Exercice TD (Stratégie Optimale de Jeu)

$k \in \{1,2\}$: Associé aux deux premières parties du jeu.

x_k : Score avant le début de la partie k. De ce fait :

$x_1 \in \{0-0\}$

$x_2 \in \{0-1, 0.5-0.5, 1-0\}$

$x_3 \in \{0-2, 0.5-1.5, 1-1, 1.5-0.5, 2-0\}$ (Etat terminal)

$$u_k = \begin{cases} A & si\ le\ joueur\ choisit\ un\ style\ agressif \\ P & si\ le\ joueur\ choisit\ un\ style\ passif \end{cases}$$

ω_k : variable aléatoire qui représente le résultat de la partie k.

$\omega_k \in \{0-1, 0.5-0.5, 1-0\}$

$f_k(x_k, u_k, \omega_k) = x_k + \omega_k.$

Récapitulons l'évolution du score :

	x_k	u_k	ω_k	$P(\omega_k = . \mid x_k, u_k)$	$x_{k+1} = x_k + \omega_k$
k=1	0 – 0	P	0.5 – 0.5	0.9	0.5 – 0.5
			0 – 1	0.1	0 – 1
		A	1 – 0	0.45	1 – 0
			0 – 1	0.55	0 – 1
k=2	0 – 1	P	0.5 – 0.5	0.9	0.5 – 1.5
			0 – 1	0.1	0– 2
		A	1 – 0	0.45	1 – 1
			0 – 1	0.55	0 – 2
	0.5 – 0.5	P	0.5 – 0.5	0.9	1 – 1
			0 – 1	0.1	0.5– 1.5
		A	1 – 0	0.45	1.5 – 0.5
			0 – 1	0.55	0.5 – 1.5
	1 – 0	P	0.5 – 0.5	0.9	1.5 – 0.5
			0 – 1	0.1	1– 1
		A	1 – 0	0.45	2 – 0
			0 – 1	0.55	1– 1

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique

Optimisation Stochastique

Cours 2

Programmation Stochastique

Master I SIAD 2020/2021

Introduction

Plusieurs problèmes de décisions se décrivent sous forme de **programmes linéaires**:

$$\mathrm{Min}\,\mathrm{F} = \sum \mathrm{c_j x_j}$$

$$\mathrm{s.c} \sum \mathrm{a_{ij}\, x_j = b_j} \quad \mathrm{i = 1, m}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, n$$

Dans plusieurs situations pratiques, les coefficients a_{ij}, b_i , c_j ne sont pas connus avec certitude: un **Programme Linéaire Stochastique (PLS)** se découle dans ce cas.

Comment le résoudre?

Méthode de la valeur estimée (EXPECTED VALUE Method)

$\text{Min } -x_2$ $\text{s.c} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $\boldsymbol{\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + x_4 = 2}$ $-1 \leq x_1 \leq 1$ $x_j \geq 0, j = 2,3,4$	$(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \begin{cases} (1,0.75)\text{avec } p = 0.5 \\ (-3,1.25)\text{avec } p = 0.5 \end{cases}$
$E[\tilde{a}_{21}]$= -1 $E[\tilde{a}_{22}]$=1 **EVS** = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,2,0,0)	$\boldsymbol{x_1 + 0.75x_2 + x_4 \ ?= 2}$ $\boldsymbol{-3x_1 + 1.25\, x_2 + x_4 ?= 2.}$ **Non faisable sous incertitude !!**

Méthode d'analyse de scénarios

Résoudre le problème **pour toutes les réalisations possibles** des variables aléatoires (Elle suppose que les évènements aléatoires se présentent suivant des distributions discrètes).

$(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \begin{cases} (1{,}0.75) \text{avec } p = 0.5 \\ (-3{,}1.25) \text{avec } p = 0.5 \end{cases}$	$\text{Min } -x_2$ $\text{s.c} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $\boldsymbol{x_1 + 0.75 + x_4 = 2}$ $-1 \leq x_1 \leq 1$ $x_j \geq 0, j = 2{,}3{,}4$ **(-1, 3, 0, 0.75).**
Chaque solution a une chance de 50% d'échouer à satisfaire la contrainte !!	$\text{Min } -x_2$ $\text{s.c} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $\boldsymbol{-3\, x_1 + 1.25\, x_2 + x_4 = 2}$ $-1 \leq x_1 \leq 1$ $x_j \geq 0, j = 2{,}3{,}4$ **(0.12, 1.88, 0, 0)**

Exercice

La demande d'une ville en eau est 10 unités. La ville reçoit de l'eau à partir d'une rivière. Cette source fournit une quantité d'eau b. En cas de manque, les autorités peuvent acheter de l'eau d'une autre ville voisine avec c$ l'unité.

