UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des Sciences et de la Technologie,
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE
2éme année ST Automatique (LMD)

TD 01

Exercice n°1

Selon leurs modèles, déterminer les types des systèmes décrits par les équations différentielles suivantes :

1) $b\ddot{y}(t) + c^2 y(t) = u(t)$
2) $\ddot{y}^2(t) + t\dot{y}(t) + ay(t) = u(t)$
3) $\ddot{y}(t) + y(t) = \cos\,(u(t))$
4) $a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + (c + \cos(t))y(t) = u(t)$
5) $a\ddot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t) + u(t)$
6) $\ddot{y}(t) + y(t) = \dot{u}^2(t) + u(t)$

Solution :

1) Système linéaire, invariant du deuxième ordre.
2) Système nonlinéaire (à cause du premier terme la dérivée au carrée), invariant du deuxième ordre.
3) Système non linéaire (à cause de cos(u(t))), invariant du deuxième ordre.
4) Système linéaire, variant du deuxième ordre.
5) Système linéaire, invariant du deuxième ordre.
6) Système nonlinéaire (à cause du carré de la dérivée de l'entrée), invariant du deuxième ordre.

Exercice 2 :

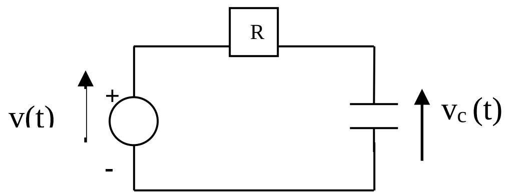
Selon leurs modèles, déterminer les types des systèmes décrits par les équations différentielles suivantes :

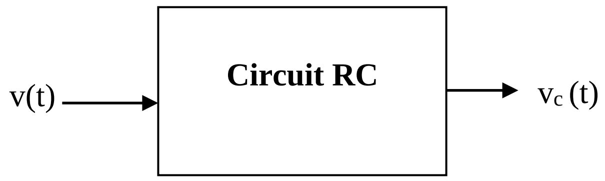
a) $\frac{dy}{dt} + y = u$, b) $y^2 \frac{dy}{dt} + 4y = u$ c) $5\frac{dy}{dt} + 6y = 7u$, d) $a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = b(t)u$

Solution

Les systèmes décrits par les équations (a et c) sont des systèmes linéaires, invariants du premier ordre.
Le système décrit par l'équation (b) est un système non linéaire invariant du premier ordre.
Le système décrit par l'équation (d) est un système linéaire variant du premier ordre.

Exercice 3 :





1) Déterminer la relation entre l'entrée e(t) et la sortie v_c (t).
2) Déterminer la nature et le type de ce système.

Solution

1) En appliquant la loi de maille, on obtient : $v(t) = Ri(t) + v_c(t)$

On a :

$i(t) = c\dfrac{dv_c(t)}{dt}$ ➔ Donc, l'équation devienne : $v(t) = Rc\dfrac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$

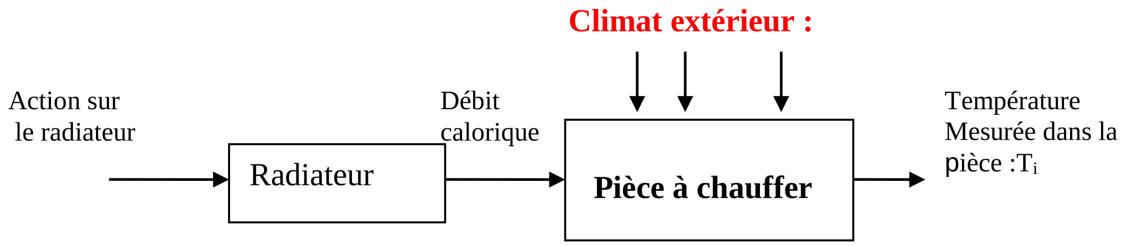
2) C'est un système de nature électrique, du premier ordre n=1(m=0), linéaire et invariant.

