

Fonctions analytiques de fonctions méromorphes.

Chapitre 1 : points singuliers d'une fonction analytique

1. Séries de Laurent

définition (d'un point singulier) Si la fonction $f(z)$ n'est pas analytique au point $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que z_0 est un point singulier de $f(z)$.

définition du point singulier isolé : on dit que le point singulier $z_0 \in \mathbb{C}$ de $f(z)$ est un point singulier isolé s'il existe un voisinage V de z_0 dans lequel il y a un seul point singulier z_0 .

Exemple : Soit $f(z) = \frac{1}{(z-3)}$. Le point $z_0 = 3$ est un point singulier isolé, car le voisinage $|z-3| < 1$ ne contient pas un autre point singulier différent de $z_0 = 3$. $z_0 = 3$ est un point singulier, car f n'est pas définie au point $z_0 = 3$. (Donc n'est pas analytique)

Définit de la série de Laurent : On sait que si z_0 est un point singulier isolé, alors on ne peut pas écrire cette fonction sous la forme de série de Taylor au voisinage de z_0 , i.e. sur une boule $B(z_0, r)$.
Par contre, on verra plutôt qu'elle peut s'écrire sous la forme d'une série entière sur la bande $0 < r < |z - z_0| < R$ où $f(z)$ est analytique. La série entière qui représente $f(z)$ dans ce cas, s'appelle série de Laurent.

théorème 1 Si $f(z)$ est analytique sur la bande $0 < r < |z - z_0| < R$, alors $f(z)$ peut s'écrire sous la forme de la série de Laurent en tout point de la bande.

Indiquée, i.e. : si z est à l'extérieur de la bande, alors
 on a : $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$

on définit C_k par $C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}$
 $-\infty < k < +\infty$

Γ est contour fermé contenu dans la bande
 $D: 0 \leq r < |z-z_0| < R$ et contracté à z_0 dans son
 intérieur

Preuve : Soient z un pt $\forall$ de la b.c. de D .
 $\Gamma_1: |z-z_0| = R_1, \Gamma_2: |z-z_0| = r_2$ - deux
 cercles tels que $r_2 < R_1$ et z, Γ_1, Γ_2 sont dans D .

D'après la formule de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z)} = I_1 + I_2$$

$$I_2 = ? \text{ on a } \frac{1}{z-z} = \frac{1}{z-z_0 - (z_0-z)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_0-z}{z-z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^k} \dots (*)$$

Comme $|\frac{z-z_0}{z-z_0}| = \frac{|z-z_0|}{R_1} < 1, \forall z \in \Gamma_2$, on a :

la série (*) cvge unif. sur Γ_2 . Par conséquent, on peut
 l'intégrer terme à terme pour obtenir :

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$$

$$\text{on } C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}} \quad k=0 \rightarrow \infty$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)}$$

on a :

$$\frac{1}{\xi - z_0} = \frac{-1}{(z_0 - z_0) - (\xi - z_0)} = \frac{1}{z_0 - z_0} \frac{-1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z_0 - z_0}} =$$

$$= \frac{-1}{z_0 - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z_0 - z_0} \right)^k = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^k}{(z_0 - z_0)^{k+1}} =$$

$$= - \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{k'-1}}{(z_0 - z_0)^{k'}} \quad (k' = k+1)$$

Comme, on a $\left| \frac{\xi - z_0}{z_0 - z_0} \right| = \frac{r_2}{|z_0 - z_0|} < 1$, on obtient que la série (*) converge unif. sur γ_1 . par conséquent on peut intégrer terme à terme comme suit ;

$$I_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(\xi) (\xi - z_0)^{k-1} d\xi \cdot (z_0 - z_0)^{-k} \Rightarrow$$

$$I_2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z_0 - z_0)^{-k} \quad \text{on}$$

$$C_{-k} = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(\xi) (\xi - z_0)^{k-1} d\xi, \quad k = 1, \infty$$

si on met $k' = -k$, on obtient

$$C_{k'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k'+1}}, \quad k' = -\infty, -1$$

