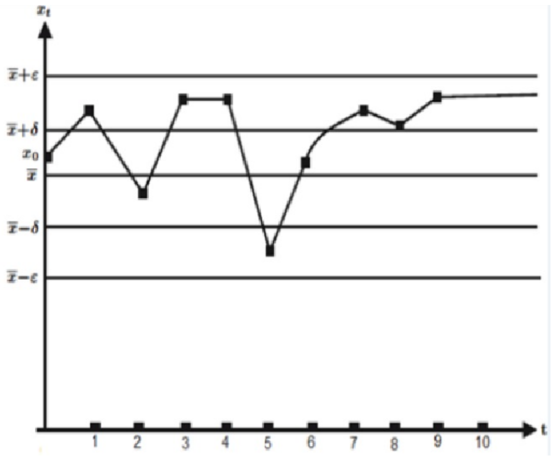


FIGURE 2.1 – Point fixe stable

Définition 2.1.2 *On dit que le point fixe x^* est localement asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $U_\epsilon(x^*)$ un voisinage de x^* tel que :*

$$\forall x_0 \in U_\epsilon(x^*), \ \lim_{n\to+\infty} x_n = x^*.$$

Définition 2.1.3 *On dit que le point x^* est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

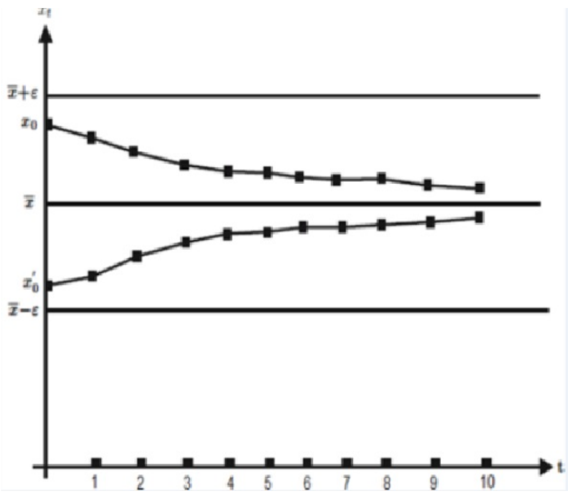


FIGURE 2.2 – Point fixe localement asymptotiquement stable

Remarque 2.1.1 *La stabilité globale d'un point fixe implique l'unicité du point fixe et la stabilité locale implique l'unicité locale du point fixe.*

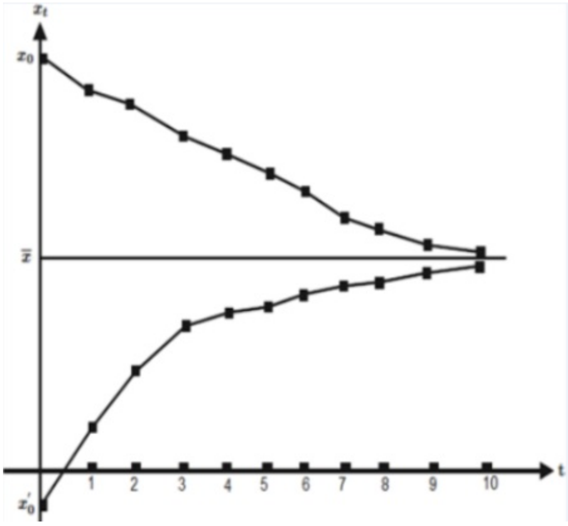


FIGURE 2.3 – Point fixe globalement asymptotiquement stable

Définition 2.1.4 *Un point fixe s'appelle instable s'il existe un* $\epsilon > 0$ *tel que* $\forall r > 0$ *il existe un* $x_0 \in U_r(x^*)$ *et il existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$|f^(n)(x_0) - x^*| > \epsilon.$$

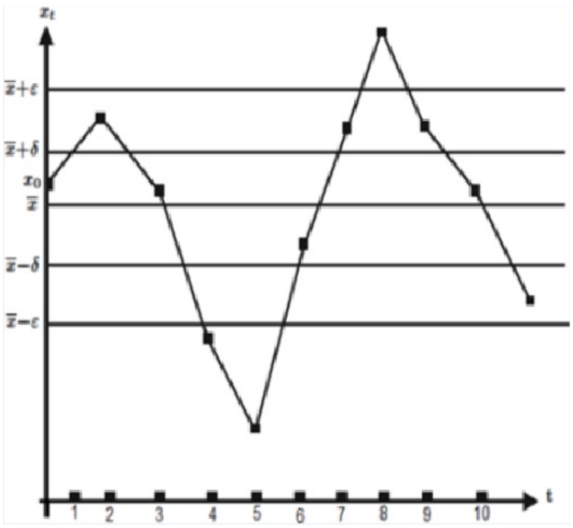


FIGURE 2.4 – Point fixe instable

Exemple 2.1.1 *Soit* $f(x) = x + x^3$.
Le système dynamique discret a un seul point fixe $x^* = 0$

$$\begin{aligned} Si\ x > 0,\ \ x &= 1 \Rightarrow f(1) = 2 \\ &\vdots \\ x &= n \Rightarrow f(n) \to +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Si\ x < 0,\ \ x &= -1 \Rightarrow f(-1) = -2 \\ &\vdots \\ x &\to n \Rightarrow f(n) \to -\infty \end{aligned}$$

Donc x^* *est instable.*

2.1.2 Stabilité des orbites périodiques :

Définition 2.1.5
- x_p *est une orbite périodique de période r si :* $f^r(x_p) = x_p$.
- *Un point périodique de période r est un point fixe de* $f^{(r)}$.
- *L'orbite périodique* $O(x_p)$ *s'appelle stable (resp. instable) si chacun de ses points est un point fixe stable (resp. instable) de* $f^{(r)}$..

Exemple 2.1.2 *Soit*

$$f(x) = 1 - x,$$
$$f(f(x)) = 1 - (1 - x) = x = f^{(2)}(x).$$

Chaque point $x \neq \frac{1}{2}$ *est un point périodique de période* (2).
L'orbite $O(x) = \{x,\ 1 - x\}$ *est un orbite stable.*

2.2 Systèmes dynamiques discrets linéaires

Définition 2.2.1 *Un système dynamique linéaire d'ordre* 1 *est définie par l'équation aux différence suivante :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + b \\ & n \in \mathbb{N} \\ x_0 \ \ \textit{donné} \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- $a, \ b \in \mathbb{R}$ *des constantes.*
- $x_n \in \mathbb{R}$ *variable d'état.*
- x_0 *valeur initiale.*

Proposition 2.2.1 *Le point fixe du système dynamique* (2.1) *existe si et seulement si*

$$a \neq 1 \ \textit{ou} \ (a = 1 \ \textit{et} \ b = 0).$$

2.3 Systèmes dynamiques discrets non linéaires

Définition 2.3.1 *Un système dynamique discret non linéaire est définie par l'équation aux différence suivante :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ & n \in \mathbb{N} \\ x_0 \ \ \textit{donné} \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable et* $x_n \in \mathbb{R}$.