Exercice 4 :

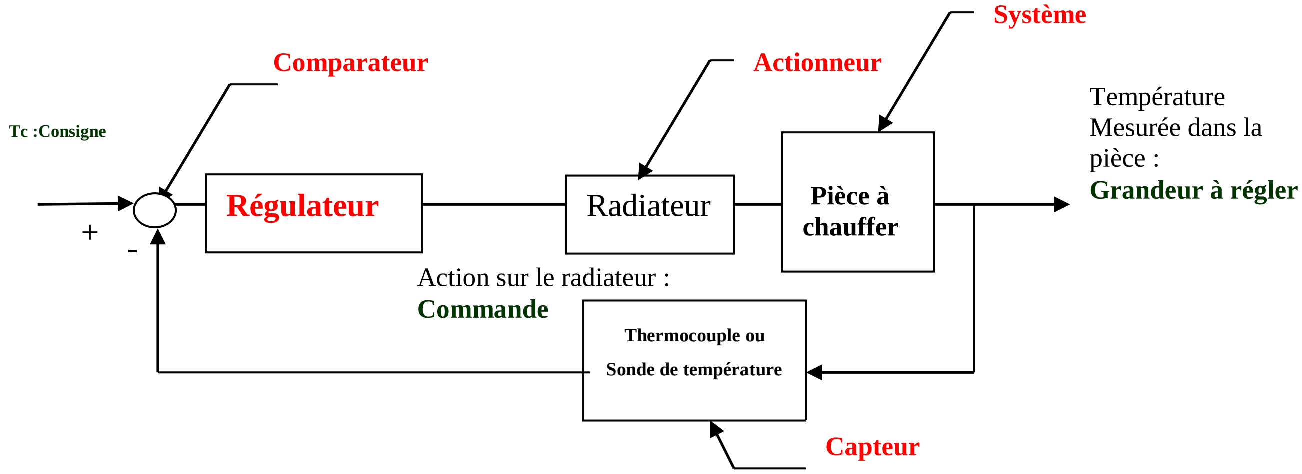
1) Dresser le schémas canonique d'une pièce à chauffer (L'outil utilisé est un radiateur).
2) Ce système est-il en BO ou en BF ? Est-il possible de le rendre en BF ? Justifier la réponse et dresser son schéma canonique.

Solution

1) Schémas canonique d'une pièce à chauffer

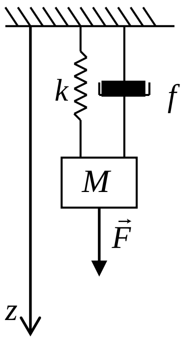


2) Ce système est un système en BO.
Oui, il est toujours possible de le rendre un système en BF.
En ajoutant au radiateur un thermocouple qui contrôle la température de la pièce et en respectant par la suite la température consigne ou désirée.



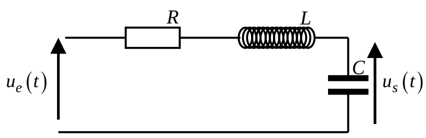
Exercice n°5

On considère les 2 systèmes physiques suivants :
Une masse M, retenue à un mur par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux f et un ressort d'amortissement k que l'on tire par une tension T vers le bas.



Entrée : Force appliquée à la masse.
Sortie : Position de la masse.

Un circuit RLC série.
Entrée : Tension aux bornes du circuit.
Sortie : Tension aux bornes du condensateur.



1. Ecrire les équations différentielles régissant la dynamique des sorties de ces 2 systèmes.
2. Donner la fonction de transfert de chacun de ces systèmes.
3. La fonction de transfert canonique des systèmes du 2ième ordre s'exprime sous la forme :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2 + \frac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot p + 1}$$

où ω_n est la pulsation propre ou naturelle.
ξ est l'amortissement.
K est le gain statique du système.

Pour chacun des 2 systèmes, exprimer ces 3 paramètres en fonction des données du problème.

4. Pour chacun des 2 systèmes, à quelles conditions le facteur d'amortissement est-il inférieur à 1 ? Pour l'un ou l'autre cas, en supposant $\xi < 1$, tracer ***l'allure*** de la réponse temporelle du système à un échelon de tension (0V – EV) .

