جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلــي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **2020/11/06**
السـنة الأولــى الوقت : ساعة و نصف
الامتحـــان الاستدراكي "الجــــبر **2**"

<u>التمــرين الأول</u>: (**8** نقاط)

ليكن $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = 0 \ et \ P(0) = 0\}$

1- برهن أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}_3[X]$.

2- عين اساس و بعد F

3- برهن أن $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$ حيث $G = \langle 1, X \rangle$

4- اوجد إحداثيات الشعاع $P = 2 + X^3$ في الاساس $\{1, X, X - X^3, X^2 - X^3\}$

<u>للعلم</u> $P \in \mathbb{R}_3[X] \Leftrightarrow P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \ o \ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

<u>التمــرين الثاني</u> : (**12** نقطة)

ليكن التطبيق الخطي الداخلي f المعرف على $\mathbb{R}^3$ بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

وفق الأساس القانوني $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

a) اعطي قيم $\{f\ (e_1), f\ (e_2), f\ (e_3)\}$

b) أحسب رتبة المصفوفة A و استنتج أن A قابلة للقلب.

c) برهن أن $B' = \{v_1 = (-3,2,2), v_2 = (-2,1,2), v_3 = (-2,2,1)\}$ أساس لـ$\mathbb{R}^3$

d) عين مصفوفة العبور P من B الى B′ و برهن أن $P^{-1} = P$

e) أحسب $f\ (v_1), f\ (v_2), f\ (v_3)$ بدلالة v_1, v_2, v_3 و استنتج : A' مصفوفة التطبيق f في الأساس B'

f) احسب $(A')^{-1}$

g) احسب المصفوفات $(A')^{-1} \times P$ و $P \times (A')^{-1} \times P$ و استنتج المصفوفة A^{-1}

للعلم : $A = P \times A' \times P^{-1}$

بــــالــتـوفــيــق

الحل النموذجي للامتحان الاستدراكي للجبر 2

التمرين الأول :

1) إثبات أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}_3[X]$: لدينا $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]; P(1)=0\ et\ P(0)=0\}$

$P\in F\Leftrightarrow P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3, P(1)=0\ et\ P(0)=0\Longrightarrow a_0=0, a_1+a_2+a_3=0\Longrightarrow a_3=-a_1-a_2\Longrightarrow P(X)=a_1(X-X^3)+a_2(X^2-X^3)$

$=<P_1=X-X^3, P_2=X^2-X^3>\ ;$

و بما أن $\{P_1=X-X^3, P_2=X^2-X^3\}\subset\mathbb{R}_3[X]$ فإن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}_3[X]$

ملاحظة : يمكن اثبات أن F فضاء شعاعي باثبات $\left.\begin{array}{r} 0_{\mathbb{R}_3[X]}\in F\\ \forall p,q\in F: p+q\in F\\ \forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall p\in F:\alpha.p\in F\end{array}\right\}$

***1)* تعيين أساس لـ F**: لدينا مما سبق $F=<P_1=X-X^3, P_2=X^2-X^3>$ يكفي إثبات أن $\{P_1,P_2\}$ حرة

-$\left(\{P_{1_1},P_2\}\right.$ حرة $) \Leftrightarrow \left(\forall(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2; \alpha_1P_1+\alpha_2P_2=0_{\mathbb{R}_3[X]}\Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=0\right)$

لدينا $\alpha_1P_1+\alpha_2P_2=0_{\mathbb{R}_3[X]}\Longrightarrow\alpha_1(X-X^3)+\alpha_2(X^2-X^3)=0_{\mathbb{R}_3[X]}$

$\Longrightarrow\{\alpha_1X+\alpha_2X^2-(\alpha_1+\alpha_2)X^3=0\ \Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=0.$

إذن $\{P_{1_1},P_2\}$ حرة فهي أساس لـ F و يكون $\dim F=2$.

لتكن $B'=\{1,X,P_{1_1},P_2\}$ واضح أن $\dim G=2$

لدينا $\mathbb{R}_3[\quad]=F\oplus G\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{card } B'=\dim\mathbb{R}_3[X] \text{ و هو محقق}\\ \dim F+\dim G=\dim\mathbb{R}_3[X] \text{ و هو محقق}\\ B' \text{ حرة}\end{array}\right.$

لدينا $\forall(\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2; \lambda_1+\lambda_2X+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2=0_{\mathbb{R}_3[X]}\Longrightarrow\lambda_1+(\alpha_1+\lambda_2)X+\alpha_2X^2-(\alpha_1+\alpha_2)X^3=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\alpha_1=\alpha_2=0$

اذن B' حرة و منه $\mathbb{R}_3[X]=F\oplus G$.

تعيين الاحداثيات $P=2+X^3=\lambda_1+\lambda_2X+\lambda_3P_1+\lambda_4P_2=\lambda_1+(\lambda_3+\lambda_2)X+\lambda_4X^2-(\lambda_3+\lambda_4)X^3\Longrightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1,\lambda_4=0$

اذن إحداثيات الشعاع $P=2+X^3$ في الاساس $\{1,X,X-X^3,X^2-X^3\}$ هي $(2,1,-1,0)\}$

<u>**التمــريـن الثاني**</u> : لدينا $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\-2&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{array}{l}f\ (e_1)=(3,-2,0)\\ f\ (e_2)=(2,-1,0)\\ f\ (e_3)=(1,-11)\end{array}$

رتبة المصفوفة A هو العدد الاكبر للأعمدة المستقلة خطيا

$\begin{vmatrix}3&2&1\\-2&-1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\-2&-1\end{vmatrix}=1\neq0\Longrightarrow rgA=3\Leftrightarrow$ قابلة للقلب A.

c) لدينا B' أساس لـ$\mathbb{R}^3\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\text{card}B'=3\\ B'libre\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\text{card}B'=3\\ detB'\neq0\end{array}\right\}$ محقق

لدينا $1=-\begin{vmatrix}1&2\\-2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-2\\-2&-3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-2&-2\\2&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}=detB'$ اذن B'حرة و بالتالي أساس ل $\mathbb{R}^3$

<u>**ملاحظة**</u>: يمكن دراسة الاستقلال الخطي باستعمال المعادلة الخطية

$\forall(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3; \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_1=0_{\mathbb{R}^3}\ \Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0_1$

d) تعيين مصفوفة العبور P من B الى B' لدينا $P=M_{id_{\mathbb{R}^3}}(B',B)=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}v_1&v_2&v_1\end{array}&\\ \begin{pmatrix}-3&-2&-2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}e_1\\e_2\\e_3\end{array}\end{array}$

لدينا $P^{-1}=P\Leftrightarrow P^2=I_3$ محقق $P^2=\begin{pmatrix}-3&-2&-2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3&-2&-2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$f\,(\quad_1) = -3f\,(e_1) + 2f\,(e_2) + 2f\,(e_3) = v_1$$
$$f\,(v_2) = -2f\,(e_1) + f\,(e_2) + 2f\,(e_3) = v_2 \qquad \Longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{لدينا}$$
$$f\,(v_3) = f\,(e_1) - f\,(e_2) + f\,(e_3) = -v_1 + v_2 + v_3$$

f) حساب $(A')^{-1}$ ناخد مثلا طريقة التطبيق الخطي :

$$f\,(\quad_1) = v_1 \Rightarrow f^{-1}\,(v_1) = v_1$$
$$f\,(v_2) = v_2 \Rightarrow f^{-1}\,(v_2) = v_2 \qquad \Longrightarrow (A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{لدينا}$$
$$f\,(v_3) = -v_1 + v_2 + v_3 \Rightarrow f^{-1}(v_3) = v_1 - v_2 + v_3$$

حساب المصفوفتين
$$(A')^{-1} \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

و
$$P \times (A')^{-1} \times P = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا

$$A = P \times A' \times P^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = (P \times A' \times P^{-1})^{-1} = A^{-1} = P \times (A')^{-1} \times P \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلــي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي 2020/10/25
السـنة الأولـى الوقت : ساعة و ثلاثة ارباع
امتحـان "الجـبر 2"

....

الامتحان القصير يحسب بالقاعدة الثلاثية من احسن علامات التمرينين

....

التمـرين الأول: (10 نقاط)

ليكن $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 3x + 2y + z = 0\}$

، $G =< V_1 = (1,1,1), V_2 = (1,2,3) >$

1- بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

2- عين قيمx الحقيقيه التي من أجلها يكون الشعاع $X = (x, 0,1)$ مزج خطي

لـ $\{V_1 = (1,1,1), V_2 = (1,2,3)\}$

3- عين أساس لـ F واحسب بعده.

4- اوجد أساس لـ $F + G$، استنتج أن $F + G = \mathbb{R}^3$ و هل الفضائين متكاملين.

5- نفرض أن H فضاء مكمل لـ F في $\mathbb{R}^3$. عين بعده و اقترح صيغة له.

التمـرين الثاني : (10 نقاط)

ليكن التطبيق الخطي الداخلي المعرف على $\mathbb{R}^3$ بـ

$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: f(x,y,z) = (x + 2y - 2z, 3x + y - 3z, 3x + 2y - 4z)$.

a) أوجد المصفوفة $A = M_f(B)$ المرفقة لـ f في الأساس القانوني

. $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

b) عين نواة f و استنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب.

c) برهن أن $B' = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,1,0)\}$ أساس لـ$\mathbb{R}^3$

d) عين مصفوفة العبور P من B الى B'

e) أحسب $P^2 - P$ و استنتج

1- المصفوفة P^{-1} مقلوب P .