La question principale qui se pose ici est de savoir si le système (2.2) *possède un seul point fixe ou plusieurs et quelle est la nature de ces points. Il s'agit donc de décrire le comportement du système* (2.2).

2.3.1 Stabilité des points fixes et des orbites périodiques.

Il n'est pas facile de trouver les solutions des systèmes non linéaires. Souvent, ces solutions ne fournissent pas suffisamment d'informations sur les facteurs qui contrôlent la stabilité du système.
Par conséquent, nous avons besoin de méthodes analytiques pour faciliter l'étude du comportement de ce système non linéaire.

L'approximation linéaire du système non linéaire est l'un des moyens les plus éfficaces pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires.

Méthodes de linéarisation :

Soient $x^* \in X/\ f(x^*) = x^*,\ f \in C^1(X)$ et $x \in U(x^*)$ voisinage de x^*.
Le développemnt de Taylor d'ordre 1 de $f(x_n) = x_{n+1}$ au voisinage de x^* est :

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + O(x_n - x^*)$$

alors ;

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\simeq f'(x^*)x_n + f(x^*) - f'(x^*)x^* \\ &= ax_n + b \end{aligned}$$

où

$$a = f'(x^*) \text{ et } b = f(x^*) - f'(x^*)x^*.$$

Étant donné que le système linéaire n'approche pas du comportement du système non linéaire que dans un voisinage suffisamment petit d'un point fixe.
L'analyse globale du système linéaire ne donne qu'une analyse locale de système dynamique non linèaire .

Stabilité :

- Le point d'équilibre x^* de (2.2) est localement asymptotiquement stable si et seulement si
$$|f'(x^*)| < 1, \quad \text{(attractif).}$$
- Le point d'équilibre x^* de (2.2) est instable (répulsif) si et seulement si
$$|f'(x^*)| > 1.$$
- Si $|f'(x^*)| = 1$, x^* est dit point fixe indifférent (marginal).

Exemple 2.3.1 *Soit $f(x) = x^2$,*
Les points fixes sont $x^* = 0$ et $x^* = 1$

$$f'(x^*) = 2x^* \Rightarrow x^* = 0 \longrightarrow f'(x^*) = 0 < 1 \textit{ stable}$$
$$x^* = 1 \longrightarrow f'(x^*) = 2 > 1 \textit{ instable}$$

Stabilité du point fixe non hyperbolique :

Définition 2.3.2 *Un point fixe x^* de* (2.2) *est dit hyperbolique si on a*

$$|f'(x^*)| \neq 1.$$

Théorème 2.3.1 *Soit x^* un point fixe du système* (2.2) *avec $f \in C^3$ et $f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) = 0$ donc ;*

- *Si $f^{(3)}(x^*) > 0$ alors x^* est instable*
- *Si $f^{(3)}(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable.*

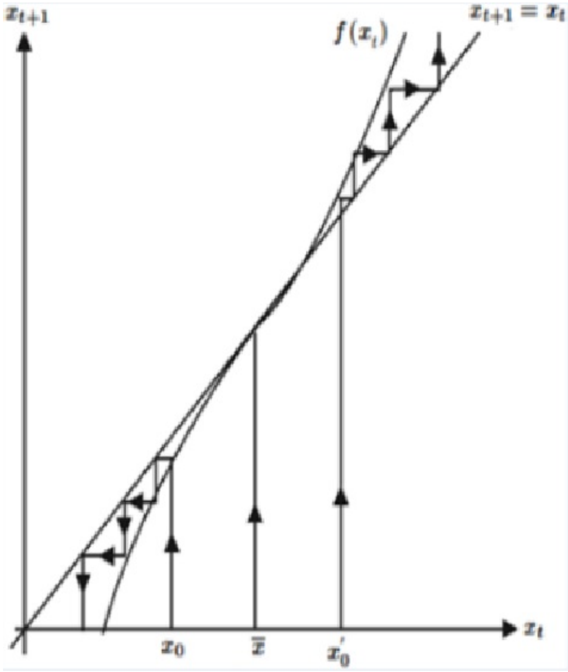


FIGURE 2.5 – Point fixe instable

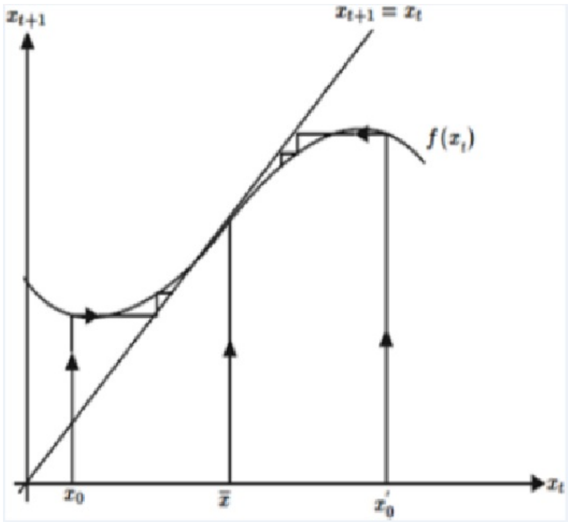


FIGURE 2.6 – Point fixe stable

Exemple 2.3.2 *Soit le système* $x_{n+1} = x_n^3 + x_n$*, on a :*

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow (x^*)^3 + x^* = x^* \Leftrightarrow x^* = 0.$$

Alors, l'unique point fixe de ce système est $x^* = 0$.

D'autre part on a :

$$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0 \text{ et } f'''(0) = 6 > 0.$$

Donc le point fixe $x^* = 0$ *est instable.*

Théorème 2.3.2 *Soit* x^* *est un point fixe du système* (2.2) *avec* $f \in C^2$ *;*

- *Si* $f'(x^*) = 1$ *et* $f''(x^*) \neq 0$ *on a,* x^* *est instable.*
- *Si* $f'(x^*) = 1$ *et* $f''(x^*) > 0$*, on dit que* x^* *est un point fixe semi-stable à gauche.*
- *Si* $f'(x^*) = 1$ *et* $f''(x^*) < 0$*, on dit que* x^* *est un point fixe semi-stable à droite.*

