UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des Sciences et de la Technologie,
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE
2éme année licence Automatique (LMD)

TD 02

Exercice N⁰01

1) Classer les systèmes représentés par les équations différentielles suivantes en systèmes linéaires et non linéaires. Préciser quelles sont les termes non linéaires.
2) Indiquer quels sont les systèmes invariants et variants.
3) Indiquer l'ordre de chaque système.

a) $t\frac{dy}{dt}+y=u$ **b)** $\frac{dy}{dt}+y=u$ **c)** $y\frac{dy}{dt}+y^2=u$ **d)** $\cos(t)\frac{d^2y}{dt^2}+\sin(2t)y=u$ **e)** $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=u$

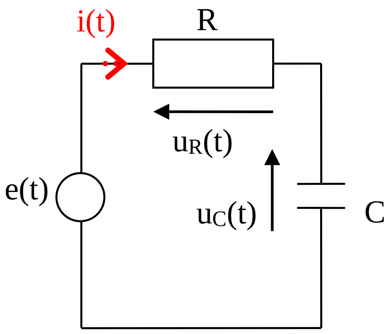
avec $y=y(t)$ est la sortie du système et $u=u(t)$ est l'entrée du système.

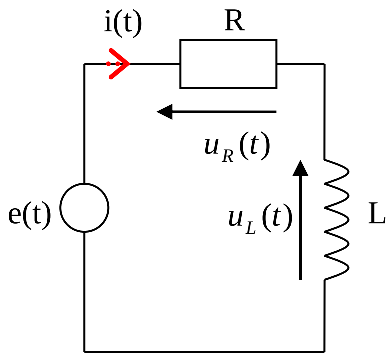
Solution

1) Systèmes linéaires (a, b, d et e) et non linéaires (c : les termes produit et le terme carrée sont les termes de non linéarité).
2) Systèmes invariants sont : b, c, et e.
   Systèmes variants sont : a et d.
3) Système (a) est du premier ordre. Système (b) est du premier ordre. Système (c) est du premier ordre. Systèmes (d) et (e) sont du deuxième ordre.

Exercice N⁰02 : Etude des systèmes électriques

Soient les circuits électriques (R,C) et (R,L) représentés ci-dessous.



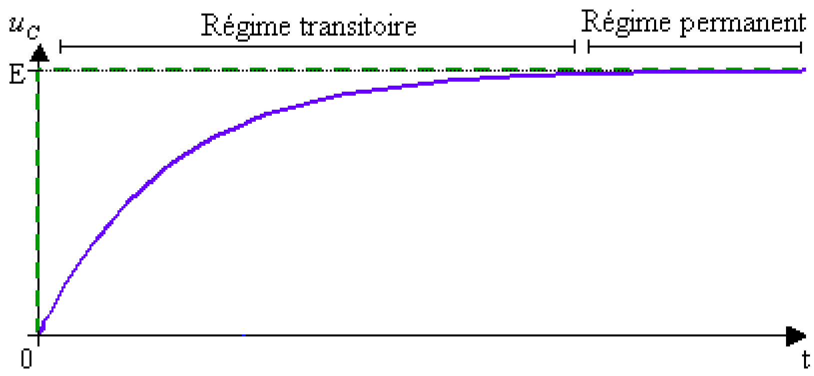


On suppose que le signal d'entrée est la tension e(t), et le signal de sortie est la tension aux bornes de la capacité ou de l'inductance.

1) Tracer la réponse en faisant apparaitre les deux régimes.
2) Déterminer l'équation différentielle (le modèle du système) qui régit ce système
3) Déduire le type de chaque système.
4) Trouver les expressions des réponses indicielles en résolvant les équations différentiélles.

Solution

1)



2) Déterminer l'équation différentielle (le modèle du système) qui régit ce système

- **Circuit n°1 (R,C) :**

Maille du circuit : $e(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) + u_C(t)$ Or $i(t) = C\dfrac{di(t)}{dt}$

On a donc : $e(t) = RC\dfrac{du(t)}{dt} + u_C(t) \Rightarrow \boxed{\dfrac{du_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C(t) = \dfrac{e(t)}{RC}}$

- **Circuit n°2 (R,L) :**

On a : $e(t) = u_R(t) + u_L(t) = u_R(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$ Or $u_R(t) = R.i(t) \Rightarrow \dfrac{di(t)}{dt} = \dfrac{1}{R}.\dfrac{du_R(t)}{dt}$

On a donc : $e(t) = u_R(t) + \dfrac{L}{R}.\dfrac{du_R(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\dfrac{du_R(t)}{dt} + \dfrac{1}{\frac{L}{R}}u_R(t) = \dfrac{e(t)}{\frac{L}{R}}}$

3) Les deux systèmes sont linéaires, invariants et du premier ordre.