2- A' مصفوفة التطبيق f في الأساس B'

f) احسب مقلوب المصفوفة A'

بالتوفيق

الحل النموذجي لامتحان الجبر 2 (الدورة العادية اكتوبر 2020)

التمرين الأول :

2) **إثبات أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$: لدينا**

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;3x+2y+z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;-3x-2y=z\}$$
$$=\{(x,y,-3x-2y)\in\mathbb{R}^3;(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(1,0,-3)+y(0,1,-2);(x,y)\in\mathbb{R}^2\}.$$
$$=<X_1=(1,0,-3),X_2=(0,1,-2)>\ ;$$

و بما أن $\{X_1=(1,0,-3),X_2=(0,1,-2)\}\subset\mathbb{R}^3$ فإن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

ملاحظة : يمكن اثبات أن F فضاء شعاعي باثبات $\left.\begin{array}{r}0_{\mathbb{R}^3}\in F\\ \forall y_1,y_2\in F: y_1+y_2\in F\\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\forall y\in F:\alpha.y\in F\end{array}\right\}$

3) **تعين قيم x الحقيقية :** (X مزج خطي لــ $\{V_1,V_2\}$) $\Leftrightarrow (\exists(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2;X=\alpha_1V_1+\alpha_2V_2)$

لدينا $X=\alpha_1\ \ _1+\alpha_2\ \ _2\Longrightarrow(x,0,1)=\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,2,3)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=x\\ \alpha_1+2\alpha_2=0\\ \alpha_1+3\alpha_2=1\end{cases}\Longrightarrow\alpha_2=1,\alpha_1=-2,x=1.$$

4) **تعيين أساس لــ F**: لدينا مما سبق $F=<X_1=(1,0,-3),X_2=(0,1,-2)>$ يكفي إثبات أن $\{X_1,X_2\}$ حرة

-($\{X_1,X_2\}$ حرة) $\Leftrightarrow\big(\forall(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2;\alpha_1X_1+\alpha_2X_2=0_{\mathbb{R}^3}\Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=0\big)$

لدينا $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2=0_{\mathbb{R}^3}\Longrightarrow\alpha_1(1,0,-3)+\alpha_2(0,1,-2)=(0,0,0)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ -3\alpha_1-2\alpha_2=0\end{cases}\Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=0.$$

إذن $\{X_1,X_2\}$ حرة فهي أساس لــ F و يكون $\dim F=2$.

5) **تعيين أساس لــ $F+G$** : لدينا $F+G=<X_1,X_2,V_1,V_2>$

واضح أن الجملة $\{X_1,X_2,V_1,V_2\}$ مرتبطة خطيا لان عدد الاشعة اكثر من 3.

دراسة الاستقلال الخطي لـ $\{X_1,X_2,V_1\}$

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3;\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3V_1=0_{\mathbb{R}^3}\Longrightarrow\alpha_1(1,0,-3)+\alpha_2(0,1,-2)+\alpha_3(1,1,1)=(0,0,0).$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ -3\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}\Longrightarrow\alpha_1=-\alpha_3\ \wedge\alpha_2=\alpha_3\text{et}\ \alpha_3=0.$$

إذن $\{X_1,X_2,V_1\}$ حرة فهي أساس لـ $F+G$

و منه $F+G=<X_1,X_2,V_1>$ و منه $\dim F+G=3=dim\mathbb{R}^3$ اذن $F+G=\mathbb{R}^3$

- F و E ليسا متكاملين لأن $F\cap E\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ $(\dim F\cap G=1)$

6) **اقتراح فضاء مكمل لــ F : نفرض أن** H مكمل لــ F و منه

$$\dim H=\dim\mathbb{R}^3-\dim F=1.$$

و بما ان $\{X_1,X_2,V_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ اذن يمكن اختيار $H=<V_1>$

التمـــرين الثاني :

a) $\{f(e_1)=(1,3,3),f(e_2)=(2,1,2),f(e_3)=-(2,3,4)\}$ اذن $A=M_f(B)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&1&-3\\3&2&-4\end{pmatrix}$

b) $(x,y,z)\in Kerf: f(x,y,z)=(x+2y-2z,3x+y-3z,3x+2y-4z)=(0,0,0)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x+2y-2z=0\\ 3x+y-3z=0\\ 3x+2y-4z=0\end{cases}\Longrightarrow x=y=z=0\Longrightarrow Kerf=\{(0,0,0)\}$$

$$Kerf=\{(0,0,0)\}\Longrightarrow f\ injective$$
$$\Longrightarrow f\ surjective\ car\ \dim Imf=3\ donc\ f\ bijective\Longrightarrow A\ inversible$$

c) لدينا B' أساس لـ$\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\text{card}B'=3\\ B'libre\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\text{card}B'=3\\ detB'\neq0\end{array}\right\}$محقق

لدينا $detB'=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=2$ اذن B'حرة و بالتالي أساس ل $\mathbb{R}^3$

ملاحظة : يمكن دراسة الاستقلال الخطي باستعمال المعادلة الخطية

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3; \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u V_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0_1$$

d) تعيين مصفوفة العبور P من B الى B′ لدينا

$$P = M_{id_{\mathbb{R}^3}}(B',B) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

حساب $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^2 - P = 2I_3 \Longrightarrow \frac{1}{2}(P - I_3)P = I_3$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}(P - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1} \times A \times P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تعيين مصفوفة العبور $(A')^{-1}$ لدينا

$$A' = M_f(B') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

$$f(u_1) = -2u_1 \Longrightarrow f^{-1}(u_1) = -\frac{1}{2}u_1$$

$$f(u_2) = -u_2 \Longrightarrow f^{-1}(u_2) = -u_2$$

$$f(u_3) = 3u_1 + 2u_2 + u_3 \Longrightarrow f^{-1}(u_3) = \frac{3}{2}u_1 + 2u_2 + u_3$$

اذن

$$(A')^{-1} = M_{f^{-1}}(B') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f^{-1}(u_1) & f^{-1}(u_2) & f^{-1}(u_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

ملاحظة : يمكن حساب $(A')^{-1}$ باستعمال المحددات : $detA' = 2$

اذن $\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{1,2} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

و $\Delta_{2,1} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \Delta_{2,3} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

و $\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \Delta_{3,2} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \Delta_{3,3} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$

$$P^{-1} = \frac{1}{detA'}\,{}^{t}\begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & \Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}{}^{t}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Université de Jijel

Faculté des sciences exactes et informatique

Département des M I **juin 2018**

Durée : 2heurs

Examen de rattrapage d'algèbre linéaire

<u>Exercice 1</u> : (6.5 pts)

On considère les sous espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \langle v_1 = (2,1,0), v_2 = (-1,0,1), v_3 = (4,1,-2) \rangle$$

$$G = \{(0, a+b, -b) \in \mathbb{R}^3 \ ou \ a \in \mathbb{R} \ et \ b \in \mathbb{R}\}$$

1) Trouver une base de F et une base de G ainsi que leurs dimensions.
2) Calculer la dimension de $F + G$ en déduire le sous espace $F + G$
3) Les sous espaces F et G sont t-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? justifier votre réponse.

<u>Exercice 2</u> : (8 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) = (-1,-2,-2) \\ f(e_2) = (-3,-2,-3) \\ f(e_3) = (4,4,5) \end{cases}$$

Ou $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) déterminer la matrice A de f relative a la base canonique $\mathcal{B}$.

2) déterminer les nombres réels a et b pour que le vecteur $v_1 = e_1 + ae_2 + be_3$ ait une image nulle par f : $f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

3) on pose $v_2 = f(e_2)$ et $v_3 = f(e_3)$ .montrer que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

4) écrire la matrice A' de f suivant la base $\mathcal{B}'$.en déduire $Ker(f)$ et $Im(f)$.

5) montrer que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

<u>Exercice 3</u> : (5.5 pts)

Soit la matrice B définie en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ par :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

1) montrer que $rg(B) \geq 2$.

2) calculer le déterminant de B en déduire le rang de B suivant les valeurs de .

3) pour $\alpha = 7$ montrer que B inversible et calculer B^{-1}.

bon courage

جـامعة محمد الصديق بن يحي – جيجـل
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلــي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **2018 - 06-23**

السـنة الأولــى **الوقت : ساعتين**

الامتحــان الاستدراكي للجــــبر الخطي

التمرين 1 : (6.5 ن)

لتكن الفضاءات الشعاعية الجزئية G و F من $\mathbb{R}^3$ المعرفة بـ :

$$F = \langle v_1 = (2,1,0), v_2 = (-1,0,1), v_3 = (4,1,-2)\rangle$$

$$G = \{(0, a+b, -b) \in \mathbb{R}^3 \ ou \ a \in \mathbb{R} \ et \ b \in \mathbb{R}\}$$

1) عين أساس لـ G و أساس لـ F و بعديهما.

2) احسب بعد الفضاء الشعاعي الجزئي $F+G$ و استنتج الفضاء $F+G$.

3) هل الفضاءان G و F متكاملين في $\mathbb{R}^3$ ؟ علل اجابتك.

التمرين 2 : (8 ن)

ليكن f تطبيق خطي داخلي معرف على $\mathbb{R}^3$ بـ :

$$\begin{cases} f(e_1) = (-1,-2,-2) \\ f(e_2) = (-3,-2,-3) \\ f(e_3) = (4,4,5) \end{cases}$$

حيث $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ الاساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

1) عين المصفوفة A المرفقة للتطبيق f في الاساس القانوني $\mathcal{B}$.

2) عين الاعداد الحقيقية b و a حتى تكون صورة الشعاع $v_1 = e_1 + ae_2 + be_3$ بـ f معدومة اي $f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

3) نضع $v_3 = f(e_3)$ و $v_2 = f(e_2)$. برهن أن $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

4) عين المصفوفة A' المرفقة للتطبيق f في الاساس $\mathcal{B}'$ و استنتج الفضاءات $Ker(f)$ و $Im(f)$.