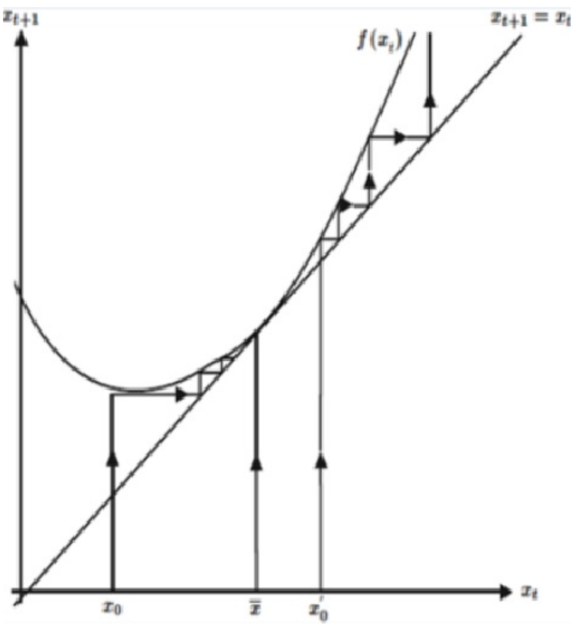


Figure 2.7 – Point fixe semi-stable à gauche

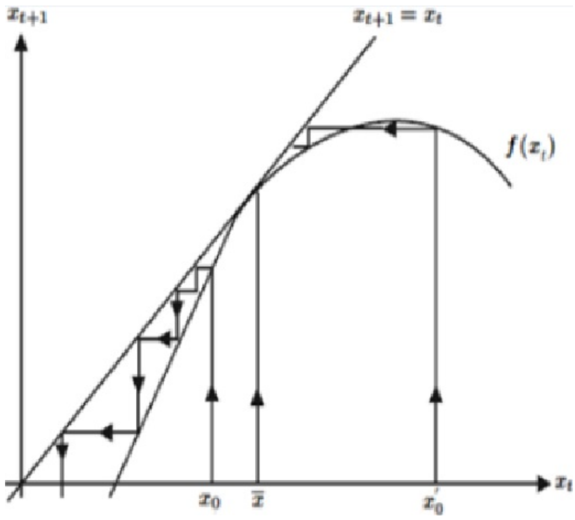


FIGURE 2.8 – Point fixe semi-stable à droite

Définition 2.3.3 *La dérivée Schwartizienne d'une fonction $f \in C^3$ est définie par :*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

Théorème 2.3.3 *Si x^* est un point fixe du système (2.2) avec $f \in C^3$ et $f'(x) = -1$ alors ;*

- *Si $Sf(x^*) > 0$ alors x^* est instable.*
- *Si $Sf(x^*) < 0$ alors x^* est localement asymptotiquement stable.*

Exemple 2.3.3 *Soit le système dynamique $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$, on a*

$$\begin{aligned} f(x^*) = x^* &\Leftrightarrow (x^*)^2 + 3x^* = x^* \\ &\Leftrightarrow x^* = 0 \text{ ou } x^* = -2. \end{aligned}$$

D'autre part ona : $f'(0) = 3 > 1$.

Le point fixe $x^* = 0$ est instable

$f'(-2) = -1$ et $Sf(-2) = -6 < 0$

alors on déduit que le point fixe $x^* = -2$ est asymptotiquement stable.

Stabilité d'un cycle d'ordre $r \geq 2$ **:**

Soit x_i un des points du r-cycle, $i = \overline{1,n}$ vérifie ; $f^r(t_0) = x_i$.
On utilise la même méthode du point fixe ;

$$\alpha = f^{(r)'}(x_i) = \prod_{j=1}^{r} f(x_j)$$

$$(fof)'(x) = f'(f(x)).f'(x).$$

1) $|\alpha| < 1$ le r-cycle est attratif (stable).
2) $|\alpha| > 1$ le r-cycle est repulsif (instable).
3) $|\alpha| = 1$ le r-cycle est indéférent.

Exemple 2.3.4 *Soit* $f(x) = x^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (x^2-1)^2 - 1 = x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1. \end{aligned}$$

Le point fixe $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Le cycle d'ordre 2, $\{x_3 = 0,\ x_4 = -1\}$
$\alpha = f(0).f'(-1) = 0 < 1$ *stable.*

Théorème de Sarkovsky :

Théorème 2.3.4 *Soient* $I = [a,b]$ *un intervalle et* $f : I \to I$ *une fonction continue alors si le système dynamique correspondant possède une orbite périodique de période* 3*, il possède des orbites de toutes les périodes.*

Définition 2.3.4 *Notons* $">"$ *la relation d'ordre.*

L'ordre de Sarkovsky est définit comme suit ;

$$3 > 5 > 7 > \ldots$$

$$\ldots > 2 \times 3 > 2 \times 5 > 2 \times 7 > \ldots$$

$$\ldots > 2^2 \times 3 > 2^2 \times 5 > 2^2 \times 7 > \ldots$$

$$\vdots$$

$$\ldots > 2^n \times 3 > 2^n \times 5 > 2^n \times 7 > \ldots$$

.

Théorème 2.3.5 ***(Théorème de Sarkovsky)*** *Soit f une fonction continue, supposons que le système dynamique discret possède une orbite périodique de période n, alors pour tout n tel que $n > m$, ce système possède une orbite périodique de période m.*

Exercices du chapitre 2

Exercice 2.3.1 *Soit le système dynamique discret ;*

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 - 1.$$

1) *Trouver les points fixes de ce système.*
2) *Trouver le cycle d'ordre* 3 *de ce système puis déterminer leur stabilité.*

Exercice 2.3.2 *Soit le système dynamique discret* $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, P)$ *tel que :*

$$P(x, q) = -x^3 + \frac{2}{3}x + q, \qquad q \in \mathbb{R}.$$

1) *Pour quelles valeurs de q y-a-t'il un point fixe qui vérifie* $P'(x) = 0$.
2) *Etudier la stabilité de chacun d'eux.*

Exercice 2.3.3 *Soit le système dynamique :*

$$x_{n+1} = -x^3 + x_n.$$

- *Trouver l'unique point fixe de ce système et déduit la stabilité de ce point.*

Chapitre 3

Systèmes dynamiques discrets du premier ordre bi-dimensionnelles

Dans ce chapitre, nous étudions les systèmes dynamiques de dimension deux.

3.1 Systèmes dynamiques discrets linéaires

Définition 3.1.1 *Un système dynamique discret linéaire de dimension* 2 *est un système de deux équations aux différences linéaires d'ordre* 1 *i.e :*

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n + B \\ \\ X_0 \;\; \textit{donnée} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}^2)$$

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \;\; X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

3.1.1 Points fixes

Définition 3.1.2 *Un point fixe d'un système dynamique discret $X_{n+1} = f(X_n)$ est $X^* \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$X^* = f(X^*), \text{ ou } X^* = (x_1^*, x_2^*)^t.$$

3.1.2 Stabilité des points fixes

Théorème 3.1.1 *Pour toute matrice A de taille $n \times n$ il existe une matrice P de taille $n \times n$ non singulière tel que $A = PJP^{-1}$ où J est une matrice diagonale par bloc c-à-d :*

$$J = \begin{pmatrix} j_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j_{\lambda_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & j_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

La matrice J est appelée forme normale de Jordan et

$$J_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

s'appelle bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_k de A.
Alors pour tout $n = 2$ on peut appliquer ce théorème pour notre système dynamique discret de dimension deux

$$A = PJP^{-1}, \ J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et P est une matrice 2×2 inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice A.

Proposition 3.1.1 *La solution de* (3) *est donnée par :*

$$X_n = PJ^tP^{-1}(X_0 - X^*) + X^*$$

ou J la matrice de Jordan.

Corollaire 3.1.1

- *Le système dynamique* (3) *est globalement asymptotiquement stable si et seulement si le module de chaque valeur propre de la matrice A est* ***inférieur à*** 1.
- *Le système dynamique* (3) *est instable si et seulement s'il existe une valeur propre de la matrice A est de module* ***supérieur à*** 1.