⇨ Donc, un circuit électrique du premier ordre est un circuit dont les variations de tension aux bornes d'un composant vérifient une équation différentielle linéaire du premier ordre.

4) Les deux systèmes ont des équations différentielles de la forme :

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}y(t)}$$

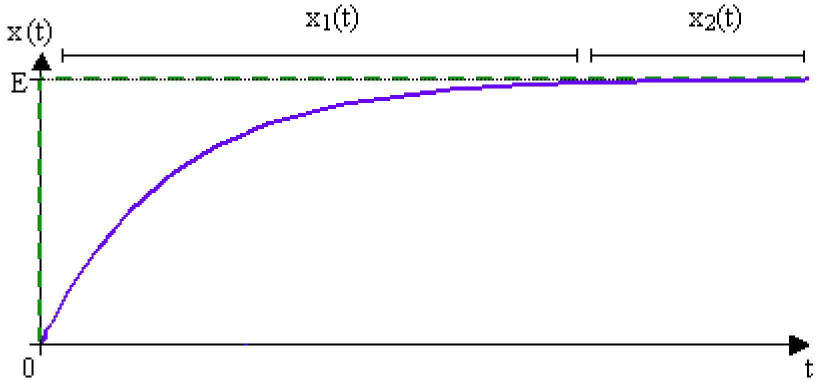
Avec :x(t) est la sortie du système et y(t) est l'entrée.

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\boxed{x(t) = x_1(t) + x_2(t)}$$

Avec $x_1(t)$ solution de l'équation sans second membre (ESSM) : $\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x_1(t)=0$

Et $x_2(t)$ solution particulière de l'équation qui dépend de la nature de y(t).



Cherchons l'expression de $x_1(t)$:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x_1(t)=0 \quad \Rightarrow \text{(ESSM)} \Leftrightarrow \frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{-x_1(t)}{\tau} \Leftrightarrow \frac{dx_1(t)}{x_1(t)}=\frac{-dt}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dx_1(t)}{x_1(t)}=\int\frac{-dt}{\tau} \Leftrightarrow \ln|x_1(t)|+K_1=\frac{-t}{\tau_1}+K_2$$

$$\Leftrightarrow \ln|x_1(t)|=\frac{-t}{\tau_1}+K_3 \qquad (K_3=K_2-K_1) \Leftrightarrow x_1(t)=e^{\frac{-t}{\tau_1}+K_3}$$

$$\Leftrightarrow x_1(t)=e^{K_3}.e^{\frac{-t}{\tau_1}} \quad \text{Soit : } \boxed{x_1(t)=Ke^{\frac{-t}{\tau_1}}} \text{ avec K = } e^{K_3}$$

Finalement : $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

$$\boxed{x(t)=Ke^{\frac{-t}{\tau_1}}+x_2(t)}$$

Appliquons aux deux circuits précédents :

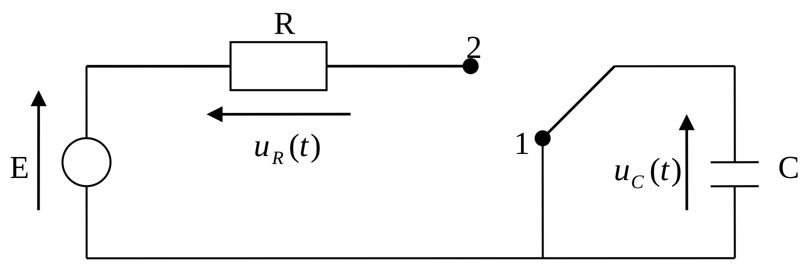
- Système (R,C) : $\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_C(t)=\frac{e(t)}{RC} \quad \Rightarrow u_C(t)=K_Ce^{\frac{-t}{RC}}+u_{C2}(t)$
- Système (R,L) : $\frac{du_R(t)}{dt}+\frac{1}{\frac{L}{R}}u_R(t)=\frac{e(t)}{\frac{L}{R}} \Rightarrow u_R(t)=K_Re^{\frac{-t}{\frac{L}{R}}}+u_{R2}(t)$

Pour connaître parfaitement $u_c(t)$ et $u_R(t)$, il faut :

- Déterminer K_C et K_R à partir de conditions expérimentales.
- Déterminer $u_{C2}(t)$ et $u_{R2}(t)$ à partir du type de signal d'entrée.

Exercice N^{0}03 :

Soit le système charge d'un condensateur sous une tension constante à travers une résistance (réponse indicielle d'un système de 1er ordre).



à t = 0, on commute l'interrupteur. Il passe alors en position 2.