5) برهن أن $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

التمرين 3 : (5.5 ن)

لتكن المصفوفة B المعرفة بدلالة $\alpha \in \mathbb{R}$ بـ :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

1) برهن أن $r(B) \geq 2$

2)احسب محدد المصفوفة B ثم عين رتبتها حسب قيم α .

3) من اجل $\alpha = 7$ برهن ان B قابلة للقلب و احسب B^{-1} .

بالتوفيق

Examen de rattrapage d'algèbre linéaire
Corriger type

Exercice 1 :

1) $det\{v_1, v_2, v_3\} \neq 0 \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3\}\ libre$

$$det\{v_1, v_2, v_3\} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ lié

$det_{1\,2}\{v_1, v_2\} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}\ libre\ alors\ c'est\ une\ base\ de\ F$ et $\dim F = 2$

$G = \{(0, a+b, -b) \in \mathbb{R}^3\ ou\ a \in \mathbb{R}\ et\ b \in \mathbb{R}\} = \{a(0,1,0) + b(0,1,1) : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

$G = \langle v_4 = (0,1,0), v_5 = (0,1,1)\rangle$.il est clair que $\{v_4, v_5\}$ libre donc c'est une base de G et $\dim G = 2$.

2)on a $F + G = \langle v_1, v_2, v_4, v_5\rangle$ mais $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ lié car $v_i \in \mathbb{R}^3$

D'autre part $det\{v_1, v_2, v_4\} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}\ libre$ donc c'est une base de $F + G$ et $dim(F+G) = 3$

On a $dim(F+G) = 3 = dim\mathbb{R}^3$ alors $F + G = \mathbb{R}^3$

3) F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ car $dim(F \cap G) = dimF + dimG - dim(F+G) = 1 \Rightarrow F \cap G \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Exercice 2 :

1)

$$\left\{\begin{matrix} f(e_1) = (-1,-2,-2) \\ f(e_2) = (-3,-2,-3) \\ f(e_3) = (4,4,5) \end{matrix}\right\} \to A = \mathcal{M}_f(B) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$$

2) $0_{\mathbb{R}^3} = f(v_1) = f(e_1) + af(e_2) + bf(e_3) = (0, -2-2a+4b, -2-3a+5b) \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow v_1 = e_1 + e_2 + e_3$

3) $B'base \leftrightarrow \begin{cases} cardB' = dim\mathbb{R}^3 = 3\ vérifier \\ B'libre \leftrightarrow det\{v_1, v_2, v_3\} \neq 0 \end{cases}$

$$det\{v_1, v_2, v_3\} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} = 1 \neq 0\ donc\ B'base\ de\ \mathbb{R}^3$$

4)

$$\left.\begin{matrix} f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ f(v_2) = -3f(e_1) - 2f(e_2) - 3f(e_3) = v_2 \\ f(v_3) = 4f(e_1) + 4f(e_2) + 5f(e_3) = v_3 \end{matrix}\right\} \to A' = \mathcal{M}_f(B') = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$$

On remarque que $rg(A') = 2 \to Im(f) = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3)\rangle = \langle v_2, v_3\rangle$

On a $dim(Ker(f)) = dim\mathbb{R}^3 - dim(Im(f)) = 1 \to Ker(f) = \langle v_1\rangle$

$$Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 3\ verifier \\ \{v_1, v_2, v_3\}\ base\ de\ \mathbb{R}^3\ verifier \end{cases}$$

Exercice 3:

1) $rg(A) \geq 2 \leftrightarrow au\ moins\ 2\ vecteurs\ linéairement\ indépendantes$

$\leftrightarrow 1\ d\acute{e}terminant\ parciel\ non\ nulle$

$$det_{1,2}\{C_1, C_2\} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \rightarrow \{C_1, C_2\}\ libre \rightarrow rg(A) \geq 2$$

$$detB = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 10 & 0 & 7 \\ \alpha+4 & 0 & \alpha+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2+2L_1 \\ L_3+L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ \alpha+4 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 3(\alpha-6)$$

Si $\alpha \neq 6 \rightarrow detB \neq 0 \rightarrow rgB = 3$

Et Si $\alpha = 6 \rightarrow detB = 0 \rightarrow rg(B) < 3\ et\ comme\ rg(B) \geq 2 \rightarrow rg(B) = 2$

3) Si $\alpha = 7 \rightarrow detB = 3 \neq 0 \rightarrow B\ inversible$

Calcul de B^{-1} exemple méthode du déterminant

$$B^{-1} = \frac{1}{detB}\ {}^{t}\begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & \Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix} ou\ \Delta_{\mathrm{i,j}} = (-1)^{\mathrm{i+j}}|A_{i,j}|$$

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \qquad \Delta_{1,2=} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -3 \qquad \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_{2,1} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \qquad \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_{2,3} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad \Delta_{3,2} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_{3,3=} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$B^{-1} = \tfrac{1}{3}\ {}^{t}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -12 \\ 8 & -1 & -11 \\ -7 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 8 & -7 \\ -3 & -1 & 2 \\ -12 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

Université de jijel
Faculté des sciences exactes et informatique
Département des M I **juin 2018**

Durée : 2heurs

Examen d'algèbre linéaire

Exercice 1 :

soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ et I_n la matrice identique. On suppose que

$$A \times B = I_n + A + A^2$$

1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de A,B et I_n .

2) Montrer que $A \times B = B \times A$

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) calculer le rang de f en déduire que A est inversible.

2) soit $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ la famille définie par

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ v_2 = e_1 - e_3 \\ v_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

a) montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice A' de f dans $\mathcal{B}'$

b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}

c) calculer les coordonnés du vecteur $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ dans la base $\mathcal{B}'$

d) quelle relation lie les matrices A, A', P et P^{-1} ?

e) calculer la matrice inverse de A' en déduire la matrice inverse A^{-1}

Exercice 3 :

Soit la matrice $M(\alpha)$ ou $\alpha \in \mathbb{R}$ définie par :

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & -1 \\ -1 & 2-\alpha & 1 \\ -2 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

1- résoudre l'équation $det\big(M(\alpha)\big) = 0$

2- soit le système linéaire $M(\alpha) \times X = B$ ou ${}^tX=(x, y, z)$, ${}^tB=(a, b, c)$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ donnés.

a) trouver les valeurs de α ou le système admet une solution unique.

b) pour $\alpha = 1$ .utiliser la méthode de Cramer pour calculer la solution du système $M(1) \times X = B$ en fonction de $a, b\ et\ c$

c) déterminer la matrice A ou $X = A \times B$ en déduire la matrice inverse $\big(M(1)\big)^{-1}$

bon courage

جـامعة محمد الصديق بن يحي – جيجـل
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلـــي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **15 – 02 - 2018**
السـنـة الأولـــى **الوقت : ساعتين**

امتحــان الجـــــبر الخطي

التمرين 1 :

لتكن B و A مصفوفتان من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ و I_n مصفوفة الوحدة.نفرض أن:

$$A \times B = I_n + A + A^2$$

1) برهن أن المصفوفة A قابلة للقلب و أحسب A^{-1} بدلالة I_n ، B و A

2) برهن أن $A \times B = B \times A$

التمرين 2 :

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$ مزود باساس $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$

و ليكن f تطبيق خطي داخلي على E معرف في الأساس $\mathcal{B}$ بالمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) أحسب رتبة التطبيق f و استنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب

2) لتكن المجموعة $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ معرفة بـ :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ v_2 = e_1 - e_3 \\ v_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

أ) برهن أن $\mathcal{B}'$ أساس لـ E و عين A' مصفوفة التطبيق f في الاساس $\mathcal{B}'$

ب) عين مصفوفة العبور P من $\mathcal{B}$ الى $\mathcal{B}'$ ثم أحسب P^{-1}

ج) عين احداثيات الشعاع $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ في الاساس $\mathcal{B}'$

د) ما هي العلاقة التي تربط بين المصفوفات : A, A', P و P^{-1}

ه) احسب $(A')^{-1}$ و استنتج A^{-1}

التمرين 3 :

لتكن المصفوفة $M(\alpha)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ معرفة بـ :

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & -1 \\ -1 & 2-\alpha & 1 \\ -2 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

1- اوجد جذور المعادلة : $det(M(\alpha)) = 0$

2- لتكن جملة المعادلات الخطية $M(\alpha) \times X = B$ حيث ${}^tX=(x, y, z)$ ، ${}^tB=(a, b, c)$

و $a, b, c \in \mathbb{R}$ معطاة.

أ- عين قيم α التي من اجلها تكون الجملة تقبل حل وحيد.