Exemple 3.1.1 *Soit* $F(X) = AX, \quad X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad F(X) = (ax + by,\ cx + dy)$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x \\ f_2(x, y) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a-1) + by = 0 \\ y(d-1) + cx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

le point fixe est $X^* = 0_{\mathbb{R}^2}$.

- *Pour*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,7,\ \lambda_2 = 0,2 < 1, \quad X^* = 0 \textit{ est un noeud stable.}$$

- *Pour*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 > 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2} < 1, \quad X^* \textit{ est un selle instable.}$$

3.2 Systèmes dynamiques discrets non linéaires

Définition 3.2.1 *Un système non linéaire discret de dimension* 2 *est donné par*

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix} \tag{4}$$

$f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ étant donné des fonctions continues, non linéaires.
Les solutions de ce système en particulier ne s'expriment pas, il est nécessaire de les caractériser à travers les singularités du système (4).

3.2.1 Stabilité des points fixes

Comme nous l'avons vu dans le cas d'un système dynamique de dimension 1, le système dynamique (4) peut être aussi approximé par un système linéaire.
On prend le développement de Taylor d'ordre 1 de $f(X_n) = X_{n+1}$ au voisinage de X^* ;

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= f(X_n) = f(X^*) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_{kn}}(x_{kn} - x_k^*) + O\Big(\| X_n - X^* \| \Big) \\ x_{n+1} &\simeq J_f(X^*)(X_n) + \Big(f_n(x^*) - \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_{kn}} \Big). \end{aligned}$$

Où ;

$$O\Big(\| X_n - X^* \| \Big) \underset{X_n \to X^*}{\longrightarrow} 0$$

$$\begin{cases} x_{n+1} - x^* = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(X^*)(x_n - X^*) + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(X^*)(y_n - y^*) \\ \\ y_{n+1} - y^* = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(X^*)(x_n - X^*) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(X^*)(y_n - y^*) \end{cases}$$

Aprés un changement de variable $X^{'} = X - X^{*}$, le point fixe se ramène à l'origine 0

$$\begin{cases} x^{'}_{n+1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(X^{*})x^{'}_n + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(X^{*})y^{'}_n \\ \\ y^{'}_{n+1} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(X^{*})x^{'}_n + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(X^{*})y^{'}_n \end{cases}$$

$$X^{'}_{n+1} = J_f X^{'}_b$$

ou J_f est la matrice Jacobienne de f en X^{*}.
Nous pouvons donc utiliser les résultats du système linéaire pour étudier la stabilité du système non linéaire au voisinage du point fixe X^{*}.
Ceci est basé sur les valeurs propres du Jacobienne $J_f(X^{*})$.

Théorème 3.2.1 *Soit le système* (4)*, on suppose que ce système a un point fixe* X^{*}

1) *Si tous les valeurs propres de la matrice Jacobienne J ont des modules strictement inférieurs à l'unité, alors le point fixe X^{*} du système* (4) *est localement asymptotiquement stable.*
2) *Si J admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité alors le point fixe X^{*} est instable.*
3) *Si certaines valeurs propres de la matrice J sont sur le cercle du rayon de l'unité, on ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe X^{*}.*

3.3 Méthode de Liapunov

Définition 3.3.1 *Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La variation de V par rapport au système dynamique* (4) *est définie par :*

$$\begin{aligned} \Delta V(X_n) &= V(f(X_n)) - V(X_n) \\ &= V(X_{n+1}) - V(X_n). \end{aligned}$$

Définition 3.3.2 *Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction V de G vers $\mathbb{R}$ est une fonction de*

Liapunov sur l'ensemble G si :

1) *V est continue sur G.*
2) $\Delta V(X_n) \leq 0, \ \ \forall X_n, \ X_{n+1} \in G.$

Définition 3.3.3 *La fonction de Lyapunov V est dite définie positive au point fixe X^* s'il existe une boule ouverte $B_\epsilon(X^*)$ de centre X^* et de rayon ϵ telle que :*

1) $V(X^*) = 0.$
2) $V(X_n) > 0$ *pour tout* $X_n \in B_\epsilon(X^*), \ X_n \neq X^*.$

Théorème 3.3.1 *S'il existe V une fonction de Lyapunov sur une boule ouverte $B_r(X^*)$ définie positive au X^* , où X^* est le point fixe de* (4) *alors, X^* est stable si en plus,*

$$\Delta V(X_n) < 0, \ \forall X_n, \ X_{n+1} \in G, \ X_n \neq X^*$$

alors X^* est localement asymptotiquement stable.
Si cela est vrai quand $B_r(X^*)$ est étendu à tout $\mathbb{R}^n$ et $V(X) \to \infty$ alors X^* est globalement asymptotiquement stable.

Exemple 3.3.1 *Soit le système dynamique :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+y_n^2} \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+y_n^2} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{matrix} x^* = \dfrac{y^*}{1+y^{*2}} & \\ & \Leftrightarrow (x^*, y^*) = (0,0) \\ y^* = \dfrac{x^*}{1+y^{*2}} & \end{matrix}$$

On définit la fonction $V(x;y) = x^2 + y^2.$

On la fonction V est continue sur $\mathbb{R}^2$ *et*

$$V(X_{n+1}) = \frac{y_n^2}{(1+y^2)^2} + \frac{x_n^2}{(1+y^2)^2} = \frac{V(X_n)}{(1+y_n^2)^2} \leq V(X_n).$$

Donc V est une fonction de Liapunov.

On a aussi $V(X^*) = 0$ *et* $V(X_n) > 0, \ \forall X_n \in \mathbb{R}^2, \ X_n \neq X^*$.

Alors V est définie positive, alors le point fixe $(0,0)$ *est asymptotiquement stable.*

Exercices du chapitre 3

Exercice 3.3.1 *Soit le système dynamique discret :* $x_{n+1} = f(x_n)$ *tel que :*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \to (ax + y, bx) \end{aligned}$$

Etudier la stabilité des points fixes de ce système.

Exercice 3.3.2 *Soit*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \to (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$

1) *Trouver les points fixes de* f.
2) *Trouver la nature de ces points fixes.*
3) *Si* $\|x^{(0)}\|_2 = 1$, *trouver* $\|x^{(1)}\|_2$.

Chapitre 4

Théorie des Bifurcations

Soit le système dynamique discret :

$$X(n+1) = f(X(n), \lambda), \quad X(0) = X_0$$

- λ étant un paramètre réel.
- $f(x, \lambda)$ est une fonction continue.

Notre but est d'observer les changements éventuelles de dynamique, le changement de la dynamique signifie le changement des nombres des points fixes ou de leur comportement (la stabilité).

On supposera que f dépend continûment du vecteur (λ), la variation de λ peut entrainer des changements par exemple :

(1) Apparition/disparition points fixes, cycles,...

(2) Changement de stabilité, stable $\longrightarrow$ instable.

(3) Changement de type (point fixe, cycle).

