

Série n°1:

Exercice 1: Déterminer et tracer le domaine de définition des fonctions:

$$f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x-y}, \quad f(x,y) = e^{\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{2xy-1}}}$$

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{x-y}\right) + \sqrt{4+y} + \sqrt{4-y}, \quad f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$$

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}, \quad f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$$

Exercice 2: 1) Montrer que la limite n'existe pas

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^4+y^6}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3+3y^2}$$

2) Utiliser les coordonnées polaires pour calculer les limites en (0,0) des fonctions

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, \quad g(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exercice 3: 1) Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|-y} & \text{si } y \neq |x| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $f(0,0)$ et calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$. Que peut-on déduire?

2) Étudier la continuité de f $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 4: Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1 - \cos(x-y)}{x-y}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f et trouver par méthodes différentes $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.

Indication: $|1 - \cos u| \leq |u|^2$

2) Démontrer que f admet un prolongement par continuité et donner l'expression de $\tilde{f}$ son prolongement.

Exercice 5: Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- 1) Vérifier que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x+y) \left(\frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2} \right)$
- 2) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left| \frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{3}{2}$.
- 3) Utiliser la définition pour montrer que f est continue en $(0,0)$.

Exercice 6: Soit la fonction g définie par

$$g(x,y) = \frac{2x^2 + xy^3 + 5x^6y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- 1) En utilisant deux chemins différents, montrer que g n'admet pas de limite en $(0,0)$ pour $\alpha \geq 1$.
- 2) Déterminer les valeurs de α pour que g admette un prolongement par continuité en $(0,0)$. Donner l'expression de $\tilde{g}$ son prolongement.

Exercice 7: Soit la fonction f définie par

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{|x|^p |y|^q |z|^r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

- 1) Montrer que $|f(x,y,z)| \leq \| (x,y,z) \|^{p+q+r-1}, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
- 2) Pour $x \neq 0$, calculer $f(x,x,x)$
- 3) Déduire les valeurs de p, q, r pour lesquelles la fonction f soit continue en $(0,0,0)$.