Comme $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k'+1}}$ est analytique sur la bande D , alors on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k'+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k'+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k'+1}}$$

où Γ est le contour dans D et contient z_0 dans son intérieur

Reque : 1) le seri de Laurent est la somme de deux
seris de fct ; $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$ - la partie principale de $f(z)$
 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$ - la partie reguliere (ou
 analytique de

2) le seri de Laurent est cvte sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$
 la partie prinp. et regul. sont cvte sur D ou $D = D_1 \cap D_2$

3) la partie reguliere est 1 seri entier ordinaire cvte sur $B(z_0, R)$

4) = = principale est 1 seri cvte sur $\mathbb{C} - B(z_0, r)$

pour cela, il suffit de mettre $\xi = \frac{1}{z-z_0}$ pour
 obtenir $\sum_{k \geq 1} \frac{C_k}{R(z-z_0)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi^k$, cette seri est

cvte sur $|\xi| < 1$ donc $|z-z_0| > \frac{1}{r} = r_0$

on note que les proprietes de seris entieres restent valables
 pour le seri de Laurent ($= \sum C_k \xi^k + \sum C_k (z-z_0)^k$).

plus precisement, on a

5) le seri de Laurent est absol. cvte sur $\{r < |z-z_0| < R\}$

6) $\text{bande fen} D' \subset D$ et unif. cvte sur tout

7) on peut integrer vto. S. de Laurent sur toute courbe
ferme contenue dans D

8) on peut dériver terme a terme la S. de Laurent de
 n'importe quel ordre k et en tout pt $z \in D$

9) le developpement en seri de Laurent est unique
 i.e. si $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$

alors, on a necessaire, $C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{k+1}}$
 $-\infty < k < +\infty$

Exemple 1 trouver la serie de Laurent de $f(z) = \ln \frac{1}{z-1}$ au voisinage de $z_0 = 1$

Reponse: $z_0 = 1$ est pt sing. isole
 $\forall z \neq 1$ $\ln z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
 si on pose $t = \frac{1}{z-1}$ (ou $z \neq 1$)

$$\ln t = \ln \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 1}{(2k+1)!(z-1)^{2k+1}}$$

cette serie converge qd $r=0 < |z-1| < \infty$: D

- cette serie ne contient que la partie principale

Exemple 2: trouver la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ au voisinage de $z_0 = 1$

Reponse, on met $\zeta = z-1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k = \frac{1}{1-\zeta}$
 $\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{\zeta(\zeta-1)} = \frac{-1}{\zeta} \frac{1}{1-\zeta} = -\frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k$

$$= -\frac{1}{\zeta} (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots) = -\frac{1}{\zeta} - 1 - \zeta - \zeta^2 - \dots$$

$$= -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-2)^2 - \dots = -\frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (z-2)^k$$

cette serie converge sur $0 < |z-1| < 1$

- la p. princ. est form. d'1 seul term: $-\frac{1}{z-1} = 1$.

- De la m. fac. on developpe au voisinage de $z_0 = 2$
 Rq: au voisinage de $z_0 = 1$, c'est la serie de Taylor

2) points singuliers isolés et résidus:

1) Classification des pt singuliers isolés

on utilise la partie principale pour classer le point singulier

Def Soit z_0 un pt sing isole de $f(z)$.

analyt. sur $D: 0 < |z-z_0| < R$. Si on a $C_k = 0, \forall k \leq -1$ alors on dit que z_0 est un pt sing. eliminable

On a donc cas : $f(z) = \sum C_n (z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < r$
Théorème (test de pt sing. isol. éliminable), on a
 l'équivalence de : i) z_0 est 1 pt sing. isol. éliminable
 ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ (existe et fini)

preuve : i) $\Rightarrow$ ii)
 z_0 est 1 pt sing. isol. élim. $\xrightarrow{\text{def}}$ la partie principal
 n'existe pas donc $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 = A$

