Université de Jijel
Département de Mathématiques
1ème année Master Analyse Fonctionelle
Module : Théorie des semi-groupes
Chargé de module : Dalila Azzam-Laouir

Devoir à la maison

2020-2021

Exercice 1.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ et soit $B \in \mathcal{L}(E)$.
1) Soit $y \in E$. Montrer que l'équation

$$x + B(A + \lambda I)^{-1}x = y$$

admet une solution unique x, pour tout $\lambda > \|B\|_{\mathcal{L}}$.
2) Posons $u = (A + \lambda I)^{-1}x$. Montrer que $y = (\lambda I + A + B)u$ et que

$$\|u\|_E \leq \frac{1}{\lambda - \|B\|_{\mathcal{L}}}$$

en déduire que l'opérateur $A + B$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe.

Exercice 2.

Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t) : \ t \geq 0\}$. Montrer que pour tout $x_0 \in D(A)$, l'application $x : [0, +\infty[\longrightarrow E$ définie par $x(t) = T(t)x_0$ est la solution unique du problème

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \quad t \geq 0; \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et $x \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, E)$.