ب- من اجل $\alpha = 1$ استخدم طريقة كرامر في ايجاد حل المعادلة $M(1) \times X = B$ بدلالة (a, b, c)

ج- عين المصفوفة A حيث $X = A \times B$ و استنتج مقلوب المصفوفة $M(1)$

بالتوفيق

الحل النمودجي لامتحان الجبر الخطي (جوان 2018)

Exercice 1 :

1) A inversible $\leftrightarrow \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k}): A \times D = D \times A = I_n$ et $A^{-1} = D$

$A \times B = I_n + A + A^2 \rightarrow A \times B - A - A^2 \rightarrow A \times (B - A - I_n) = I_n$

Donc $A^{-1} = B - A - I_n$ et $B = A^{-1} + A + I_n$

2) on a $B = A^{-1} + A + I_n \rightarrow B \times A = (A^{-1} + A + I_n) \times A = I_n + A + A^2 = A \times B$

Exercise 2 :

1) On a $rg(f) = rg(A) = dim\big(Im(f)\big)$

$$rg(A) = 3 \leftrightarrow detA \neq 0$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow rg(f) = 3$$

$rg(f) = 3 \rightarrow Im(f) = E \rightarrow f\ surjective \rightarrow dim\big(Ker(f)\big) = dimE - rg(f) = 0$
$\rightarrow f\ injective\ \ \rightarrow f\ isomorphisme \rightarrow A\ inversible$

2) a) $B'base \leftrightarrow \begin{cases} cardB' = dimE = 3\ vérifier \\ B'libre \leftrightarrow det\{v_1, v_2, v_3\} \neq 0 \end{cases}$

$$det\{v_1, v_2, v_3\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc $B'base$ de E

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = -2e_1 + 3e_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(v_1) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e_1 + e_2 - e_3 = v_1 \\ f(v_2) = f(e_1) - f(e_3) = 2e_1 - 2e_3 = 2v_2 \\ f(v_3) = f(e_1) - f(e_2) = 3e_1 - 3e_2 = 3v_3 \end{cases}$$

$$A' = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

b) matrice de passage P de B dans B' : $P = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$

calcul de P^{-1} :on peut le calculer avec plusieurs méthodes

exemple : $\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ v_2 = e_1 - e_3 \\ v_3 = e_1 - e_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - v_2 + v_3 \\ e_2 = v_1 - v_2 \\ e_3 = v_1 - 2v_2 + v_3 \end{cases} \rightarrow P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$

c) les coordonnés du vecteur $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ dans la base $\mathcal{B}'$

$v = e_1 + 2e_2 + 3e_3 = av_1 + bv_2 + cv_3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow v = 6v_1 - 9v_2 + 4v_3$$

d) $A' = P^{-1} \times A \times P$ et $A = P \times A' \times P^{-1}$

e) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = P \times (A')^{-1} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_1+v_2+\ v_3$$

1)$|M(\alpha)|=0 \leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\alpha & 2 & -1\\ -1 & 2-\alpha & 1\\ -2 & 1 & 3-\alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\alpha & 2 & -1\\ 2-\alpha & 2-\alpha & 1\\ 2-\alpha & 1 & 3-\alpha\end{vmatrix}=$
$(2-\alpha)\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 2-\alpha & 1\\ 1 & 1 & 3-\alpha\end{vmatrix}=(2-\alpha)\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 4-\alpha & 1\\ 4-\alpha & 7-\alpha & 3-\alpha\end{vmatrix}$
$=(2-\alpha)\left(\alpha-2-\sqrt{2}\right)\left(\alpha-2+\sqrt{2}\right)\leftrightarrow \alpha=2\ ou\ \alpha=2-\sqrt{2}\ ou\ \alpha=2+\sqrt{2}$

2) a) $M(\alpha)\times X=B$ admet une solution unique $\leftrightarrow det\big(M(\alpha)\big)\neq 0 \leftrightarrow \alpha\in\mathbb{R}-\{2-\sqrt{2},2,2+\sqrt{2}\}$

b) $\alpha=1\rightarrow det\big(M(1)\big)=-1$ d'après Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix}a & 2 & -1\\ b & 1 & 1\\ c & 1 & 2\end{vmatrix}}{det\big(M(1)\big)}=-a+5b-3c,\ y=\frac{\begin{vmatrix}0 & a & -1\\ -1 & b & 1\\ -2 & c & 2\end{vmatrix}}{det\big(M(1)\big)}=2b-c,\ z=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2 & a\\ -1 & 1 & b\\ -2 & 1 & c\end{vmatrix}}{det\big(M(1)\big)}=-a+4b-2c$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

On a $M(1)\times X=B\rightarrow X=\big(M(1)\big)^{-1}\times B\rightarrow\big(M(1)\big)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}$

جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلـــي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **2017/06/19**

السـنة الأولى **الوقت : ساعتين**

الامتحان الاستدراكي - الجبر 2 –

<u>التمرين الأول:</u> (3.75)

من أجل $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. نعرف المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

1- أحسب محدد المصفوفة A. ما هي رتبة A في الحالات التالية:

أ- $a = b = c$

ب- $a = b$ و $b \neq c$

ج- $a \neq b$ ، $a \neq c$ و $b \neq c$

<u>التمرين الثاني</u>: (10)

ليكن التطبيق الخطي الداخلي المعرف على $\mathbb{R}^3$ بـ $f(x,y,z) = (y, z, -2x + y + 2z)$

a) أوجد المصفوفة $A = M_f(B)$ المرفقة لـ f في الأساس القانوني $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

b) عين نواة f و استنتج أن A قابلة للقلب.

c) أحسب $\{f^{-1}(e_1), f^{-1}(e_2), f^{-1}(e_3)\}$ بدلالة $\{e_1, e_2, e_3\}$ و استنتج المصفوفة A^{-1} .

d) برهن أن $B' = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (1,2,4)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

e) عين مصفوفة العبور P من B الى B' ثم أحسب P^{-1}

f) اعط المصفوفة $A' = M_f(B')$ المرفقة لـ f في الأساس B' بدلالة P, A و P^{-1} ثم احسبها

<u>التمرين الثالث :</u> (6.25)

لتكن المجموعة $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1) برهن أن H فضاء شعاعي من $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

2) عين أساس لـ H و استنتج $\dim H$

3) ليكن G فضاء متمم لـ H. برهن أن $\dim G = 1$

4) ليكن $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. برهن أن $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{H} \oplus \mathrm{G}$.

بالتوفيق

الحل النموذجي للامتحان الاستدراكي (جوان 2017)

التمرين 1: حساب المحدد

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&c-a\\b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}=(b-a).(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\a+b&a+c\end{vmatrix}$$

$$\det A=(b-a).(c-a)(c-b)$$

- رتبة المصفوفة هو العدد الاكبر من الاعمدة المستقلة خطيا.

$$a)\quad si\quad a=b=c\to V_1=V_2=V_3\neq 0_{\Re^3}\to rgA=1$$

$$b)\quad si\quad a=b\quad et\quad b\neq c\to \det A=0\ et\begin{vmatrix}1&1\\a&c\end{vmatrix}=c-a\neq 0\to rgA=2$$

$$c)\quad si\quad a\neq b, a\neq c\quad et\quad b\neq c\to \det A\neq 0\to rgA=3$$

التمرين 2:

$$a)\qquad \begin{cases}f(e_1)=(0,0,-2)=-2e_3\\ f(e_2)=(1,0,1)=e_1+e_3\\ f(e_3)=(0,1,2)=e_2+2e_3\end{cases}\Rightarrow A=M_f(B)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

$$b)\quad (x_1,x_2,x_3)\in Kerf\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_2=0\\x_3=0\\-2x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}\to(x_1,x_2,x_3)=0_{\Re^3}$$

$$\to Kerf=\{0_{\Re^3}\}\to \dim Kerf=0\ et\ \dim \operatorname{Im} f=3\to f\ bijective\to A\ inversible$$

$$c)\quad\begin{cases}f(e_1)=-2e_3\to f^{-1}(e_3)=-\frac{1}{2}e_1\\ f(e_2)=e_1+e_3\to f^{-1}(e_1)=e_2-f^{-1}(e_3)=\frac{1}{2}e_1+e_2\\ f(e_3)=e_2+2e_3\to f^{-1}(e_2)=e_3-2f^{-1}(e_3)=e_1+e_3\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=M_{f^{-1}}(B)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(e) B' أساس ل $\Re^3$ $\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(1)\quad cadB'=\dim\Re^3\\(2)\quad B'\ libre\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}(1)\quad cadB'=3\\(2)\quad \det B'\neq 0\end{matrix}\right\}$

بما أن $\det B'=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-2&1\\1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\0&3\end{vmatrix}=-6$ و $carB'=3$ اذن B' أساس لـ $\Re^3$

2) مصفوفة العبور P من B الى B' هي : $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}$ و $\det P=-6$

لحسب P^{-1} نستخدم مثلا طريقة المحدد.

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}{}^{t}\begin{pmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{12}&\Delta_{13}\\\Delta_{21}&\Delta_{22}&\Delta_{23}\\\Delta_{31}&\Delta_{32}&\Delta_{33}\end{pmatrix}\ ou\ \Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|P_{ij}|$$

حيث P_{ij} ناتجة عن حذف العمودj و السطرi

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_{11}=-6,\Delta_{12}=-2,\Delta_{13}=2\\ \Delta_{21}=-3,\Delta_{22}=3,\Delta_{23}=0\\ \Delta_{31}=3,\Delta_{32}=-1,\Delta_{33}=-2\end{array}\right\}\Rightarrow P^{-1}=\frac{-1}{6}{}^{t}\begin{pmatrix}-6&-2&2\\-3&3&0\\3&-1&-2\end{pmatrix}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}-6&-3&3\\-2&3&-1\\2&0&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$A'=P^{-1}\times A\times P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&4\\1&-1&8\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-6&0\\0&0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

التمرين 3 :

1) H فضاء شعاعي من $M_2(\Re)$ الى $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}1)\quad 0_{M_2(\Re)}\in H\\ 2)\quad \forall A,A'\in H: A+A'\in H\\ 3)\quad \forall A\in H,\lambda\in H:\lambda.A\in H\end{array}\right\}$

1) $pour\ a=b=c=0\rightarrow 0_{M_2(\Re)}\in H$

2) $\forall A,A'\in H: A+A'=\begin{pmatrix}a+b&c\\2c&-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a'+b'&c'\\2c'&-b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a''+b''&c''\\2c''&-b''\end{pmatrix}\quad ou\ a''=a+a',b''=b+b'\ et\ c''=c+c'$

3) $\forall A\in H,\lambda\in H:\lambda.A=\lambda.\begin{pmatrix}a+b&c\\2c&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a+\lambda b&\lambda c\\2\lambda c&-\lambda b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'+b'&c'\\2c'&-b'\end{pmatrix}\quad ou\ a'=\lambda a,b'=\lambda b\ et\ c'=\lambda c$

