Corrigé type de l’Examen Final –SLM

<u>Solution l’Exercice #1 :</u>(5 points)

1) Représentation d’état :

$$\ddot{y}_1 = 36(y_2 - y_1) + \dot{y}_2 - \dot{y}_1 + u$$

$$2\ddot{y}_2 = 36(y_1 - y_2) + \dot{y}_1 - \dot{y}_2$$

On : $x_1 = y_1, x_2 = y_2$, $x_3 = \dot{y}_1, x_4 = \dot{y}_2$, donc :

$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_3$

$\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = x_4$

$\dot{x}_3 = \ddot{y}_1 = -36x_1 + 36x_2 - x_3 + x_4 + u$

$\dot{x}_4 = \ddot{y}_2 = 18x_1 - 18x_2 + 0.5x_3 - 0.5x_4$

Il vient :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36 & 36 & -1 & 1 \\ 18 & -18 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

2) Commandabilité :

On a la matrice de commandabilité

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -34.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 17.25 \\ 1 & -1 & -34.5 & 105.75 \\ 0 & 0.5 & 17.25 & -52.875 \end{bmatrix}$$

$\det(Qc) = -324 \neq 0 \Longrightarrow rand(Q_c) = 4 = Dim(A) \Longrightarrow$ le système est commandable

3) Observabilité :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

$$det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow rand(Q_0) = 4 = Dim(A) \Longrightarrow le\ système\ est\ observable$$

4) Oui, la représentation d’état est minimale puisque le système est commandable et obsevable.

Solution de l'Exercice #2 :

On a:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+4s+1}{s^2+s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{4}{s+1} & \frac{3s+1}{s^2+s} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+4s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}}{s(s+1)} = \frac{M(s)}{P(s)}$$

Le polynôme dénominateur $P(s) = s(s+1)$ à des pôles simples 0 et -1. On utilise la méthode de Gilbert pour trouver la représentation d'état minimale (commandable et observable) du système :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} s^2+4s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} 3s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} == \frac{M_1}{s} + \frac{M_2}{s+1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M_1 = \lim\limits_{s\to -1}\left(s\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} 3s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$M_2 = \lim\limits_{s\to -2}\left((s+1)\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} 3s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$r_1 = rang(M_1) = 2 : r_2 = rang(M_2) = 1.$

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C_1B_1$ et $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = C_2B_2$

La représentation d'état est donc :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}u$$

Solution l'Exercice #3 :

1) C'est une commande par retour d'état avec action intégrale.

2) Pour que schéma bloc de la commande par retour d'état soit réalisable il faut que le système soit commandable.

Vérification de la commandabilité :

On a : $Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(Q_c) = -100 \neq 0 \Longrightarrow$ le système est commandable

Le schéma commande est donc réalisable.

3) Représentation d'état du système en boucle fermé :

On a :

$\dot{x} = (A - BK)x + k_I z$

$\dot{z} = y_r - y = y_r - Cx$

$y = Cx$

Donc la RE du système en BF est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & k_I \\ -C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}y_r$$

$$y = [C \quad 0]\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

4) Calcul des gains K et k_I permettant de placer les pôles en boucle fermée à :-3.

$$A^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B^* = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} ; K^* = [K \quad -k_I]$$

Forme commandable du système (A^*, B^*)

$$Q_c = [B^* \quad A^*B^* \quad A^{*2}B^*] = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, {Q_c}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} Q_c(3) \\ Q_c(3)A^* \\ Q_c(3)A^{*2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^* = M^{-1}A^*M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}^* = M^{-1}B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique désiré : $P_d(s) = (s+3)^3 = s^3 + 9s^2 + 27s + 27$

Calcul de $\widetilde{K}^* = [\tilde{k}^*{}_0 \quad \tilde{k}^*{}_1 \quad \tilde{k}^*{}_1]$

$$\tilde{k}^*{}_0 = 27 - 0 = 27, \qquad \tilde{k}^*{}_1 = 27 - (-1) = 28, \qquad \tilde{k}^*{}_2 = 9 - 0 = 9$$

$$\widetilde{K}^* = [27 \quad 28 \quad 9]$$

Calcul de K et k_I : $K^* = [K \quad -k_I] = \widetilde{K}^* M^{-1} = [27 \quad 28 \quad 9]\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}[28 \quad 9 \quad -27]$

