République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique

Optimisation Stochastique

Cours 2 (suite)

Programmation Stochastique

Types de Recours

Master I SIAD 2020/2021

Recours Fixe

Lorsque **W** et **q** sont déterministes (i.e. ne dépendent pas de ξ), **les pénalités seront indépendantes de la réalisation des incertitudes**. Dans ce cas, on parle de **recours fixe ou déterministe**.

Exemple (Problème de Planification de Production)

$$\min\{2x_1 + 3x_2 + E_\xi[7\boldsymbol{y_1} + \mathbf{12}\boldsymbol{y_2}]\}$$

Sc

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$\alpha(\xi)x_1 + \boldsymbol{\beta}(\xi)x_2 + \boldsymbol{y_1} \geq h_1(\xi)$$

$$\gamma(\xi)x_1 + \boldsymbol{\delta}(\xi)x_2 + \boldsymbol{y_2} \geq h_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad \boldsymbol{y_1} \geq 0 \quad \boldsymbol{y_2} \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{F.S}}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Recours fixe complet (Parlons Informellement …)

On dit que le **recours** est **complet** Si pour chaque décision de la première étape et pour tout scénario pouvant se produire, on peut garantir l'existence d'actions correctives (c'est-à-dire qu'on arrive toujours à satisfaire les contraintes de la deuxième étape).

Est-ce que le recours est complet dans le problème d'affectation annuelle du Personnel Infirmier?

Recours fixe complet (Parlons Informellement ...)

Est que le recours est complet dans le problème d'affectation annuelle du Personnel Infirmier?

OUI. Il est claire que quelque soit l'affection des infirmiers choisie et quel que soit la demande stochastique sur les soins , il est toujours possible de satisfaire les patients.

Lesquelles parmi les règles suivantes va influencer sur le recours?

R1: il est interdit que les infirmiers travaillent pour des heures supplémentaires. (Reste complet mais plus de dépenses)

R2: il est interdit que l' hôpital fasse recours aux agences privées.

(le recours ne sera pas complet)

Recours fixe complet

Si $\forall\, \xi$ **et** $\forall\, x$, le problème de seconde étape

$$\boldsymbol{Q(x,\xi) = \min\{q(\xi)^T y \mid W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x, \quad y \geq 0\}}$$

est **réalisable**, alors **le recours est complet.** Plus formellement, le recours

est complet si la matrice de recours W de **dimension** $\boldsymbol{m \times n}$ satisfait :

$$\{t \mid t = Wy\,,\ y \geq 0\} = \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$$

Autrement :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^m \quad \exists\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\ \textit{tel que}\ \ t = Wy$$

Recours (fixe) Simple

Le recours simple est un cas particulier du recours **complet** où $W = (I \ \ -I)$

I : la matrice identité d'ordre m.

Dans l'exemple du problème de planification de production, le recours est simple vu le format de la matrice de recours et il est, de ce fait, complet.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrons qu'il est complet :

$\{t | t = Wy\ ,\ \ y \geq 0\} = \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, puisque $\exists\ y\ \in \mathbb{R}^4$ pour tout $t \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} t_1 = y_1 - y_3 \\ t_2 = y_2 - y_4 \end{cases}$$

Recours fixe relativement complet

Soit $K_1 = \{x|Ax = b\}$: l'ensemble de faisabilité de première étape.

Si $\forall\ \xi$ et $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K_1}$, le **problème de seconde étape est réalisable** alors le recours est dit **relativement complet**.

Remarques

1. Le recours complet **implique** le recours relativement complet.
2. **Théoriquement** , il nous suffit de savoir que le recours soit relativement complet.
3. **Pratiquement**, le recours complet est plus facile à identifier que le recours relativement complet.
4. Les modèles qui s'appuient sur le **recours simple** sont largement étudiés dans la littérature (sont plus faciles à résoudre que les modèles généraux de recours)

Exemples sur le recours

- Vérifier si le **recours est fixe complet** :

$$Q(x,\xi) = min\{5y_1 + 2y_2\}$$

$$s.c$$

$$y_1 \geq 1 - x_1$$

$$y_2 \geq \xi - x_1 - x_2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

- Soit le problème de seconde étape suivant :

$$Q(x,\xi) = \min\{y_1 + 10y_2 + 10y_3\}$$

$$\text{sc. } y_1 + y_2 - y_3 = \xi + x_1 - 2x_2$$

$$y_1 \leq 2$$

$$y \geq 0$$

Donner la matrice de recours puis vérifier si **le recours est fixe complet** ou non.

Contraintes Induites

Si le recours n'est pas relativement complet, alors le problème de seconde étape est **non réalisable ou infaisable**.

- ✓ Solution = Ajouter des **contraintes induites** en 1ere étape.

$$K_2 = \{x \mid T(\xi)x + Wy = h(\xi), y \geq 0\}$$

- ✓ Ensuite, on exige: $x \in K_1 \cap K_2$. à $\textit{savoir}$ $K_1 = \{x \mid Ax = b\}$

Remarque

Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ alors on doit réviser notre modèle pour s'assurer qu'il est bien conçu ou encore pour voir s'il y a d'autres possibilités de compensation qui ne sont pas encore incluses dans le modèle

Exemples sur les contraintes induites

$K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_1 - 2x_2 \geq -4;\ x_1 + 2x_2 \leq 8, 2x_1 - x_2 \leq 6\}$

Les contraintes de deuxième étape sont les suivantes :

$$\begin{cases} \xi_1 - 2x_1 - 3x_2 = y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\ \xi_2 - 3x_1 - x_2 = 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Sachant que:

$$(\xi_1, \xi_2) \in [4,19] \times [6,21]$$

Dégager les contraintes induites.

Exemples sur les contraintes induites

Considérons l'ensemble de faisabilité de première étape suivant :

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_1 + x_2 \geq -4;\ x_1 \leq 8\}$$

Considérons $(\xi_1, \xi_2) \in \{2,4\} \times \{6,8\}$ et que les contraintes de seconde étape

à satisfaire pour tout ξ sont :

$$\begin{cases} \xi_1 - 2x_1 - 3x_2 = -y_1 - 3y_2 - y_3 \\ \xi_2 - x_1 - x_2 = -2y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

1. Trouver les **contraintes induites**.
2. Donner l'ensemble auquel doivent appartenir les décisions de première étape, pour que le problème de seconde étape soit faisable ($\boldsymbol{K_1} \cap \boldsymbol{K_2}$).