Université de Jijel
Faculté des sciences et de la technologie
Département d'électrotechnique
Master I électromécanique

Exercices et solutions

Exercice 1:

Utiliser la méthode d'Euler pour donner une approximation de la solution de l'équation différentielle ci-dessous dans l'intervalle $x \in [0\ \ 0.5]$.

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

Avec: $y(x=0)=2$, $\Delta x=0.1$.

Solution de l'exercice 1:

$x \in [0\ \ 0.5]$ et $\Delta x=0.1$: $x_0=0$, $x_1=0.1$, $x_2=0.2$, $x_3=0.3$, $x_4=0.4$, $x_5=0.5$.
Dans ce cas $f(x,y)=y-x$, alors d'aprés la méthode d'Euler:

$y_n=y_{n-1}+\Delta x\ f(x_{n-1},y_{n-1})$

Si $n=1$, $x_1=0.1$

$y_1=y_0+\Delta x\ f(x_0,y_0)=2+0.1(2-0)=2.2$

Si $n=2$, $x_2=0.2$

$y_2=y_1+\Delta x\ f(x_1,y_1)=2.2+0.1(2.2-0.1)=2.41$

n	x_n	y_n
0	0	2
1	0.1	2.2
2	0.2	2.41
3	0.3	2.63
4	0.4	2.86
5	0.5	3.10

Exercice 2:

Construire un schéma au différences finies du second ordre (l'erreur de troncature est proportionnelle à Δx^2) applicable pour le nœud de frontière *i*.

Bon courage

Solution de l'exercice 2:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{a\,U_{i,j} + bU_{i-1,j} + cU_{i-2,j}}{\Delta x} + \partial\left(\Delta x^2\right) \qquad (1)$$

$$U_{i-1,j} = U_{i,j} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{\Delta x^2}{2!} - \left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{\Delta x^3}{6} + \ldots \qquad (2)$$

$$U_{i-2,j} = U_{i,j} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} (2\Delta x) + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} - \left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^3}{6} + \ldots \qquad (3)$$

En multiplie l'équation (2) par b et l'équation (3) par c ;

$$a\,U_{i,j} + bU_{i-1,j} + cU_{i-2,j} =$$

$$(a+b+c)U_{i,j} - \Delta x(2c+b)\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}(4c+b)\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \partial\left(\Delta x^3\right) \qquad (4)$$

L'identification de l'équation (4) à l'équation (1) , donne :

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ 2c+b &= -1 \\ 4c+b &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

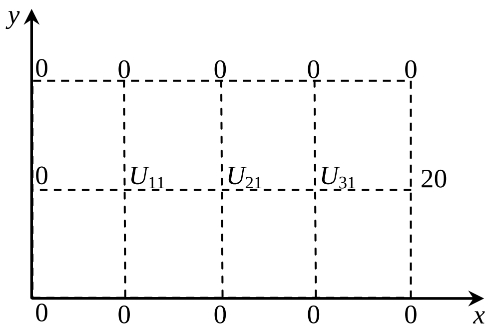
La résolution de ce système d'équation, donne l'expression suivante pour un schéma de second ordre utilisant trois points pour la dérivée première.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{3U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{2\Delta x} + \partial\left(\Delta x^2\right) \qquad (6)$$

Exercice 3:

Soit à résoudre l'équation aux dérivées partielles (EDP) ci-dessous dans le domaine $(x,y)\in[0,4]\times[0,2]$ par la méthode des différences finies.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \\ U(x,0) = U(x,2) = U(0,y) = 0 \ \text{ et } \ U(4,y) = 20 \\ \Delta x = \Delta y = 1 \end{cases}$$



1. Quel est le type de cette EDP. Justifier ?.
2. Ecrire l'expression mathématique du schéma aux différences finies pour l'approximation des dérivées de cette EDP. Démontrer ?.
3. Appliquer ce schéma sur l'EDP.
4. Ecrire le système d'équations issues dans les nœuds inconnus.
5. Déduire l'équation matricielle équivalente
6. Vérifier l'applicabilité de la méthode Gauss-Seidel pour résoudre le système d'équations obtenu.