Donc : $K = [2.8 \quad 0.9]$ et $k_I = 2.7$

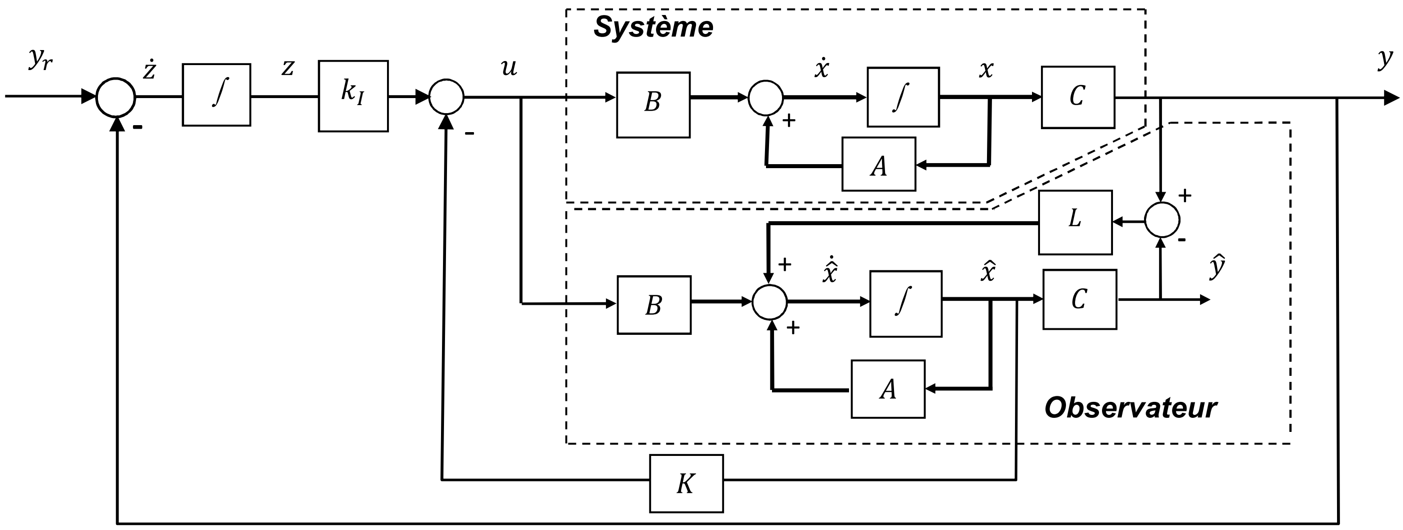
5) Pour utiliser un observateur du vecteur d'état il faut que le système soit observable

- **Vérification de l'observabilité:**

  On a : $Q_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  $\det(Q_c) = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ le système est observable

- **Schéma de commande par retour d'état avec observateur**



- **Dynamique de l'observateur** : La dynamique de l'observateur doit être plus rapide que celle du système. Dans notre cas on peut choisir le pôle double -30 pour la dynamique de l'observateur.

- **Calcul du gain de l'observateur** $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l_1} \\ \boldsymbol{l_2} \end{bmatrix}$

On a le polynôme caractéristique de l'observateur :

$$P_0(s) = \det(sI - (A - LC)) = det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 1 & s \end{bmatrix}$$

$$P_0(s) = s^2 + l_1 s + l_2 - 1$$

Le polynôme caractéristique de la dynamique désirée de l'observateur est :

$$P_{0d}(s) = (s + 30)^2 = s^2 + 60s + 900$$

$$P_0(s) = P_{0d}(s) \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 60 \\ l_2 - 1 = 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 60 \\ l_2 = 901 \end{cases}$$

Le gain de l'observateur : $L = \begin{bmatrix} 60 \\ 901 \end{bmatrix}$