Exemple 4.0.1 *Soit* $\quad f(\lambda, x) = \lambda x(1-x)$.
Pour $\lambda = 3$ *il y a un changement, apparition d'un cycle.*

$$\lambda < 3 \qquad \textit{on a zéro point fixe,}$$

$$\lambda = 3 \qquad \textit{on a un seul point fixe}$$

$$\lambda > 3 \qquad \textit{on a deux points fixes}$$

Les valeurs de λ pour lesquelles ces changements on lieu sont appelées valeur de Bifurcation "Bif".

Exemple 4.0.2 *Soit* $\quad f_c(x) = x^2 + x + c$

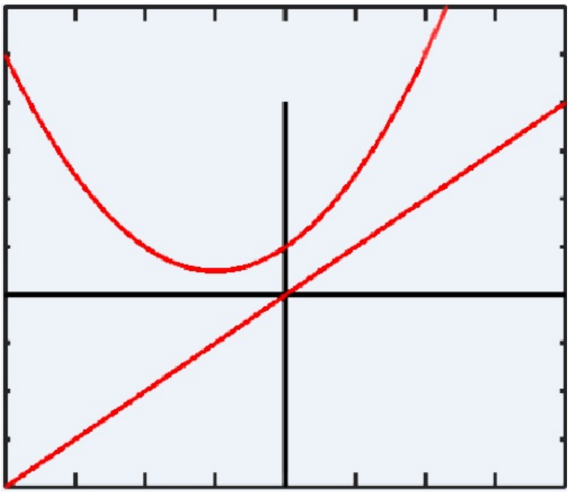


FIGURE 4.1 – $c = 0.5$ zéro point fixe

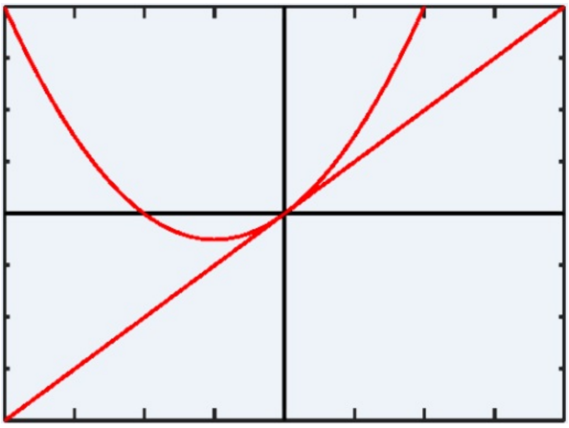


FIGURE 4.2 – $c = 0$ un seul point fixe

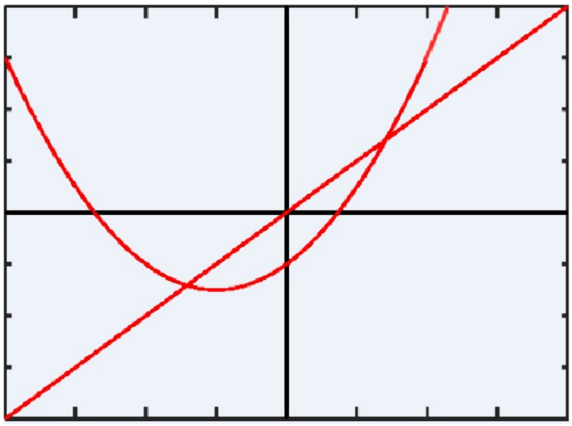


FIGURE 4.3 – $c = -0.5$ deux points fixes

4.1 Sur les Bifurcations les plus courantes

La théorie des bifurcations consiste à classer les différents types de bifurcations, dans cette section on présentra trois types de Bifurcations les plus courantes :

4.1.1 Bifurcation Fold (pli,noeud-col)

La Bifurcation fold est une bifurcation catastrophique, elle correspond à l'apparition/disparition de deux cycles d'ordre $k,\ k \geq 1$ de stabilité opposé.

Exemple 4.1.1 *Soit* $f_p(x) = x^2 + p.$

$$\begin{array}{lll} \textit{Pour} & p > \dfrac{1}{4} & \textit{il n'y a pas de points fixes.} \\ \textit{Pour} & p = \dfrac{1}{4} & \textit{il y a un seul point fixe.} \\ \textit{Pour} & p < \dfrac{1}{4} & \textit{il existe deux points fixes.} \end{array}$$

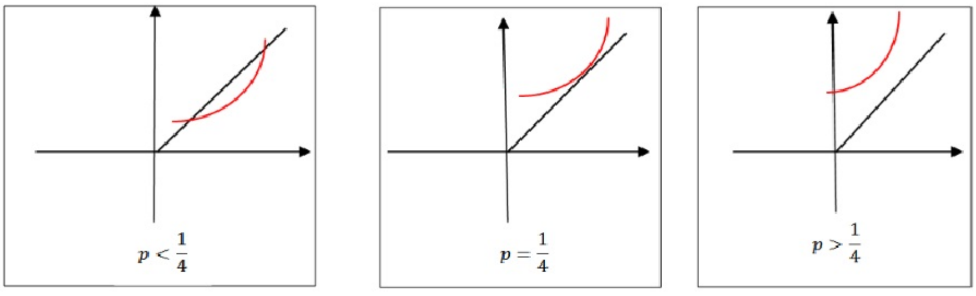


FIGURE 4.4 – Bifurcation pli. pour $x^2 + p$

4.1.2 Bifurcation Flip (doublement de période)

Cette bifurcation aura lieu lorsque un k-cycle stable devient instable et donne naissance à $2k$-cycle stable.

Exemple 4.1.2 *Soit* $f(x) = ax(1 - x)$.
Si $a = 3$ *au point fixe* $x_1 = \dfrac{a-1}{a}$ *on a une bifurcation Flip.*

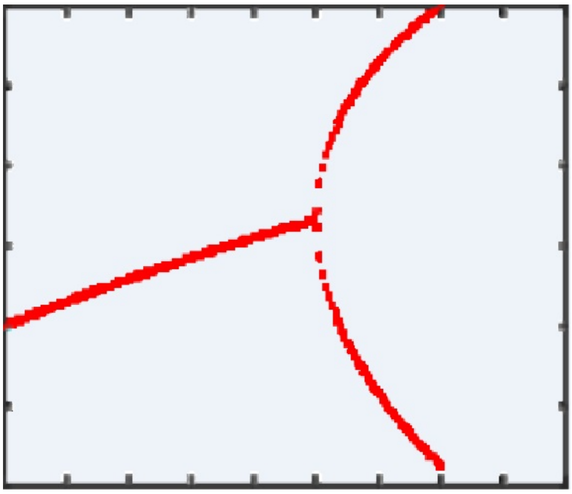


FIGURE 4.5 – Bifurcation Flip

4.1.3 Bifurcation Hopf (de Neimark-Sacker)

Elle se rencontre lorsque $\dim X \geq 2$.

Elle a lieu lorsque un k-cycle, (Foyer stable) a ses deux valeurs propres complexes, ce cycle devient (Foyer) instable et donne naissance à k-courbes fermées invariantes stable.

