CN

Département de mathématiques, Université de Jijel
1ème année Master, durée 1h30

RATTRAPAGE
ANALYSE CONVEXE

Exercice 1: Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels positifs strictement, montrer que

$$\sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Exercice 2: Soit E un espace de Banach, K une partie de E. On dit que K est un cone si $\forall \lambda \geq 0, \lambda K \subset K$. On considère une fonction $\varphi : K \to \mathbb{R}$, φ est dite positivement homogène si

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in K$$

On suppose que K est un cone convexe non vide de E, montrer que:

a) φ est convexe $\Leftrightarrow \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$ $\forall u, v \in K$.

b) Si $\varphi \geq 0$ et $A = \{u \in K : \varphi(u) \leq 1\}$ est convexe, alors montrer que φ est convexe.

Exercice 3: Soit E un espace vectoriel, A, B des parties de E.

a) Montrer que si A est un convexe tel que $0 \in A$, alors on a

$$0 < \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha A \subset \beta A$$

b) Montrer que

$$co(A \bigcup B) = \bigsqcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda A + (1-\lambda) B)$$

c) On dit que A est équilibré si $\forall x \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| \leq 1 : \alpha x \in A$. Montrer que si A est équilibré, alors $co(A)$ est équilibrée.