

Chapitre 06: Théorème des résidus et ses applications

1. Théorème des résidus:

Définition 1.1: Si z_0 est un point singulier isolé de f .

La fonction f est représentée donc par la série de Laurent

$$(1.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$0 < |z - z_0| < R$$

dans laquelle les coefficients a_n et a_{-n} ont des représentations intégrales connues. En particulier, on a

$$(1.2) \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz, \quad n=1, 2, \dots$$

où C est un contour fermé simple quelconque orienté dans le sens positif autour de z_0 et situé dans le domaine

$0 < |z - z_0| < R$. Lorsque $n=1$ l'expression de a_{-n} peut

s'écrire

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

Le nombre complexe a_{-1} , qui est le coefficient de $\frac{1}{z - z_0}$ dans (1.1) est appelé résidu de f au point

singulier z_0 et on le note $\text{Res}(f, z_0)$.

Théorème 1.2: (Théorème des résidus):

considérons un contour simple fermé C , orienté positivement, à l'intérieur duquel et sur lequel la fonction f est holomorphe sauf en un nombre fini de points singuliers $z_1, z_2, \dots, z_n$ intérieurs à C . Si $B_1, B_2, \dots, B_n$ désignent les résidus de f en ces points, on a

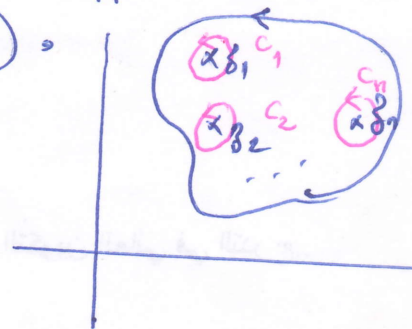
$$(1.3) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i (B_1 + B_2 + \dots + B_n)$$

Preuve: Pour démontrer le théorème, on entoure les points singuliers de cercles C_j , orientés positivement intérieur à C et assez petits pour n'avoir aucun point en commun. Les cercles C_j et le contour C forment la frontière fermée d'un ensemble dans lequel f est holomorphe. Supposons

$$\Gamma = C \cup (-C_1 \cup -C_2 \cup \dots \cup -C_n).$$

Alors, d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$



d'où

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

et comme

$$\int_{C_j} f(z) dz = 2\pi i B_j, \quad j=1, 2, \dots, n$$

Donc,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (B_1 + B_2 + \dots + B_n)$$

3. Calcul des résidus:

La méthode de base pour trouver le résidu d'une fonction en un point singulier isolé consiste à écrire la série de Laurent appropriée et à regarder quel est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$.

1. Cas d'un pôle simple:

Supposons qu'on peut écrire f sous la forme suivante

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0},$$

où φ est une fonction holomorphe en z_0 et $\varphi(z_0) \neq 0$.

D'après le développement de Taylor

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

valable dans le disque ouvert $|z - z_0| < R$. On déduit donc la série de Laurent de f :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{(z - z_0)} + \frac{\varphi'(z_0)}{1!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} + \dots$$

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Ce développement est la représentation unique en série de Laurent de la fonction f dans le domaine $0 < |z - z_0| < R$ et comme $\varphi(z_0) \neq 0$, alors z_0 est un pôle simple de f et le résidu a_{-1} est donné par $a_{-1} = \varphi(z_0)$.

Remarque: Si z_0 est un pôle simple et $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $q(z_0) = 0$ et $q'(z_0) \neq 0$.

Alors : $\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

2. Cas d'un pôle d'ordre m

cette discussion peut s'étendre aux fonctions du type

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}, \quad m = 2, 3, \dots$$

où φ est holomorphe en z_0 et $\varphi(z_0) \neq 0$. En utilisant les mêmes arguments dans le cas d'un pôle simple, on trouve que

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} + \frac{\varphi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!(z-z_0)} + \dots$$

valable dans le domaine $0 < |z-z_0| < R$. La fonction f a un pôle d'ordre m en z_0 et le résidu correspondant est donné par

$$a_{-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

3. Cas d'un point singulier éliminable (apparent)

Le résidu d'un point singulier éliminable est nul.

4. Cas d'un point singulier essentiel : Pour obtenir le résidu au point singulier essentiel z_0 il faut trouver le coefficient a_{-1} dans le développement en série de Laurent de f au voisinage du point z_0 .

Exemples:

① Trouver les résidus de $f(z) = \frac{3m z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$ aux points singulier.

les points singuliers de f sont $z_0 = 0$ et $z_1 = \pi/4$.

au point z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2(z - \pi/4)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \pi/4} \propto \frac{\sin z^2}{z^2} \rightarrow 1$$
$$= -\frac{4}{\pi} < \infty$$

Alors $z_0 = 0$ est une singularité apparente (éliminable)
et dans ce cas $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

au point $z_1 = \pi/4$:

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2(z - \pi/4)} = \infty.$$

et

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z^2}{z^2}}{z - \pi/4} = \frac{g(z)}{z - \pi/4}$$

$g(z) = \frac{\sin z^2}{z^2}$ est holomorphe au point $z_1 = \pi/4 \in \mathbb{C}$

$g(\pi/4) = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16} \neq 0$. Alors z_1 est un pôle simple

et $\text{Res}(f, z_1) = g(z_1) = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}$.

② Trouver les résidus de la fonction:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$$

les points singuliers sont $z_0 = -1$ et $z_1 = 2$.

au point $z_0 = -1$:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} = \frac{e^z/z-2}{(z+1)^3} = \frac{g(z)}{(z+1)^3}$$

on a $g(z) = \frac{e^z}{z-2}$ est holomorphe au point z_0 et $g(z_0) = \frac{e^{-1}}{-3} \neq 0$

Alors z_0 est un pôle d'ordre 3 et

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2!} \times g^{(2)}(z_0)$$

$$= \frac{17}{54} e^{-1}$$

au point $z_1 = 2$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} = \frac{e^z/(z+1)^3}{z-2}$$

$g(z) = e^z/(z+1)^3$ est holomorphe au point z_1 et $g(z_1) = \frac{e^2}{27} \neq 0$

Alors $z_1 = 2$ est un pôle simple de f est

$$\text{Res}(f, 2) = g(2) = \frac{e^2}{27}$$

Exemple: (Théorème des résidus)

calculer l'intégrale: $\int_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$

les points singuliers de $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ sont $z_0 = 0$ et $z_1 = -1$

d'où $\int_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -1))$

$$\underline{\text{Res}(f, 0) = ?}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z+1} \times \frac{e^z - 1}{z} \rightarrow 1$$

$z_0 = 0$ est une singularité apparente et donc $\text{Res}(f, 0) = 0$

$$\underline{\text{Res}(f, -1) = ?}$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z - 1}{z(z-1)} = \infty.$$

et

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{z-1} = \frac{g(z)}{z-1}$$

g est holomorphe au point $z_1 = -1$ et $g(-1) = \frac{e^{-1} - 1}{-1} \neq 0$.

Alors $z_1 = -1$ est un pôle simple de f et

$$\text{Res}(f, -1) = 1 - e^{-1}$$

Donc

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (1 - e^{-1})$$