

II Fonctions Convexes

1 - Fonctions Convexes sur $\mathbb{R}$:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1: f est dite convexe si $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$
 $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$.

f est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte pour $a \neq b$.

Des formulations équivalentes de la convexité sont données dans la caractérisation suivante.

Proposition 1.2: f convexe $\Leftrightarrow f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b)$
 $\forall a, b \in I, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*, \lambda + \mu = 1$

$$\left(\lambda = \frac{b-x}{b-a} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

$$\forall a < x < b.$$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$$

1.3. Propriétés:

1. f, g convexes, $\alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g$ convexe.
2. La somme d'un nombre fini de fcts convexes est convexe.
3. La limite (ponctuelle) d'une suite convergente de fcts convexes est convexe.

4. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $x_i \in I, \lambda_i \geq 0, i=1, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$
 alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$ et $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

1.4. Théorème: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}$$

$$\forall a, b, x \in I, a < x < b$$

preuve: f convexe $\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$