Considérons que la variable aléatoire dans ce problème possède 5 réalisations possibles équiprobables qui sont : 0,3,6,9,12.

1. Appliquer l'approche de la **valeur estimée**.
2. Appliquer l'approche d'**analyse de scénarios**.
3. Considérer maintenant que la variable aléatoire suit la **loi uniforme** sur l'intervalle [2,8]. Appliquer l'approche de la **valeur estimée**.

Problèmes avec Recours

Optimiser les décisions que l'on doit prendre au moment T=1 tout **en tenant compte de leurs conséquences futures** pour toute réalisation possible des aléas.

Le mot **"Recours"** révèle la possibilité dont on dispose de remédier à une **décision de la première étape** éventuellement ***trop optimiste*** en mettant en œuvre des ***actions correctives***, évidemment ***plus chères***, qui satisfont pourtant les contraintes posées aux instants ultérieurs (T > 1).

Dans ce qui suit, nous considérerons le cas de deux étapes seulement (T=2).

Problèmes avec Recours à deux Etapes

- **Décisions de première étape** (structurantes, stratégiques) sont prises avant que l'incertitude soit levée. Elles ne peuvent plus changer à la seconde étape.
- **Décisions de seconde étape** (actions correctives ou de recours) sont prises en réagissant à la situation qui se présente après que les variables aléatoires réalisent leurs valeurs.

Exemple 1: Planification de production

Un usine peut traiter deux matières premières $mat1$ et $mat2$ afin de produire deux produits $prod1$ et $prod2$. La demande sur les produits est aléatoire ainsi que les productivités des matières premières. Afin de satisfaire ses clients, les quantités manquantes peuvent être achetées directement du marché

Décisions 1^{ere} étape: quantités traités des matières premières.

Décisions 2eme étape: quantités achetées des produits en cas de manque.

Exemple 2: Newsboy vendor problem

Chaque matin, un vendeur de journaux doit décider combien de journaux à acheter afin de maximiser son profit. Il ne sait pas au début de la journée combien de journaux il pourra vendre. À la fin de la journée, le vendeur peut retourner chaque journal invendu . La demande quotidienne en journaux est décrite par une variable aléatoire $\boldsymbol{\omega}$.

Décisions 1^{ere} étape: nombre de journaux achetées le matin

Décisions 2eme étape: nombre de journaux vendu et revendu

Formulation d’un PLS en deux étapes avec recours

Dans ce problème, les décisions de la première étape sont prises en tenant compte de leurs **conséquences futures**. Ces dernières sont mesurées par ce qu’on appelle **fonction de recours** . On dénote les variables aléatoires (discrètes ou continues) par un vecteur ξ.

$$\boldsymbol{min\ c^T\, x + \psi(x)}$$

s.c $\boldsymbol{Ax = b\ , x \geq 0}$

avec $\boldsymbol{\psi(x) = E_{\xi}[Q(x, \xi)]}$

et $\boldsymbol{Q(x,\xi) = \min\{q(\xi)^T y \mid W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x,\ y \geq 0\ \}}$

$$\min c^T x + \psi(x)$$

$$\text{s.c } Ax = b \, , x \geq 0$$

$$\psi(x) = E_\xi[Q(x,\xi)]$$

$$Q(x,\xi) = \min\{q(\xi)^T y \mid W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x, \quad y \geq 0 \}$$

- ✓ x : décisions de la première étape
- ✓ A, b, c: Matrice et vecteurs déterministes.
- ✓ $\psi(x)$: **Espérance** de la fonction de recours.
- ✓ $Q(x,\xi)$: fonction de recours.
- ✓ y : décisions de la deuxième étape
- ✓ $q(\xi)$: Vecteur stochastique des coûts unitaires de pénalités
- ✓ $\mathrm{W}(\xi)$: Matrice de recours stochastique
- ✓ $h(\xi) - T(\xi)x$: mesure le manque

Modélisation du problème de Planification de production

Un usine peut traiter deux matières premières $mat1$ et $mat2$ afin de produire deux produits $prod1$ et $prod2$. Les coûts de production sont $c^T = (2,3)^T$. La capacité de production ne peut dépasser 100. La demande sur les produits est aléatoire ainsi que les productivités des matières premières. Afin de satisfaire ses clients, les quantités manquantes peuvent être achetées directement du marché avec les coûts unitaires suivants : $q^T = (7,12)^T$.

On cherche à trouver le plan de production optimale.