2) $H=\left\{\begin{pmatrix}a+b&c\\2c&-b\end{pmatrix};a,b,c\in\Re\right\}=\left\{a.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix};a,b,c\in\Re\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\rangle$

$H=\left\langle E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\rangle$

$\{E_1,E_2,E_3\}\quad libre\Leftrightarrow[\lambda.E_1+\alpha E_2+\beta E_3=0\rightarrow\lambda=\alpha=\beta=0]$

$\lambda.E_1+\alpha E_2+\beta E_3=\begin{pmatrix}\lambda+\alpha&\beta\\2\beta&-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda+\alpha=\beta=-\alpha=0\Rightarrow\lambda=\alpha=\beta=0$

$\Rightarrow\{E_1,E_2,E_3\}base\ de\ H\ et\ \dim H=3$

3) اذا كان G متمم لـ H فان $\dim G=4-3=1\Leftarrow\dim H+\dim G=\dim M_2(\Re)=4$

4) $\left.\begin{array}{l}1)\quad\dim H+\dim G=\dim M_2(\Re)=4\\ 2)\ \{E_1,E_2,E_3,E_4\}\ base\ de\ M_2(\Re)\ ou\ E_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Leftrightarrow H\oplus G=M_2(\Re)$

لدينا $card\{E_1,E_2,E_3,E_4\}=4$ و $\dim H+\dim G=3+1=\dim M_2(\Re)$ محققة

$$\lambda.E_1+\alpha E_2+\beta E_3+\gamma E_4=\begin{pmatrix}\lambda+\alpha+\gamma&\beta+\gamma\\2\beta+\gamma&-\alpha+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda+\alpha+\gamma=\beta+\gamma=2\beta+\gamma=\gamma-\alpha=0$$

$$\Rightarrow\lambda=\alpha=\beta=\gamma=0\Rightarrow.\{E_1,E_2,E_3,E_4\}base\Rightarrow H\oplus G=M_2(\Re)$$

جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلـــي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **2017/05/23**
السـنة الأولـى **الوقت : ساعتين**

امتحــان الجـــبر 2

التمـرين الأول:

ليكن $m \in \mathbb{R}^*$. نعرف المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$ و $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1- أحسب $(A + I_3) \times (A - 2I_3)$. و استنتج أن A قابلة للقلب و أحسب A^{-1}

2- نضع $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$ و $C = -\frac{1}{3}(A - 2I_3)$.

أ- أحسب B^2،C^2 ثم استنتج B^n و C^n من أجل $n \geq 1$

ب- تأكد أن $C \times B = 0$ و $A = 2B - C$

ج- باستخدام دستور ثنائي الحد أوجد قيمة A^n بدلالة n, B و C

التمـرين الثاني:

1- لتكن A ،B و C ثلاث مصفوفات.

برهن أنه اذا كان $A \times B = A \times C$ و A قابلة للقلب فان $B = C$

2- لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1- احسب رتبة المصفوفة A و استنتج أنA قابلة للقلب.

2- من اجل $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. نريد حل جملة المعادلات $A \times X = B$

أ- استخدم طريقة كرامر في ايجاد قيم x ،y و z بدلالة a ،b و c

ب- عين المصفوفة D بحيث $X = D \times B$

ج- استخدم السؤال الاول في ايجاد قيمة A^{-1}

التمـرين الثالث :

لتكن $B = \{1, X, X^2\}$ الاساس القانوني لـ $\mathbb{R}_2[X]$

و $B' = \{P_1 = 1 + X^2, P_2 = 1 - X + X^2, P_3 = 2 - 2X + X^2\}$

1) برهن أن B' اساس لـ $\mathbb{R}_2[X]$

2) عين مصفوفة العبور P من B الى B′ ثم أحسب P^{-1}

3) ليكنf تطبيق خطي داخلي معرف على $\mathbb{R}_2[X]$ بالمصفوفة

$$A = M_f(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

أ) أوجد الصيغة: $f(a_0 + a_1X + a_2X^2)$ حيث $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$.

ب)عين أساس وبعد Imf واستنتج بعد و أساس $Kerf$.

ج) أوجد المصفوفة $A' = M_f(B, B')$ المرفقة لـ f في الأساسين B و B'

بالتوفيق

الحل النمودجي لامتحان الجبر الخطي (ماي 2017)

التمرين الاول:

-1
$$\left(A+I_3\right)\times\left(A-2I_3\right)=\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(A+I_3\right)\times\left(A-2I_3\right)=A^2-A-2I_3=0\to I_3=\frac{1}{2}\left(A^2-A\right)=\frac{1}{2}\left(A-I_3\right)\times A\to$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-I_3\right)=\frac{1}{2}\left(A-I_3\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -1\end{pmatrix}$$

أ)
$$B^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}=B\ par\ recurence\ B^n=B$$

$$C^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}=C\ par\ recurence\ C^n=C$$

ب)
$$C\times B=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0_{M_2(\Re)}$$

$$2B-C=\frac{2}{3}\left(A+I_3\right)+\frac{1}{3}\left(A-2I_3\right)=A$$

ج) بما أن $C\times B=B\times C=0$ ، $B^n=B$ و $C^n=C$ اذن بتطبيق دستور ثنائي الحد

$$A^n=\left(2B-C\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{n-k}.2^k C_n^k B^k C^{n-k}=\left(-1\right)^n C+2^n B$$

التمرين الثاني:

1) $A\times B=A\times C\to A^{-1}\times\left(A\times B\right)=A^{-1}\times\left(A\times C\right)\to A^{-1}\times A\times B=A^{-1}\times A\times C\to B=C$

-2 رتبة المصفوفة هو العدد الاكبر من الاعمدة المستقلة خطيا. $rgA=3\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -4\end{vmatrix}=-4\neq 0\to rgA=3$$

أ) بما ان $rgA=3$ اذن A قابلة للقلب و الجملة $A\times X=B$ تقبل حل وحيد.نستخدم كرامر في حساب الحل

$$\det A_1=\begin{vmatrix}a&4&3\\b&1&1\\c&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+3c&10&0\\b+c&3&0\\c&2&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a+3c&10\\b+c&3\end{vmatrix}=-(3a-10b-c)\to x=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{1}{4}(3a-10b-c)$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix}2&a&3\\0&b&1\\2&c&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&a&3\\0&b&1\\0&c-a&-4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}b&1\\c-a&-4\end{vmatrix}=2(a-4b-c)\to y=\frac{\det A_2}{\det A}=-\frac{1}{2}(a-4b-c)$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix}2&4&a\\0&1&b\\2&2&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&a\\0&1&b\\0&-2&c-a\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&b\\-2&c-a\end{vmatrix}=2(-a+2b+c)\to z=\frac{\det A_3}{\det A}=-\frac{1}{2}(-a+2b+c)$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(3a-10b-c)\\\frac{1}{4}(-2a+8b+2c)\\\frac{1}{4}(2a-4b-2c)\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-10&-1\\-2&8&2\\2&-4&-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Rightarrow D=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-10&-1\\-2&8&2\\2&-4&-2\end{pmatrix}$$

ج) بتطبيق السؤال الاول و من $A\times X=B \Leftarrow X=A^{-1}\times B=D\times B \Leftarrow A^{-1}=D=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-10&-1\\-2&8&2\\2&-4&-2\end{pmatrix}$

التمرين الثالث:

1) B' أساس لـ $\Re_2[X] \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(1)\quad cadB'=\dim\Re_2[X]\\(2)\quad B'\ libre\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}(1)\quad cadB'=3\\(2)\quad \det B'\neq 0\end{matrix}\right\}$

بما أن $\det B'=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-1&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\0&-1\end{vmatrix}=1$ و $carB'=3$ اذن B' أساس لـ $\Re_2[X]$

2) مصفوفة العبور P من B الى B' هي $P=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$ و $\det P=1$

لحسب P^{-1} نستخدم مثلا طريقة المحدد.

$P^{-1}=\frac{1}{\det P}{}^t\begin{pmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{12}&\Delta_{13}\\\Delta_{21}&\Delta_{22}&\Delta_{23}\\\Delta_{31}&\Delta_{32}&\Delta_{33}\end{pmatrix}$ ou $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|P_{ij}|$ حيث P_{ij} ناتجة عن حذف العمودj و السطرi

$$\left.\begin{matrix}\Delta_{11}=1,\Delta_{12}=-2,\Delta_{13}=1\\\Delta_{21}=1,\Delta_{22}=-1,\Delta_{23}=0\\\Delta_{31}=0,\Delta_{32}=2,\Delta_{33}=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow P^{-1}={}^t\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

3) أ- $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=1+X+X^2\\f(X)=1-X^2\\f(X^2)=2+X\end{cases}\Rightarrow f(a_0+a_1X+a_2X^2)=a_0f(1)+a_1f(X)+a_2f(X^2)$

$$=(a_0+a_1+2a_2)+(a_0+a_2)X+(a_0-a_1)X^2$$

ب) تعيين الاساس : $\det A=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&1&1\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow rgA<3\Rightarrow\{f(1),f(X),f(X^2)\}\,liée$

$$\exists (i,j)\in\{1,2,3\}:\Delta_{ij}\neq 0 \Leftrightarrow$$ جملة حرة $\{f(1), f(X)\}$

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \{f(1), f(X)\}\ libre \Rightarrow \{1+X+X^2, 1-X^2\}\ base\ de\ \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f=2$$

$$\dim Kerf=\dim \Re_2[X]-\dim \mathrm{Im}\, f=3-2=1$$

$$f(1)+f(X)=f(X^2)\Rightarrow f(1+X-X^2)=0_{\Re_2[X]}\Rightarrow 1+X-X^2\in Kerf \Rightarrow \{1+X-X^2\}\ base\ de\ Kerf$$

ج) لايجاد المصفوفة A' نحسب احداثيات الاشعة $f(1), f(X), f(X^2)$ في الاساس B'

$$\begin{cases} f(1)=1+X+X^2 \rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=P^{-1}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\rightarrow f(1)=2P_1-P_2 \\ f(X)=1-X^2 \rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=P^{-1}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}\rightarrow f(X)=P_1-4P_2+2P_3 \\ f(X^2)=2+X \rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=P^{-1}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}\rightarrow f(X^2)=3P_1-5P_2+2P_3 \end{cases}$$

و منه

$$A'=M_f(B,B')=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & -4 & -5\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

جامعـــــــة جيجـــــــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي جوان 2016

السنة الأولى الوقت: ساعتين

الامتحان الاستدراكي للجبر الخطي

التمرين الأول: (8 نقاط)

لتكن $E = M_{2,3}(\Re)$ مجموع المصفوفات ذات ثلاثة اعمدة و سطرين.