Bon courage

Solution de l'exercice 3:

L'EDP est définie dans le domaine $(x,y)\in[0,4]\times[0,2]$ par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}=0 \\ U(x,0)=U(x,2)=U(0,y)=0 \text{ et } U(4,y)=20 \\ \Delta x=\Delta y=1 \end{cases}$$

1. Quel est le type de cette EDP. Justifier ?.

$A=C=1, B=0, \Delta=B^2-4AC=-4$

$\Delta<0$ *: l'EDP est de type elliptique.*

2 Ecrire l'expression mathématique du schéma aux différences finies pour l'approximation des dérivées de cette EDP. Démontrer ?.

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j}=\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\partial\left(\Delta x^2\right)$$

3. Appliquer ce schéma sur l'EDP.

$$-4U_{i,j}+U_{i-1,j}+U_{i+1,j}+U_{i,j-1}+U_{i,j+1}=0$$

4. Ecrire le système d'équations issues dans les nœuds inconnus.

$$\begin{cases} -4U_{11}+U_{21}+0U_{31}=0 \\ U_{11}-4U_{21}+U_{31}=0 \\ 0U_{11}+U_{21}-4U_{31}=-20 \end{cases}$$

5. Déduire l'équation matricielle équivalente

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

6. Vérifier l'applicabilité de la méthode Gauss-Seidel pour résoudre le système d'équations obtenu.

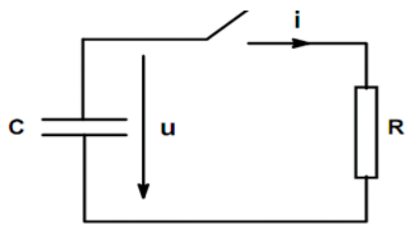
- Appliquer le test de convergence. Commenter.

$$|a_{ii}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \;\Rightarrow\; |-4|>|1|+|0| \text{ et } |-4|>|1|+|1| \text{ et } |-4|>|0|+|1|$$

Le test de la diagonale dominante est vérifié, donc le système d'équation converge naturellement vert une solution.

Exercice 4:

Le circuit ci-dessous montre la décharge d'un condensateur dans une résistance.



1. Donner l'équation différentielle du circuit (en fonction de u).
2. Utiliser la méthode d'Euler pour donner une approximation de la solution dans l'intervalle $t\in[0, 1]$.

Avec: RC=0.5, u(t=0)=5v, Δt=0.2s.

Bon courage

Solution de l'exercice 4:

1. Donner l'équation différentielle du circuit.

d'après la loi des mailles :

$Ri + u = 0$

On a: $i = C\frac{\partial u}{\partial t}$

Donc l'équation différentielle est : $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{RC}u$

2. Utiliser la méthode d'Euler pour donner une approximation de la solution.

$t \in [0\ ,\ 1]$ et $\Delta t=0.2$: $t_0=0$, $t_1=0.2$, $t_2=0.4$, $t_3=0.6$, $t_4=0.8$, $t_5=1$.

Dans ce cas, $f(t,u)=(-1/RC)u$

Alors d'après la méthode d'Euler:

$u_{n+1}=u_n+\Delta x\ f(t_n,u_n)$

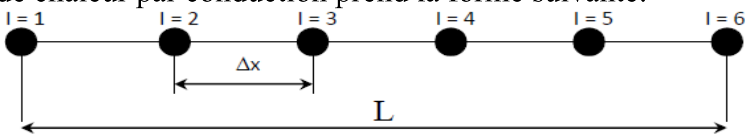
$u_1=u_0+\Delta x\ f(t_0,u_0)=5+0.2((-1/0.5)5) =3$

$u_2=u_1+\Delta x\ f(t_1,u_1)=3+0.2((-1/0.5)3) =1.8$

n	t_n	u_n
0	0	5
1	0.2	3
2	0.4	1.8
3	0.6	1.08
4	0.8	0.648
5	1	0.388

Exercice 5:

Soit un fil métallique de section droite très petite par rapport à sa longueur L de façon à ce que le flux de chaleur existe seulement suivant la longueur du fil. Si en plus la source de chaleur est absente, l'équation de Fourrier traduisant le transfert de chaleur par conduction prend la forme suivante:



$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ ,\quad 0 < x < L$$

Avec les conditions: $T(0)=1$ et $T(L)= 0$.

a est la diffusivité thermique.

