

Série n°3

Exercice 1: Utiliser la définition pour montrer que les fcts suivantes sont différentiables en un point quelconque, puis trouver la différentielle de chacune par deux méthodes:
 $f(x,y) = x^2 + 3y + 1$, $g(x,y,z) = xy + yz + xz$.

Exercice 2: Soient les fcts f, g définies sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ par:

$$f(t) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}$$

$$g(t) = f^2(t)$$

Montrer que g est différentiable en $0_{\mathbb{R}^n}$, mais f n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice 3: Soit la fct f définie par

$$f(x,y) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Déterminer les dérivées premières de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- 2) Montrer que f admet des dérivées premières en $(0,0)$, et trouver

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

- 3) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et donner la différentielle de f en $(0,0)$.

4) Soit la fct h définie par

$$h(x,y) = \left(1 + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Montrer que
 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}: \|h(x,y)\|^2 = 1 + y^2 + \frac{2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq (1 + |y|)^2$

- (b) Écrire $\|\nabla f(x,y)\|$ en fct de $\|h(x,y)\|$.

- (c) Dédurre de la question (a) que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \|\nabla f(x,y)\| \leq \frac{1}{1 + |y|}.$$

Exercice 4: Montrer que la fct f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 5: Soit la fct f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

où $p, q \in \mathbb{Z}^*$

1) Montrer que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}: |xy| \leq x^2 - xy + y^2.$$

2) Étudier la continuité de la fct f selon les valeurs de p et q .

3) Montrer que f n'est pas différentiable pour $p+q=2$.

Exercice 6: Soit la fct $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$,

Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(r,\theta) \mapsto \varphi(r,\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

1) Montrer que la fct $g = f \circ \varphi$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2) Écrire les dérivées partielles premières de g en fct des dérivées partielles premières de f .

3) Écrire les dérivées premières de f en fct des dérivées premières de g .

4) Trouver la différentielle de g par deux méthodes.

Même question pour la fct $\varphi(u,v) = (u^2+v^2, uv)$.