

Travaux dirigés

Exercice 1: Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes:

1. $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$ dans les cas suivants

(a) au voisinage de 0 dans les régions

- i. $0 < |z| < 1$.
- ii. $1 < |z| < 2$.
- iii. $|z| > 2$.

(b) au voisinage de 1 dans les régions

- i. $0 < |z - 1| < 3$.
- ii. $|z - 1| > 3$.

(c) au voisinage de 2 dans les régions

- i. $0 < |z + 2| < 3$.
- ii. $|z + 2| > 3$.

2. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ dans les régions

(a) $0 < |z - 1| < 2$.

(b) $0 < |z - 3| < 2$.

Exercice 2: Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes, préciser leurs types

1. $\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$.

2. $\frac{e^z}{z}$.

3. $\frac{1}{z^3 - z^5}$.

4. $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$.

5. $\frac{ze^z}{z^2 - 1}$.

Calculer les résidus de ces fonctions.

Exercice 3: En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_{|z|=2} \tan z dz.$$

$$2. \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz.$$

$$3. \int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

$$4. \int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz.$$