(on $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$)
 ii) $\Rightarrow$ i) : si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A_0$ existe et finie, alors
 $f(z)$ est bornée sur $D_0: 0 < |z - z_0| < R_0$, car
 $|f(z) - A| < \varepsilon \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon + |A| = M$
 si $0 < |z - z_0| < \delta = R_0$

soit $\gamma: |z - z_0| = \rho$ - une courbe circulaire de rayon
 très petit $\rho > 0$ tel que $0 < \rho < R_0$; $k \geq 0$

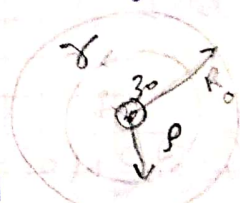
on a : $|C_{-k}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{k-1} d\zeta \right| \leq$
 $\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |f(\zeta)| |\zeta - z_0|^{k-1} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} M \rho \cdot 2\pi \rho \Rightarrow$
 $\Rightarrow |C_{-k}| \leq M \cdot \rho^k \quad (\forall k \geq 0)$

en prenant $\rho = \frac{1}{n}$, on trouve a la fin :

$$|C_{-k}| = 0 \Rightarrow C_{-k} = 0, \quad \forall k \geq 1$$

On note que le genre de pt sing. isolé existe
 qd $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe ^(fini) et $\neq f(z_0)$

En posant $f(z_0) = c_0$, on élimine le pt sing. el
 P.S.I.E



Exemple $f(z) = \begin{cases} 0, & z=0 \\ e^z, & z \neq 0 \end{cases}$

on a sur $D: 0 < |z| < \infty$

$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1 \neq 0 = f(0)$
 d'autre part $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, donc d'après l'théorème, $f(0) = 1$

$z_0 = 0$ est 1 pt s.i.e

En posant $f(0) = 1$, on obtient $\tilde{f}(z) = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$

qui est 1 fct partout analytique

Définition d'un pôle: on dit que le point singulier isolé z_0 de la fct $f(z)$ est un pôle si la partie principale de la série de Laurent au pt z_0 ne contient qu'un nombre fini de coefficients C_{-k} tels que $C_{-k} \neq 0$. on a dans ce cas

$$f(z) = \sum_{k=-n_0}^{-1} C_{-k} (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k, \quad n_0 > 0$$

$$= \frac{C_{-n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \frac{C_{-n_0+1}}{(z-z_0)^{n_0-1}} + \dots + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$$

Rq

Si $-n_0$ (où $n_0 \geq 1$) est la plus petite puissance de $(z-z_0)$ telle que $C_{-n_0} \neq 0$, on dit que z_0 est 1 pôle d'ordre n_0 .

- Il y a donc des pôles simples et des pôles multiples.

Définition d'un zéro régulier: On dit que z_0 est 1 zéro régulier de la fct $\varphi(z)$ si $\varphi(z)$ est analytique au pt z_0 et $\varphi(z_0) = 0$.

Rq: si z_0 est 1 zéro régulier de $\varphi(z)$, alors on a $\varphi(z) = b_{n_0}(z-z_0)^{n_0} + b_{n_0+1}(z-z_0)^{n_0+1} + \dots = \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ où $b_{n_0} \neq 0$.
 n_0 est l'ordre des zéros réguliers z_0 de $\varphi(z)$.

théorème 2 (1^{er} teste de pôle) soit z_0 un pôle S.I de $f(z)$. on a l'équivalence entre

i) z_0 est un pôle de $f(z)$ d'ordre n

ii) z_0 est zéro régulier d'ordre n de $\varphi(z) = 1/f(z)$.

preuve : i) $\Rightarrow$ ii).