نضع $H = \{A \in M_{2,3}(\Re) : (1,1)\times A = (0,0,0)\}, F = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} : (a,b,c) \in \Re^3\right\}$

1) ما هو بعد $E = M_{2,3}(\Re)$

2) تأكد أن $A \in H \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$ حيث $(a,b,c) \in \Re^3$

3) عين أساس لـ F و أساس لـ H

4) هل الجمع $F + H$ مباشر ؟ و هل $F \oplus H = M_{2,3}(\Re)$ ؟

5) لتكن $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

تأكد أن $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ أساس لـ H

6) عين احداثيات المصفوفة $A \in H$ في الاساس B

التمرين الثاني: (6 نقطة)

ليكن $f : \Re_2[X] \to \Re_2[X]$ تطبيق خطي معرف بـ $f(P(X)) = P(X+1) - P(X)$

1) احسب $f(B)$ حيث $B = \{1, X, X^2\}$ الاساس القانوني لـ$\Re_3[X]$.

2) عين مصفوفة التطبيق f في الاساس القانوني.نرمز لها بـ $A = M_f(B,B)$

3) احسب نواة و صورة التطبيق f و بعديهما.

4) ليكن $B' = \{1, X-1, (X-1).(X-2)\}$ أساس لـ $\Re_2[X]$

عين مصفوفة العبور P من B الى B' ثم احسب P^{-1}

التمرين الثالث: (6 نقاط)

لتكن جملة المعادلات (P) معطاة بـ

$$(P) \quad \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + 4y - 3z = b \\ x + y = c \end{cases}$$

1) اكتب الجملة (P) على الشكل المصفوفي $B = A.X$ حيث ${}^tX = (x,y,z)$ و ${}^tB = (a,b,c)$

2) برهن أن الجملة (P) تقبل حل وحيد و استخدم كرامر في ايجاد هذا الحل.

3) برهن أن $X = A^{-1}.B$ و استنتج قيمة A^{-1}

بالتوفيق

التصحيح النمودجي للامتحان الستدراكي جوان 2016

التمرين الاول: 1) $\dim M_{2,3}(\Re)=2\times 3=6$

2) $A\in H \Leftrightarrow (0,0,0)=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\times(1,1)\leftarrow (0,0,0)=(a+d,b+e,c+f)$

$\Leftrightarrow d=-a, e=-b, f=-c \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ -a & -b & -c\end{pmatrix}$

3) عين أساس لـ F و أساس لـ H

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\end{pmatrix}:(a,b,c)\in\Re^3\right\}=\left\{a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$F=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle$$

اثبات ان الجملة حرة : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\leftarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\end{pmatrix}$

$a=0,b=0,c=0$ فهي حرة اذن هي اساس F و منه $\dim F=3$

$$H=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ -a & -b & -c\end{pmatrix}:(a,b,c)\in\Re^3\right\}=\left\{a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

$$H=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\right\rangle$$

اثبات ان الجملة حرة :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\leftarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c\\ -a & -b & -c\end{pmatrix}$$

$a=0,b=0,c=0$ فهي حرة اذن هي اساس H و منه $\dim H=3$

4) الجمع $F+H$ مباشر $\Leftrightarrow F\cap H=\{0_E\}$

$$A\in F\cap H\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ -a & -b & -c\end{pmatrix}\wedge A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\end{pmatrix}\Rightarrow c=-a, a=-b, b=-c$$

$$\Rightarrow a=b=c=0\Rightarrow A=0_E$$

و منه الجمع مباشر و نكتب $F\oplus H$ اذن $\dim(F+H)=\dim F+\dim H=6$

و بالتالي $F+H=M_{2,3}(\Re)$ اذن $F\oplus H=M_{2,3}(\Re)$ ؟

4) $B=\{A_1,A_2,A_3\}$ أساس لـ H $\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}(1) & cadB=\dim H\\ (2) & A_i\in H\\ (3) & B\,libre\end{matrix}\right\}$

$cardB=3=\dim H$ و من السؤال الثاني نتأكد أن $A_1\in H, A_2\in H, A_3\in H$

اثبات ان الجملة حرة : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\leftarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b+c & b+c & c\\ -(a+b+c) & -(b+c) & -c\end{pmatrix}\Rightarrow a+b+c=0,,b+c=0,c=0\Rightarrow a=b=c=0$$

و منه $B=\{A_1,A_2,A_3\}$ أساس لـ H

5) عين احداثيات المصفوفة $A\in H$ في الاساس B

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}=\alpha.A_1+\beta.A_2+\gamma.A_3 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta+\gamma & \gamma \\ -(\alpha+\beta+\gamma) & -(\beta+\gamma) & -\gamma \end{pmatrix}\to\begin{cases} \alpha=a-b \\ \beta=b-c \\ \gamma=c \end{cases}$$

$$A=(a-b).A_1+(b-c).A_2+c.A_3$$

<u>التمرين الثاني</u>: 1) حساب $f(B)$:

$$f(1)=1-1=0,\ f(X)=X+1-X=1,\ f(X^2)=(X+1)^2-X^2=2X+1$$

2) حساب المصفوفة $A=M_f(B,B)$:

$$A=M_f(B,B)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) احسب نواة و صورة التطبيق f و بعديهما.

$\operatorname{Im} f=\langle 1,1+2X\rangle$ و بما ان $\{1,1+2X\}$ حرة لان كثيري الحدود مخلفين في الدرجة اذن $\dim \operatorname{Im} f=2$

و عليه $\dim Kerf=1$ و بالتالي $Kerf=\langle 1\rangle$

4) $B'=\{1, X-1, (X-1).(X-2)\}=\{P_1,P_2,P_3\}$

مصفوفة العبور P من B الى B'

$$P=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

لحسب P^{-1} نستخدم مثلا طريقة المحدد.واضح أن $\det P=1$ لانها مصفوفة مثلثية

$P^{-1}=\dfrac{1}{\det P}\,{}^t\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$ $ou\ \Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|P_{ij}|$ حيث P_{ij} ناتجة عن حذف العمود j و السطر i

$$\Delta_{11}=1,\Delta_{12}=0,\Delta_{13}=0,\Delta_{21}=1,\Delta_{22}=1,\Delta_{23}=0,\Delta_{31}=1,\Delta_{32}=3,\Delta_{33}=1$$

$$P^{-1}={}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>التمرين الثاني</u>:

- كتابة الجملة (P) على الشكل المصفوفي $B=A.X$ حيث ${}^tX=(x,y,z)$ و ${}^tB=(a,b,c)$

$$(P)\quad \begin{cases} 2x-y+z=a \\ x+4y-3z=b \\ x+y=c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2) (P) تقبل حل وحيد $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6$ اذن (P) تقبل حل وحيد.

$$x=\frac{|A_1|}{\det A}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & 4 & -3 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}(3a+b-c)$$

$$y=\frac{|A_2|}{\det A}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -3 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-3a-b+7c)$$

$$z=\frac{|A_3|}{\det A}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 4 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-3a-3b+9c)$$

3) لدينا $B=A.X$ و A قابلة للقلب اذن $X=A^{-1}.B$ و

$$\left.\begin{cases} x=\frac{1}{6}(3a+b-c) \\ y=\frac{1}{6}(-3a-b+7c) \\ z=\frac{1}{6}(-3a-3b+9c) \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 7 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 7 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

جامعـــــــة جيجـــــــــــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي ماي 2016 الوقت: ساعتين

امتحان الجبر الخطي

التمرين الأول: (15 نقطة)

1) لتكن المصفوفة $B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ حيث $(a,b,c)\in\Re^3$

أ) أحسب B^n حيث $n\in N^*$

ب) اذكر الشرط الضروري حتى تكون المصفوفة B قابلة للقلب

ج) في حالة تحقق الشرط برهن أن $B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

2) لتكن $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ الاساس القانوني لـ $\Re^3$ و f تطبيق خطي معرف من $\Re^3$ في $\Re^3$ بـ :

$$f(e_1)=4e_1+e_2+2e_3,\ f(e_2)=-2e_1+e_2-2e_3,\ f(e_3)=-e_1-e_2+e_3$$

أ) عين مصفوفة التطبيق f في الاساس القانوني.نرمز لها بـ $A=M_f(B,B)$

ب) احسب نواة التطبيق f و استنتج أن f تشاكل.

ج) استخدم التطبيق الخطي f في ايجاد مقلوب المصفوفة A

د) عين قيم $\lambda\in\Re$ التي من اجلها تكون رتبة المصفوفة $A-\lambda I_3$ تساوي اثنان

3) نفرض أن حلول السؤال الاخير هي $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

أ) من اجل $i=1,2,3$ نضع $H_i=\{u\in\Re^3; A.u=\lambda_i u\}$. برهن أن H_i مولد بشعاع V_i يطلب تعيينه.