Exemple 4.1.3 *Dans la figure qui suive, on trouve une bifurcation de Neimark-Socker, Foyer stable.*

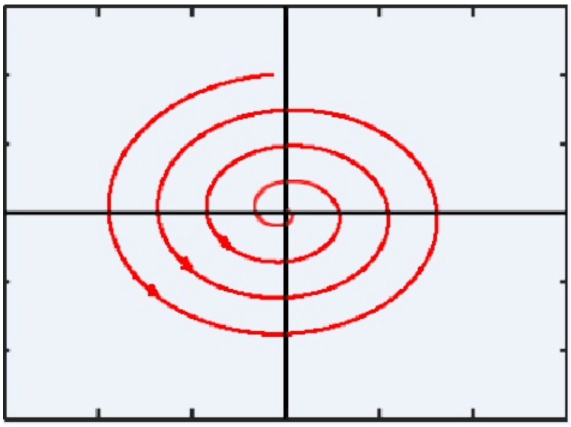


FIGURE 4.6 – Bifurcation Hopf

4.2 Notion d'attracteur

Définition 4.2.1 *Soientt* (X, T, f) *un système dynamique,* $X \subseteq \mathbb{R}^n$*, et* $S \subset X$*,* S *est compact.* *S est appelé attracteur s'il :*

$$\exists V = \mathcal{V}(S)/\forall x \in \mathcal{V},\ \mathcal{O}(x) \equiv S$$

ou

$\mathcal{V}$ est un voisinage de V

$\mathcal{O}$ est un orbite.

Définition 4.2.2 *Soient* $(X, \mathbb{N}, f)$ *un système dynamique discret et* $A \subset X$*.*

A est un attracteur si :

(1) $\exists V = \mathcal{V}(A)/\ f(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$.

(2) $\forall x \in \mathcal{V}/\ f(x) \longrightarrow y \in A$.

(3) $\exists x \in A/\ f(x, \mathbb{N}) = A$ *(danse dans A).*

Exemple 4.2.1 *Attracteur de Hénon* (1976)

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

Bassin d'attracteur :

Définition 4.2.3 *Soit A un attracteur d'un système dynamique. Le bassin d'attraction de A noté $B(A)$, est l'ensemble des points de l'espace des phases tel que : toutes les trajectoires qui sont issues convergent asymptotiquement vers A.*

$$B(A) = \left\{ x \in X/\ w(x) \subset A \right\}.$$

Exemple 4.2.2 *Soit* $f(x) = x^2.$
Les points fixes sont : $\left\{ 0 \textit{ attractif},\ 1 \textit{ répulsif} \right\}$

$$B(\{0\}) = \left\{ x \in \mathbb{R},\ f_k(x) \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \ x^{2k} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Remarque 4.2.1 *Il existe d'autres types de bifurcations comme par exemple la bifurcation contacte qui apparait lorsque un attracteur rentre au contacte avec la frontière de son bassin d'attraction.*

Exercice du chapitre 4

Exercice 4.2.1 *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \Big(-(\beta+1)x + x^2 y + \alpha, \beta x - x^2 y \Big) \end{aligned}$$

1) *Montrer qu'il existe un point fixe* $\left(\alpha, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ *et étudier la stabilité de ce point fixe.*
2) *Déduire la présence d'une bifurcation Hopf.*

Exercice 4.2.2 *On considère le système* $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, P)$ *définie par :*

$$P(x, q) = -x^3 + \frac{2}{3}x + q,\ q,\ x \in \mathbb{R}.$$

1) *Pour quelles valeurs de q y-a t'il un point fixe qui vérifie* $P'(x) = 0$.
2) *Pour quelles valeurs de q y-a t'il une bifurcation de type Flip.*
3) *Déssiner le diagramme de bifurcation pour* $q = 1$.

Exercice 4.2.3 *Soit le système dynamique discret* $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, f_c)$ *engendré par l'application :*

$$f_c(x) = \exp(x + c),\ c \in \mathbb{R}$$

1) *Déterminer un homéomorphisme* $L(x) = ax + b$ *tel que* $f_c(x)$ *soit conjugué topologiquement à* $g_c(x) = \exp(x) + c$.
2) *Trouver une valeur de bifurcation du système initiale et déterminer son type.*
3) *Donner une interprétation graphique sommaire des conditions d'apparition de cette bifurcation.*

Chapitre 5

Introduction à la théorie du chaos

La théorie du chaos, issue des travaux fondamentaux d'Edward Lorenz et prolongée par quelques mathématiciens et physiciens des années 1975.

La théorie du chaos d'écrit le comportement de certains systèmes dynamiques déterministes (c'est-à-dire : l'existence d'une condition initiale, l'existence et l'unicité de la solution).

On observe ce comportement chaotique dans une variété des systèmes dynamiques : circuit électrique, laser, réaction chimique,. . . etc.

5.1 Propriétés caractéristiques des systèmes chaotiques.

5.1.1 Sensibilité aux conditions initiales.

Les systèmes chaotiques sont extrêmement sensibles aux perturbations.

Définition 5.1.1 *On dit que $f : D \to D$ a une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\forall x \in D,\ \forall \delta > 0,\ \exists y \in D \text{ et } n \in \mathbb{N},\ d(x,y) < \delta \text{ et } d\Big(f^n(x), f^n(y)\Big) > \epsilon.$$

Il existe des systèmes dynamiques qui ont des attracteurs qui possèdent les propriétés suivantes ; deux trajectoires issu deux points de départ proche se separe aprés certain temps, ce phynomène est appellé sensibilité aux conditions initiales (S.C.I).
Si un attracteur possède ces propriétés est dit chaotique (strange).

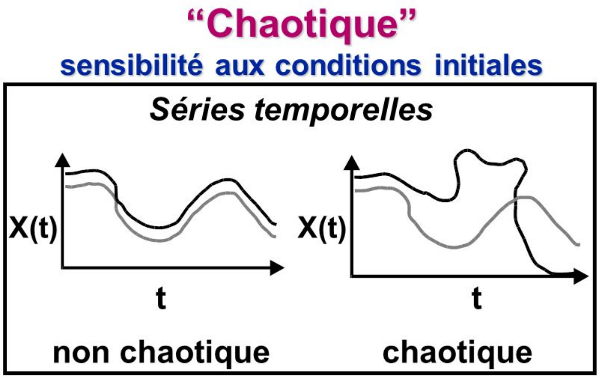


FIGURE 5.1 – Sensibilité aux conditions initiales

5.1.2 La divergence exponentielle.

Deux trajectoires (orbites) des phases initialement voisines s'écartent de manière exponentielle (exposant de Lyapunov).

5.2 Quelques éléments de base d'un attracteur étrange.

5.2.1 Orbite sensible aux conditions initiales.

Une des conséquences directes de la dépendance sensible des conditions initiales est l'instabilité de toutes les orbites du système sur l'attracteur.

Définition 5.2.1 *Soit un système dynamique discret définie par la fonction $f : D \to D$. L'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite sensible aux conditions initiales si :*

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall x \in A \subset X,\ \exists y \in A,\ \forall \delta > 0,\ d(x_0, y_0) \leq \delta \Rightarrow d\big(\mathcal{O}(x_0), \mathcal{O}(y_0)\big) > \epsilon.$$

Où A est l'attracteur considéré.