z_0 est un pôle d'ordre n de $f(z) \xrightarrow{\text{déf}} f(z) = \frac{C_{-n} + C_{-n+1}(z-z_0) + \dots + C_{-n+2}(z-z_0)^2}{(z-z_0)^n}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, où $g(z) = C_{-n} + C_{-n+1}(z-z_0) + \dots + C_{-n+2}(z-z_0)^2$

Il est clair que $g(z)$ est analytique au pôle $z=z_0$

et comme $g(z_0) = C_{-n} \neq 0$, on a $\frac{1}{g(z)}$ est aussi analytique au pôle z_0 . Son développement en série de Taylor s'écrit sous la forme

$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{C_{-n}} + \frac{C_{-n+1}}{C_{-n}^2}(z-z_0) + \dots$

Donc, on a $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^n \frac{1}{g(z)} = (z-z_0)^n \left[\frac{1}{C_{-n}} + \frac{C_{-n+1}}{C_{-n}^2}(z-z_0) + \dots \right]$

d'où z_0 est zéro de $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ d'ordre n .

ii) $\Rightarrow$ i) on suppose que z_0 est un zéro d'ordre n de la fct $\varphi(z) = 1/f(z)$. on a, donc, d'après la définition $\varphi(z) = (z-z_0)^n [b_n + b_{n+1}(z-z_0) + \dots]$

$= (z-z_0)^n \beta(z)$, où $b_n \neq 0$

et $\beta(z) = b_n + b_{n+1}(z-z_0) + \dots$, ($b_n \neq 0$)

Il est clair que $\beta(z)$ est analytique au pôle z_0 .

$\beta(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n f(z)} = \dots = \frac{1}{\beta(z)}$ (car $\beta(z_0) = b_n \neq 0$)

par conséquent, on a (la série de Taylor)

$\frac{1}{\beta(z)} = \frac{1}{b_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n^2}(z-z_0) + \dots$

d'où $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n} \left[\frac{1}{b_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n^2}(z-z_0) + \dots \right]$

Donc z_0 est 1 pôle de $f(z)$ d'ordre n .

théorème 2 (2^{ème} teste de pôle) : soit $f(z)$ est 1

fonction analytique D: $0 < |z - z_0| < R$ on l'équival

$$1) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad 2) z_0 \text{ est 1 pôle de } f(z)$$

preuve : 1) $\Rightarrow$ 2) soit $\varphi(z) = 1/f(z)$ et z_0 est 1 pôle de f . d'après le th 2, on a z_0 est 1 zéro régulier de $\varphi(z) = 1/f(z)$, i.e. $\varphi(z_0) = 0$. d'où

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$2) \Rightarrow 1) \text{ si } f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty, \text{ on a}$$

$$\varphi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Donc z_0 est 1 zéro de $\varphi(z) = 1/f(z)$, d'où

z_0 est 1 pôle de $f(z)$

point singulier isolé essentiel

Définition : on dit que le pt S.I z_0 de $f(z)$ est 1 point singulier essentiel si la partie principale de la série de Laurent (au voisinage de z_0) contient une infinité de coefficients C_{-k} non nuls

Exemple : on a d'après un exemple

$$\text{précédent } \sin \frac{1}{z-1} = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2k+1}}$$

Donc le pt $z_0 = 1$ est 1 p. S.I.E.S.S de $\sin \frac{1}{z-1}$

Résultat A partir de th 1 et th 3, on déduit

que z_0 est un point-singulier essentiel de $f(z) \Leftrightarrow$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ n'existe pas.}$$

Exemple : $f(z) = e^{1/z^2}$, $z_0 = 0$, on

$$z = x \rightarrow 0 \implies e^{1/x^2} = e^{1/y^2} \rightarrow +\infty$$

$$z = iy \rightarrow 0 \implies e^{1/y^2} = e^{-1/y^2} \rightarrow 0 \quad \text{Donc}$$

la limite n'existe pas et $z_0 = 0$ est point-singulier essentiel.