ب) برهن أن $B'=\{V_1,V_2,V_3\}$ اساس لـ $\Re^3$

ج) عين مصفوفة العبور P من B الى B' ثم احسب P^{-1}

د) احسب بطريقتين مختلفتين مصفوفة التطبيق f في الاساس B'. نرمز لها بـ $A'=M_f(B',B')$

و استنتج أن $A=P.A'.P^{-1}$

ه) عين مقلوب المصفوفة A' و استنتج مقلوب A بدلالة $(A')^{-1}$ ، P و P^{-1}

و) من اجل $n\in N^*$ برهن أن $A^n=P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.P^{-1}$

التمرين الثاني: (5 نقاط)

من اجل $m\in\Re$ نعتبر جملة المعادلات (P)

$$(P)\quad \begin{cases} x-y+2z=1 \\ m.x+(1-m).y+2(m-1).z=0 \\ 2x+m.y-(3m+1).z=3 \end{cases}$$

1) اكتب الجملة (P) على الشكل المصفوفي $B=A_m.X$ حيث ${}^tX=(x,y,z)$

2) احسب رتبة A_m حسب قيم m و استنتج قيم m التي من اجلها يكون (P) يقبل حل وحيد.

3) من اجل $m\neq -1$ استخدم كرامر في ايجاد حلول الجملة (P)

الحل النموذجي لامتحان الجبر الخطي (ماي 2016)

التمرين الأول:

1) أ) $$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\to B^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & c^2\end{pmatrix}\to B^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0\\ 0 & b^n & 0\\ 0 & 0 & c^n\end{pmatrix}$$

ب) B قابلة للقلب $\Leftrightarrow a.b.c\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}\Leftrightarrow B.\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}=I_3\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2) أ)حساب مصفوفة التطبيق في الاساس القانوني:
$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

ب) حساب النواة و استنتاج ان التطبيق تشاكل:

$$(x_1,x_2,x_3)\in Kerf \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\to\begin{cases} 4x_1-2x_2-x_3=0\\ x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

$$\to (x_1,x_2,x_3)=0_{\Re^3}\to Kerf=0_{\Re^3}$$

$$Kerf=0_{\Re^3}\to f\ injective \wedge \dim Kerf=0$$

$$\dim Kerf+\dim \mathrm{Im} f=\dim\Re^3=3\to \dim\mathrm{Im} f=\dim\Re^3\to \mathrm{Im} f=\Re^3\to f\ surjective$$

$$\to f\ isomorphisme$$

ج) حساب A^{-1} مستخدما التطبيق العكسي

$$Y=A.X\to\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\to\begin{cases} 4x_1-2x_2-x_3=y_1\\ x_1+x_2-x_3=y_2\\ 2x_1-2x_2+x_3=y_3\end{cases}\to$$

$$\begin{pmatrix} x_1=\frac{-1}{6}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{2}y_3\\ x_2=\frac{-1}{2}y_1+y_2+\frac{1}{2}y_3\\ x_3=\frac{-2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+y_3\end{pmatrix}\to X=A^{-1}.Y=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3\\ -3 & 6 & 3\\ -4 & 4 & 6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\to A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3\\ -3 & 6 & 3\\ -4 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

د) حساب الرتبة : نستخدم عدة طرق منها الاستقلال الخطي ،المحدد أو GAUSS التي تتمثل في اعادة المصفوفة الى مصفوفة مثلثية فتكون رتبة المصفوفة هو عدد الاسطر غير المعدومة

$$rg(A-\lambda.I_3)=rg\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & -1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix} -1 & 4-\lambda & -2\\ -1 & 1 & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 2 & -2\end{pmatrix}=$$

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 4-\lambda & -2\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda\\ 0 & (\lambda-3)(\lambda-2) & 2\lambda-4\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3+(1-\lambda)L_1\end{matrix}=rg\begin{pmatrix} -1 & 4-\lambda & -2\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ L_3\leftarrow L_3+(2-\lambda)L_2\end{matrix}$$

اذن لدينا:

$$\lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3 \rightarrow rg(A - \lambda.I_3) = 2$$
$$\lambda \in \Re - \{1,2,3\} \rightarrow rg(A - \lambda.I_3) = 3$$

3) أ) حساب الاشعة المولدة لـ H_i

$$V \in H_1 \rightarrow A.V = V \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

$$V = x_1(1,1,1) \rightarrow H_1 = \langle V_1 \rangle \; ou \; V_1 = (1,1,1)$$

$$V \in H_2 \rightarrow A.V = 2V \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2x_3 \end{cases} \rightarrow x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0$$

$$V = x_1(1,1,0) \rightarrow H_2 = \langle V_2 \rangle \; ou \; V_2 = (1,1,0)$$

$$V \in H_3 \rightarrow A.V = 3V \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3x_3 \end{cases} \rightarrow x_1 = x_3 \wedge x_2 = 0$$

$$V = x_1(1,0,1) \rightarrow H_3 = \langle V_3 \rangle \; ou \; V_3 = (1,0,1)$$

ب) اثبات أن B' اساس لـ $\Re^3$

$$B' = \{V_1, V_2, V_3\} \; base\, de\, \Re^3 \Leftrightarrow \begin{cases} cardB' = 3 \\ B' \; libre \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cardB' = 3 \\ \det\{V_1, V_2, V_3\} \neq 0 \end{cases}$$

$$\det\{V_1, V_2, V_3\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow B' \; libre \rightarrow B' \; base\, de\, \Re^3$$

ج) تعيين مصفوفة العبور P و حساب P^{-1}

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لحساب P^{-1} نستخدم عدة طرق منها طريقة المحدد

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} \; ou \; \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |P_{ij}|$$
حيث P_{ij} ناتجة عن حذف العمودj و السطرi

$$\Delta_{11} = 1, \Delta_{12} = -1, \Delta_{13} = -1, \Delta_{21} = -1, \Delta_{22} = 0, \Delta_{23} = 1, \Delta_{31} = -1, \Delta_{32} = 1, \Delta_{33} = 0$$

$$P^{-1} = - {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

د) حساب مصفوفة التطبيق في الاساس $B' = \{V_1, V_2, V_3\}$

الطريقة المباشرة : لدينا من 3) الجزء أ

$$f(V_1) = V_1, \; f(V_2) = 2V_2, \; f(V_3) = 3V_3 \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية : استخدام مصفوفة العبور و مصفوفة التطبيق في الاساس القانوني

$$A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

مما سبق لدينا $A' = P^{-1}.A.P \rightarrow A = P..A'.P^{-1}$ و منه

و) حساب مقلوب A' و استنتاج مقلوب A

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = P..A'.P^{-1} \rightarrow A^{-1} = P..(A')^{-1}.P^{-1}$$

و) حساب A^n من السؤال الاول لدينا :

$$A = P..A'.P^{-1} \rightarrow A^n = P..A'.P^{-1}.P..A'.P^{-1}...P..A'.P^{-1} = P..(A')^n.P^{-1}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \rightarrow A^n = P. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$

<u>التمرين الثاني:</u>

1) كتابة الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(P)\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ m.x + (1-m).y + 2(m-1).z = 0 \\ 2x + m.y - (3m+1).z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2(m-1) \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B = A_m X \ ou \ A_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2(m-1) \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) حساب الرتبة :

$$rg\,(A_m) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2(m-1) \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & m+2 & -3m-5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - m.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -m-1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (m+2)L_2$$

$si\ m = -1 \rightarrow rg(A_m) = 2\ et\ si\ m \neq -1 \rightarrow rg(A_m) = 3$

الاستنتاج : (P)يقبل حل وحيد $\Leftrightarrow rg(A_m) = 3 \Leftrightarrow m \neq -1$

3) استخدام كرامر في حساب حلول الجملة :

$$\det(A_m) = -m-1, \det(A_m)_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-m & 2(m-1) \\ 3 & m+3 & -3m-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-m & 2(m-1) \\ 0 & m+3 & -3m-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & 2(m-1) \\ m+3 & -3m-7 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

$$x = \frac{\det(A_m)_1}{\det(A_m)} = 1-m$$

$$\det(A_m)_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3m-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2(m-1) \\ -1 & 0 & -3m-7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} m & -2 \\ -1 & -3m-7 \end{vmatrix} = (3m+2)(m+1) \rightarrow y = \frac{\det(A_m)_2}{\det(A_m)} = -3m-2$$

$$\det(A_m)_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1-m & 0 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1-m & 0 \\ -1 & m+3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} m & 1-m \\ -1 & m+3 \end{vmatrix} = (m+1)^2 \rightarrow z = \frac{\det(A_m)_3}{\det(A_m)} = -m-1$$

جـامعـــــــــة جيجـــــــــــل
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي
جوان 2015
السنة الأولى
الوقت: ساعة و ثلاثة أرباع الساعة

الامتحان الاستدراكي للجبر الخطي

التمرين الأول:

ليكن $F=\{a.(X^2+1)+b.X+c.(X^2-X+1);(a,b,c)\in\Re^3\}$

1) برهن أن F فضاء شعاعي جزئي من $\Re_2[X]$

2) عين اساس لـ F و استنتج $\dim F$

3) نفرض أن G فضاء متمم لـ F في $\Re_2[X]$

أ) أحسب $\dim G$

ب) نفرض أن $G=\langle 1+4X+2X^2\rangle$ برهن أن $\Re_2[X]=F\oplus G$

التمرين الثاني:

ليكن $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ الاساس القانوني لـ $\Re^3$ و $B'=\{V_1=(1,2,3),V_2=(1,-1,1),V_3=(1,0,1)\}$

1) برهن أن B' أساس لـ $\Re^3$

2) عين مصفوفة العبور P من B الى B' ثم احسب P^{-1}

3) ليكن $f:\Re^3\to\Re^3$ تطبيق خطي معرف بـ:

$$V_1-V_3\in Kerf\,,\ f(V_2)=(2,1,-1),\ f(V_1)=(1,1,1)$$

أ) ذكر بتعريف رتبة التطبيق الخطي.