Exemple 5.2.1 *Soit l'attracteur de Hénon définit par la fonction*

$$f(x, y) = (1 + y - ax^2, bx), \quad b \textit{ fixe} = 0,3$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

- $a = 0,1$ *on a un point fixe*
- $a = 0,5$ *on a* 2*-cycle*
- $a = 1,054$ *on a* 16*-cycle*
- $a = 1,4$ *attracteur chaotique*

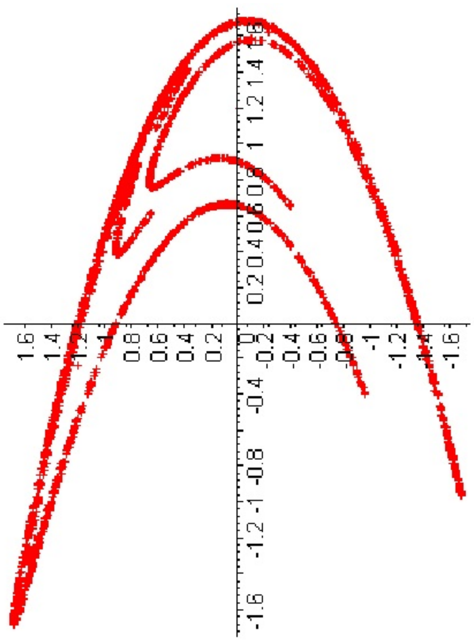


FIGURE 5.2 – Attracteur de Hénon

On utilisant le Matlab :

$$a = 1,4$$

$$b = 0,3$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$For\ n = 1 : 1 : 1000$$

$$X(n+1) = 1 + Y(n) - a * X(n)12$$
$$Y(n+1) = b * X(n)$$

$$end\ plot\ (X, Y,' r')$$

5.2.2 La dimension fractale

Si l'attracteur est un point sa dimension est 0, si l'attracteur est une ligne ou une courbe fermé sa dimension est 1 et ainsi de suite. Mais il y a un autre genre d'attracteur qui a une forme inhabituelle, une structure géométrique fractale.

Définition 5.2.2 *Soit l'espace A, on recouvre l'espace A au moyen d'une réunion dénombrable de parties notées A_i, chacune étant de diamètre inférieur à r.*
On introduit la quantité :

$$H_r^s(A) = \inf_{diam(A_i)<r} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} diam(A_i)^s / \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

D'où la définition :

$$H^s(X) = \lim_{r \to 0} H_r^s(X).$$

H^s s'appelle mesure de Hausdorff s-dimensionnelle .
La dimension de Hausdorff de $A \subset \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$D_H = \sup \left\{ s,\ H^s(A) = +\infty \right\} = \inf \left\{ s,\ H^s(A) = 0 \right\}.$$

Définition 5.2.3 *Un ensemble A est fractale si sa dimension de Hausdorff n'est pas entière.*

5.3 Quelques définitions d'un attracteur étrange

Définition 5.3.1 *Un attracteur est dit étrange lorsque les points qui le constituent générent des orbites sensibles aux conditions initiales.*

Définition 5.3.2 *Un atracteur chaotique est généralement associé à l'existence d'une infinité des orbites périodiques instables de tous ordres.*

Exemple 5.3.1 *Soit le système dynamique discret définit par la fonction :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

Ce système est chaotique car : soit $A \subset \mathbb{R}$ un attracteur et

$$\forall x \in A,\ \exists y \in A \text{ avec } y = x + \delta,\ \forall \delta > 0.$$

On a

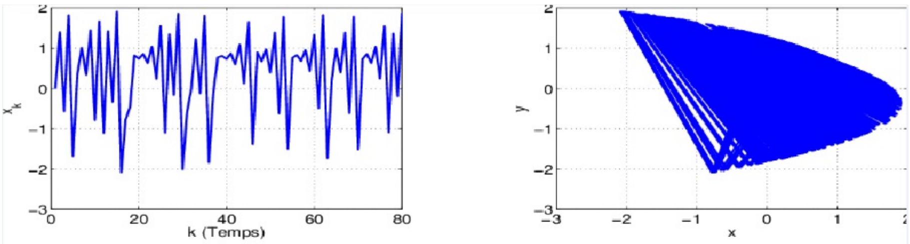
$$d(x, y) = |x - y| \leq \delta \ \text{ et } \ d\Big(\theta(x), \theta(x)\Big) = |2^n x - 2^n y| > \epsilon.$$

On pose $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ et $\delta = 1$ ce qui implique l'orbite positive d'un point x est sensible aux conditions initiales.

Exemple 5.3.2 (Attracteur étrange) *Soit l'attracteur de Hénon définie par :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + b y_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

Pour $a = 1,4,\ b = 0,3.$



(a) La première coordonnée, x. (b) Attracteur chaotique de *Henon*.

FIGURE 5.3 – Système chaotique de Hénon

5.4 Les exposants de Lyapunov

Pour quantifier la sensibilité par rapport aux conditions initiales, on utilise souvent la notion de nombre de Lyapunov ou exposant de Lyapunov .

Les exposants de Lyapunov sont des grandeurs qui mesurent la divergence entre différentes orbites au sein d'un attracteur.

5.4.1 Cas unidimensionnelle

Considérons l'équation dynamique :

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

Soient x_0, $\bar{x}_0$ deux conditions initiales trés proches c'est-à-dire : $\bar{x}_0 = x_0 + \delta x_0$.
On souhaite voir comment se comportent les orbites issues $x_0, \bar{x}_0$,

$$\bar{x}_1 = x_1 + \delta x_1 = f(x_0 + \delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\delta x_0.$$

Donc la distance entre les deux trajectoires aprés une itération est donnée par :

$$|\delta x_1| = |f'(x_0)\delta x_0| = |f'(x_0)||\delta x_0|.$$

En utilisant la règle des itèrations en chaine, aprés n itérations, nous obtenons :

$$|\delta x_n| = |\bar{x}_n - x_n| = \Big(\prod_{j=0}^{n} |f'(x_j)|\Big)|\delta(x_0)|.$$

D'autre part on a :

$$|\bar{x}_n - x_n| = |f^n(\bar{x}_0) - f^n(x_0)|.$$

Si les deux orbites $\bar{x}_n,\ x_n$ s'écartent à un rythme exponentielle aprés n itérations, alors

$$\begin{aligned} \frac{|\delta x_n|}{|\delta x_0|} = \exp^{nh},\ h \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln \frac{|\delta x_n|}{|\delta x_0|} = hn \\ &\Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{n} \ln \prod_{j=0}^{n} |f'(x_j) \end{aligned}$$

Pour $n \to +\infty$ on a

$$h = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \ln |f'(x_j)|. \tag{2}$$

Si $h > 0$ le comportement est chaotique (les deux orbites divergents).

On appelle h l'exposant de Lyapunov.