Questions: Si le cas est stationnaire.

1. Quel est l'ordre de cette EDP. Justifier ?.
2. Les conditions ci-dessus sont ils des conditions aux limites ou bien des conditions initiales. Justifier ?.
3. Cette EDP est elle linéaire, non linéaire ou bien quasi-linéaire. Justifier ?.
4. Quel est le type de cette EDP. Justifier ?.
5. Ecrire l'expression mathématique du schéma aux différences finies pour l'approximation des dérivées de cette EDP.
6. Appliquer ce schéma sur l'EDP.
7. Ecrire le système d'équations issus dans les nœuds inconnus.
8. Vérifier l'applicabilité de la méthode Gauss-Seidel pour résoudre ce système d'équations.

Solution de l'exercice 5:

1. Quel est l'ordre de cette EDP. Justifier ?.

   D'ordre 2, puisque l'ordre des dérivées le plus élevé est 2.

2. Les conditions ci-dessus sont ils des conditions aux limites ou bien des conditions initiales. Justifier ?.

Bon courage

Des conditions aux limites, puisque ils sont appliquées en tout point de la frontière.

3. Cette EDP est elle linéaire, non linéaire ou bien quasi-linéaire. Justifier ?.
   Linéaire , puisque a est une constante.

4. Quel est le type de cette EDP. Justifier ?.

   $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, $C = 1, A = B = 0$

   l'EDP est de type parabolique.

5. Ecrire l'expression mathématique du schéma aux différences finies pour l'approximation des dérivées de cette EDP.

$$\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) = \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta x^2} + \partial\left(\Delta x^2\right)$$

6. Appliquer ce schéma sur l'EDP.

$$\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1} = 0$$

7. Ecrire le système d'équations issus dans les nœuds inconnus.

I=2	$\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 = 0$
I=3	$\theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0$
I=4	$\theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0$
I=5	$\theta_4 - 2\theta_5 + \theta_6 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\theta_2 + \theta_3 = -1 \\ \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \\ \theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0 \\ \theta_4 - 2\theta_5 = 0 \end{cases}$$

8. Vérifier l'applicabilité de la méthode Gauss-Seidel pour résoudre ce système d'équations.

$$|a_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$\Rightarrow \quad |-2| > |1| \text{ et } |-2| > |1| + |1| \text{ et } |-2| > |1| + |1| \text{ et } |-2| > |1|$$

Le test de la diagonale dominante est vérifié, donc le système d'équation converge naturellement vert une solution.

<u>Exercice 6:</u>

Les valeurs qui représentent l'évolution de la perméabilité relative μ_r pour un matériau ferromagnétique (Fer-silicium) en fonction du champ d'excitation *H* sont données par le tableau ci-dessous:

Points de données *i*	1	2	3
Champ d'excitation *H* (A/m)	10^3	300	100
Perméabilité relative μ_r	1000	3000	5000

1. Ecrire la formule d'interpolation de Lagrange qui permet d'interpoler ces points de données.

2. Trouver la perméabilité relative μ_r pour *H* = 500 (A/m) , *H* = 200 (A/m).

Bon courage

Solution de l'exercice 6:

1. Ecrire la formule d'interpolation de Lagrange qui permet d'interpoler ces points de données.

   - *Le polynôme de Lagrange est donné par:*

   $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x), \quad n = 2 \qquad \text{où} \qquad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

   - *Remplacement dans les expressions (c.a.d calcul des L_k et remplacement dans P_n).*

2. Trouver la perméabilité relative μ_r pour H = 500 (A/m) , H = 200 (A/m).

   - Pour H = 500 (A/m), $\mu_r \cong 1600$
   - Pour H = 200 (A/m), $\mu_r \cong 3900$

Bon courage