1) Déterminer l'équation différentielle (le modèle du système) qui régit ce système.
2) Trouver la réponse indicielle par deux méthodes différentes.
3) Tracer la réponse indicielle et déduire la valeur marquant le régime permanent.

Solution

1) Equation différentielle du circuit :

→ t < 0 : interrupteur en position 1.

$$u_c(t) = 0$$

→ t = 0 : interrupteur passe ne position 2.

$$\begin{aligned} E &= u_c(t) + u_R(t) \\ &= u_c(t) + Ri(t) \\ &= RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{du_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau}u_c(t) = \dfrac{1}{\tau}E$ avec ŧ = RC en seconde.

2) Méthodes de calcul de la réponse indicielle :

- *1^{ere} méthode : Solution de l'équation différentielle (réponse indicielle)*

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$$

Régime transitoire

Régime permanent

$u_{C1}(t)$: cette tension est solution de : $\frac{du_{C1}(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}u_{C1}(t)=0$

$\Rightarrow u_{C1}(t)=Ke^{\frac{-t}{\tau}}$

- $u_{C1}(t)$ croit de façon exponentielle jusqu'à atteindre le régime permanent.
- $u_{C2}(t)$, le générateur délivre une tension constante. E $\rightarrow$ $u_{C2}(t)$ (régime permanent).

Donc :

$$\cancel{\frac{du_{C2}(t)}{dt}}+\frac{1}{\tau}u_{C2}(t)=\frac{E}{\zeta}$$

$u_{C2}(t)$ est une constante

$$\Rightarrow \boxed{u_{C2}(t)=E}$$

$$u_C(t)=u_{C1}(t)+u_{C2}(t)$$
$$=Ke^{\frac{-t}{\tau}}+E$$

Que vaut K :
On utilise les conditions initiales :
à t = 0^-, interrupteur en position (1) et $u_C(t=0)=0$.
La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas connaître de discontinuité.

$$\Rightarrow u_C(t=0^-)=u_C(t=0^+)=0$$
$$\Rightarrow u_C(t=0^+)=0$$

$$u_C(t=0^+)=\left(Ke^{\frac{-t}{\tau}}+E\right)_{t=0}=K+E=0$$
$$\Rightarrow K=-E$$

Par conséquent $\boxed{u_C(t)=E\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)}$

- ***2***

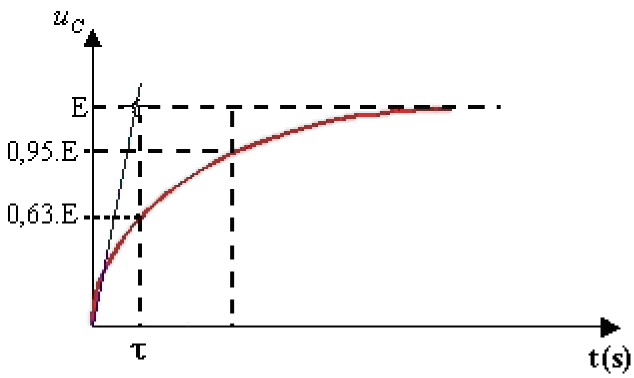
- *$2^{ème}$ méthode : Transformée de Laplace (réponse indicielle):*

$\Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}u_c(t)=\frac{1}{\tau}E$ $\Rightarrow$ Laplace avec les CIN➔ $pU_c(p)+\frac{1}{\tau}U_c(p)=\frac{1}{\tau}\frac{E}{p}$

$$U_c(p) = \frac{1}{\tau} \frac{E}{p(p+\frac{1}{\tau})} \quad \Rightarrow \text{ Par conséquent } \boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)}$$

3) Réponse indicielle $u_C(t)$:

t = 0, $u_C(t = 0) = 0$
$t \to \infty$, $u_C(t \to \infty) = E$



t =τ, y(t) = E
La vitesse à laquelle $u_C(t)$ atteint la régime permanent dépend du paramètre τ=RC (en seconde).

- **Comment déterminer τ sur ce graphe :**

Déterminons l'équation de la tangente à l'origine y(t)=at, avec $a = \left(\frac{du_C(t)}{dt}\right)_{t=0}$,

à $u_C(t) = E - Ee^{\frac{-t}{\tau}}$, donc $a = \left(\frac{E}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}$

par conséquent $y(t) = \frac{E}{\tau} t$ équation de la tangente à l'origine :

A t =τ, $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63E$, la tension u_C a atteint 63% de sa valeur finale.

A t = 3τ, $u_C(3\tau) = E(1 - e^{-3}) \approx 0{,}95E$
A t = 5τ, $u_C(5\tau) = E(1 - e^{-5}) \approx 0{,}99E$

On peut considérer que le circuit se trouve en régime permanent au bout de t = 5τ