Exemple 5.4.1 *Soit un système discret définie par :*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & si \ \ x \le \frac{1}{2} \\ 4(1-x), & si \ \ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ce système est chaotique car :

$$h = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \ln |f'(x_j)| = \ln 4 > 0$$

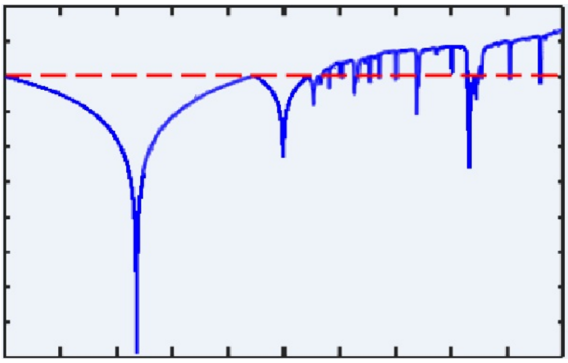


FIGURE 5.4 – Exposant de Lyapunov de l'application $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ en fonction du paramaètre a

5.4.2 Cas multidimensionnelle

Notre relation précédente (2) se généralise aux systèmes de dimension $p > 1$, qui possèdent p exposant de Lyapunov.
Soit l'équation dynamique définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ \\ f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Sous les mêmes conditions initiales $x_0,\ \bar{x}_0$ on a

$$\delta x_1 = J(x_0)\delta x_0.$$

où $J(x_0)$ désigne la matrice jacobienne de f évaluée en x_0. Aprés n itérations, on obtient :

$$\delta x_n = \prod_{j=0}^{n} J(x_j)\delta x_0.$$

Nous voyons se former le produit chronologique des matrices jacobiennes :

$$\prod_{j=0}^{n} J(x_j) = J(x_0)J(x_1)\dots J(x_n).$$

Où $J^n(x_0)$ représente la matrice jacobienne de $f^n(\cdot)$.

Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_p telle que

$$D_p^n = P_p^{-1} J^n P_p$$

une matrice diagonale de valeurs propres $\lambda_i(f^n(x_0))$, $\quad (i = 1, \ldots, p)$.

Donc : l'exposant de Lyapunov :

$$h_i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_i(f^n(x_0))|$$

Si $h_i > 0$ l'attracteur est étrange.

Exemple 5.4.2 *On donne dans cette figure les deux exposants de Lyapunov de l'application de Hénon pour $b = 0,3$ et $0,2 < a < 1,5$.*

Les exposants de Lyapunov d'une orbite périodique sont négatifs.

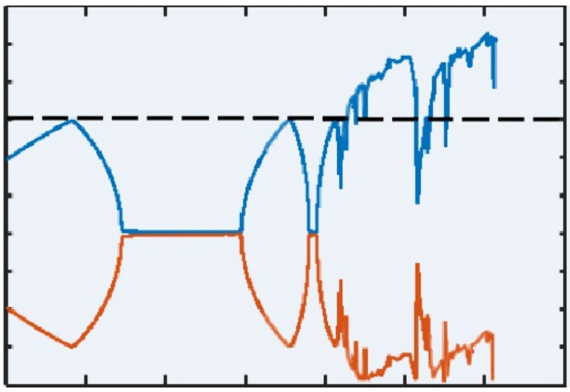


Figure 5.5 – Exposant de Lyapunov de l'application de Hénon pour $b = 0.3$ et $0.2 < a < 1.5$

5.5 Bifurcation vers le chaos

Certaines bifurcations, comme celle de type Neimark ou de type doublement de période peuvent conduire au chaos, un exemple d'apparition d'un attracteur chaotique par la bifurcation de Flip et l'application de Hénon.

La figure suivante illustre cette bifurcation :

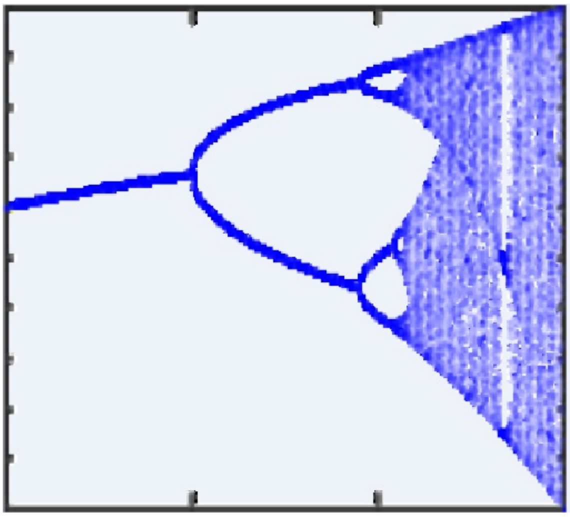


Figure 5.6 – Bifurcation vers le chaos

Exercices du chapitre 5

Exercice 5.5.1 *Soit l'attracteur étrange de Hénon :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - a x_n^2 \\ y_{n+1} = J x_n \qquad\qquad , J = 0,3 \end{cases}$$

1) *Calculer les points fixes* (X^*, Y^*) *de cette application en fonction de a et J.*
2) *Linéariser l'application au voisinage de ces points fixes sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}$$

où $(\delta x_n, \delta y_n) = (x_n - x^*, y_n - y^*)$ *et M une matrice* 2×2.

3) *Calculer les composantes de M pour* $a = 1,4$ *et déterminer ses valeurs propres* (λ_1, λ_2) *puis les vecteurs propres correspondants.*
4) *Observer numériquement ce que devient l'attracteur lorsqu'est varié le paramètre J,* $J \in [0, 1]$.

Exercice 5.5.2 *Soit le système dynamique discret définie par :*

$$x_{n+1} = 2x_n$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a y_n & 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2}(a y_n - x_n) & \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

avec $0 < a < 1$.

1) *Calculer les exposants de Lyapunov pour ce système.*
2) *Est ce que ce système admet un chaos ?*

Bibliographie

[1] D. Anna, *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret*, (2003).

[2] M. Brin and G. Stick, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge university Press (1998).

[3] P. Chossot and R. Lauterbach, *Methods in equivariant bifurcation and dynamical system*, World Scientific (2000).

[4] S. Elaydi, *An introduction to difference equations*, third edition. Springer. (2005).

[5] P. Linsay, *Period doubling an chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator* , Phys. Reo. lett, 47(1981) 1949-1952.

[6] R. M. May, *Simple mathematicals models with very complicated dynamics nature*, 261 (1976) 459-467.

[7] D. Ruelle and F. Takeus, *On the nature of turbutrlence, commun, math, plys*, 20(1971), 167-192.

[8] S. H. Strogatz, *Nolinear dynamics and chaos with applications to phycics and engineering*, Addison-Wesley Pub, (1994).

[9] W. Tucker, L. Kocarev, Z. Galias and S. Liam, *Intelligent computing bosed on chaos* , Springer-Verlag Berlin Heidebrey, (2009).

[10] A. T. Winfree, *The geometry of biological time*, Springer, New York, (1980).

[11] S. Wiggin, *Introduction to applied non linear dynamical systems and chaos*, Second adition, springer New York, (2003).

[12] W. B. Zhang, *Discrete dynamical systems, bifurcation and chaos in economics*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 204 (2006).