ب) اثبت دون حساب $rg(f)\leq 2$. هل التطبيق f متباين؟غامر؟ احسب $f(V_3)$

ج) احسب احداثيات الاشعة $f(V_1),f(V_2),f(V_3)$ في الاساس B' و استنتج $M'=M_f(B',B')$ مصفوفة f في الاساس B'

د) عين $M=M_f(B,B)$ مصفوفة f في الاساس القانوني بدلالة M' ، P و P^{-1} ثم اوجد قيمتها

التمرين الثالث:

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

1) احسب محدد المصفوفة A و استنتج أنها قابلة للقلب.

2) نفرض أن A مصفوفة التطبيق الخطي g

أ) اكتب الصيغة المصفوفية للتطبيق $Y=A\times X$ حيث Y و X يطلب تعيينهما.

ب) عين المصفوفة A^{-1} مستخدما التطبيق g.

3) تأكد أن $A^2+A-2I_3=0$ و استنتج من هذه العبارة المصفوفة A^{-1}

التمرين الرابع: نظري

1) ذكر بتعريف منقول و مقلوب المصفوفة.نفرض أن A و B قابلتين للقلب.

2) برهن أن منقول A قابل للقلب و أن $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

3) برهن أن $(A\times B)$ قابلة للقلب و أن $(A\times B)^{-1}=(B^{-1})\times(A^{-1})$

بالتوفيق

جـامعــــــــة جيجـــــــــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي ماي 2015

السنة الأولى الوقت: ساعتين

امتحان الجبر الخطي

التمــرين الأول:

ليكن E علاقة E فضاءات شعاعية على $\mathbb{R}$ و ليكن $f: E \to F$ تشاكل

1- بين أن Kerf فضاء شعاعي جزئي من E .

2- بين أن f^{-1} تطبيق خطي.

التمــرين الثاني:

I. لتكن $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ الاساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و M_f مصفوفة التطبيق الخطي $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

في الاساس B حيث $M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1- عين العبارة : $f(x, y, z)$.

2- احسب $Kerf$ و Imf و استنتج رتبة التطبيق f هل f تشاكل؟

3 - احسب M_f^{-1} مقلوب المصفوفة M_f باستعمال التطبيق f

4- نضع $B' = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (1,0,1)\}$

أ) برهن أن B' أساس لـ $\mathbb{R}^3$

ب) عين P مصفوفة العبور من B الى B' ثم احسب P^{-1}

ت) استنتج $M_f(B', B')$ المصفوفة المرفقة لـ f في الاساس B'

التمــرين الثالث:

من اجل $m \in \mathbb{R}$ نعتبر جملة المعادلات المعرفة

بـ $(S) \quad \begin{cases} 2x - 2y + mz = 1 \\ x + y + 2z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$.

1- اكتب الجملة (S) على الشكل المصفوفي $A \times X = B$ حيث $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

2- عين قيم m التي من اجلها تكون الجملة (S) تقبل حل وحيد

3- من اجل $m = 1$, استخدم كرامر في ايجاد الحل الوحيد.

4- بين أن A قابلة للقلب و عين A^{-1}

الحل النموذجي لامتحان الجبر الخطي (ماي 2015)

التمرين الاول:

-1
$(1) \quad 0_E \in E \; et \; f(0_E)=0_F \Rightarrow 0_E \in Kerf$

$(2) \quad \forall(x,y)\in(Kerf)^2 : f(x)=f(y)=0_E \Rightarrow f(x+y)=0_F \rightarrow x+y\in Kerf$

$(3) \quad \forall(\lambda,x)\in K\times Kerf : f(x)=0_E \Rightarrow f(\lambda.x)=\lambda.f(x)=0_F \rightarrow \lambda.x\in Kerf$

-2 يكفي اثبات أن $f^{-1}:F\rightarrow E$ خطي

للتذكير: f تقابلي $\Leftrightarrow \forall y\in F,\exists! x\in E : y=f(x)\wedge x=f^{-1}(y)$

$(1)\,\forall(y,y')\in F^2,\exists!(x,x')\in E^2 : y=f(x)\wedge y'=f(x')\rightarrow y+y'=f(x)+f(x')=f(x+x')$

$\rightarrow x+x=f^{-1}(y)+f^{-1}(y')\rightarrow f^{-1}(y+y')=f^{-1}(y)+f^{-1}(y')$

$(2) \quad \forall(\lambda,y)\in K\times F,\exists! x\in E : y=f(x)\rightarrow \lambda.y=f(\lambda.x)\rightarrow \lambda x=f^{-1}(\lambda.y)\rightarrow$

$f^{-1}(\lambda.y)=\lambda f^{-1}(y)$

التمرين الثاني:

-1 حساب العبارة $f(x,y,z)$. لدينا
$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y-2z\\-x+y+z\\x+y-z\end{pmatrix}$$

و منه: $f(x,y,z)=(X,Y,Z)=(3x+y-2z,-x+y+z,x+y-z)$.

-2 حساب النواة و استنتاج ان التطبيق تشاكل:

$$(x_1,x_2,x_3)\in Kerf \Rightarrow \begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}4x_1+x_2-2x_3=0\\-x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

$\rightarrow (x_1,x_2,x_3)=0_{\Re^3} \rightarrow Kerf=0_{\Re^3}$

$Kerf=\{0_{\Re^3}\}\rightarrow f \; injective \wedge \dim Kerf=0$

$\dim Kerf+\dim \mathrm{Im}\, f=\dim\Re^3=3\rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f=\dim\Re^3\rightarrow \mathrm{Im}\, f=\Re^3\rightarrow f \; surjective$

$\rightarrow f \; isomorphisme$

3 - حساب M_f^{-1} مقلوب المصفوفة M_f باستعمال التطبيق f

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}4x_1+x_2-2x_3=y_1\\-x_1+x_2+x_3=y_2\\x_1+x_2-x_3=y_3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(2y_1+y_2-3y_3)\\x_2=\frac{1}{2}(y_2+y_3)\\x_3=\frac{1}{2}(2y_1+2y_2-4y_3)\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&1&1\\2&2&-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\rightarrow M_f^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&1&1\\2&2&-4\end{pmatrix}$$

-4 نضع $B'=\{u_1=(1,1,1),u_2=(1,-1,0),u_3=(1,0,1)\}$

أ- لدينا B' أساس لـ $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\neq 0$ و هو كذلك $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1$

ب- تعيين P مصفوفة العبور من B الى B' لدينا $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

لحساب P^{-1} نستخدم عدة طرق منها طريقة المحدد

ج- $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\left|P_{ij}\right|$ ou $P^{-1}=\dfrac{1}{\det P}{}^{t}\begin{pmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{12}&\Delta_{13}\\\Delta_{21}&\Delta_{22}&\Delta_{23}\\\Delta_{31}&\Delta_{32}&\Delta_{33}\end{pmatrix}$ حيث P_{ij} ناتجة عن حذف العمود j و السطر i

$$\Delta_{11}=-1,\Delta_{12}=-1,\Delta_{13}=1,\Delta_{21}=-1,\Delta_{22}=0,\Delta_{23}=1,\Delta_{31}=1,\Delta_{32}=1,\Delta_{33}=-2$$

$$P^{-1}=-{}^{t}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}={}^{t}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

ث) استنتج $M_f(B',B')$ المصفوفة المرفقة لـ f في الاساس B'

$$A'=P^{-1}.A.P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

التمرين الثالث : 1) كتابة الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S)\begin{cases}2x-2y+mz=1\\x+y+2z=m\\x+m.y+z=1\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-2&m\\1&1&2\\1&m&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\m\\1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B=A_mX\ ou\ \begin{pmatrix}2&-2&m\\1&1&2\\1&m&1\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\m\\1\end{pmatrix}$$

2) حساب الرتبة :

$$rg\,(A_m)=rg\begin{pmatrix}2&-2&m\\1&1&2\\1&m&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}0&-4&m-4\\1&1&2\\0&m-1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-2L_2\\ \\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}$$

$$=rg\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-4&m-4\\0&0&\dfrac{m(m-5)}{4}\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftrightarrow L_2\\ \\L_3\leftarrow L_3+\dfrac{m-1}{4}L_2\end{matrix}$$

$$si\ m=0\ ou\ m=5\rightarrow rg(A_m)=2\ et\ si\ m\in\Re-\{0,5\}\rightarrow rg(A_m)=3$$

الجملة (S) تقبل حل وحيد اذا و فقط اذا كان $rg(A_m)=3$ أي $m\in\Re-\{0,5\}$

3) استخدام كرامر في حساب حلول الجملة :

$$\det(A_m) = m^2 - 5m, \det(A_m)_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & 1+2m & 2-m^2 \\ 0 & m+2 & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2m & 2-m^2 \\ m+2 & 1-m \end{vmatrix} = m^3 - m - 3$$

$$x = \frac{\det(A_m)_1}{\det(A_m)} = \frac{m^3 - m - 3}{m^2 - 5m}$$

$$\det(A_m)_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m-2 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & m-2 \\ m-1 & m \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 3 \rightarrow y = \frac{\det(A_m)_2}{\det(A_m)} = \frac{-m^2 + 3m - 3}{m^2 - 5m}$$

$$\det(A_m)_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2-2m & -1 \\ 0 & -m+1 & m-1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-2m & -1 \\ -m+1 & m-1 \end{vmatrix} = -(m-1)(2m+3)$$

$$\rightarrow z = \frac{\det(A_m)_2}{\det(A_m)} = \frac{-(m-1)(2m+3)}{m^2 - 5m}$$