Les tables de transformées de Laplace donne, lorsque $\xi < 1$:

$$TL^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{p\cdot\left(p^2+2\xi\omega_n\cdot p+\omega_n^2\right)}\right]=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\xi\omega_n\cdot t}\cdot sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cdot t+\theta\right)$$

.

Solution : La solution est déjà faite en présentiel !!!???

1)

<u>Système mécanique :</u>

$\sum forces = M\vec{\gamma}$ ➔ $\sum \vec{F}ext = M\vec{\gamma}$ soient x le déplacement de la masse m et F la force d'excitation. Par projection sur l'axe du mouvement on aura :

$$m\ddot{x} = F - f\dot{x} - kx\,;\ \Rightarrow\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F}{m}$$

C'est un système du deuxième ordre, linéaire et invariant.

<u>Système électrique :</u>

Loi des mailles et l'exploitation des relations électriques Courant/Tension on aura :

$$\frac{d^2U_c}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dU_c}{dt}+\frac{U_c}{LC}x=\frac{U_e}{LC}$$

C'est un système du deuxième ordre, linéaire et invariant.

2) Fonction de transfert avec Les CIN.

La fonction de transfert par définition, est le rapport (sortie/entrée) dans le domaine de Laplace.

<u>Système mécanique :</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F}{m}\ \Rightarrow\ \frac{X(p)}{F(p)}=\frac{1}{mp^2+fp+k}$$

<u>Système électrique :</u>

$$\frac{d^2U_c}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dU_c}{dt}+\frac{U_c}{LC}x=\frac{U_e}{LC}\ \Rightarrow\ \frac{U_C(p)}{U_e(p)}=\frac{1}{LCp^2+RCp+1}$$

3) La fonction de transfert canonique d'un système de deuxième ordre est :

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2+\frac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot p+1}$$

où ω_n est la pulsation propre ou naturelle.

ξ est l'amortissement.

K est le gain statique du système.

<u>Système mécanique :</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F}{m} \Rightarrow \frac{X(p)}{F(p)}=\frac{1}{mp^2+fp+k}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}p^2+\frac{f}{k}p+1}$$

Par identification des deux fonctions de transfert on aura :

$$K=\frac{1}{k};\ \frac{1}{w_n^2}=\frac{m}{k}\ et\ \frac{2\xi}{w_n}=\frac{f}{k} \Rightarrow K=\frac{1}{k};\ w_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\ et\ \xi=\frac{f}{2\sqrt{km}}$$

<u>**Système électrique :**</u>

$$\frac{U_C(p)}{U_e(p)}=\frac{1}{LCp^2+RCp+1} \Rightarrow K=1;\ \frac{1}{w_n^2}=LC\ et\ \frac{2\xi}{w_n}=RC$$

$$\Rightarrow K=1;\ w_n=\sqrt{\frac{1}{LC}}\ et\ \xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

4) $\xi<1$

<u>**Système mécanique :**</u> $\xi=\frac{f}{2\sqrt{km}} \Rightarrow f<2\sqrt{km}$

<u>**Système électrique :**</u> $\xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow R\sqrt{C}<2\sqrt{L}$

La réponse indicielle d'un système de 2éme ordre ($\xi<1$) est donnée par :

$$TL^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{p\cdot\left(p^2+2\xi\omega_n\cdot p+\omega_n^2\right)}\right]=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\xi\omega_n\cdot t}\cdot sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cdot t+\theta\right)$$

.

Pour ce cas où ***<u>IξI<1</u>*** **==> discriminant Δ négatif (Δ<0) =>** Le système à une paire des **pôles complexes conjugués** donnée par l'équation (3.36) du chapitre 3 et son **comportement** est **oscillatoire**. L'équation (3.37) du chapitre 3, permet de calculer la **réponse indicielle** pour ce cas <u>**(Voir 3éme cas du chapitre 03).**</u>

$$S(p)=\frac{K.p_1.p_2}{p(p-p_1).(p-p_2)}=k\left[\frac{1}{p}+\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}\left(\frac{1}{p_1}\frac{1}{p-p_1}-\frac{1}{p_2}\frac{1}{p-p_2}\right)\right] \quad (3.48)$$

Application de la Transformée inverse de Laplace, on aura l'expression temporelle de **réponse indicielle**.

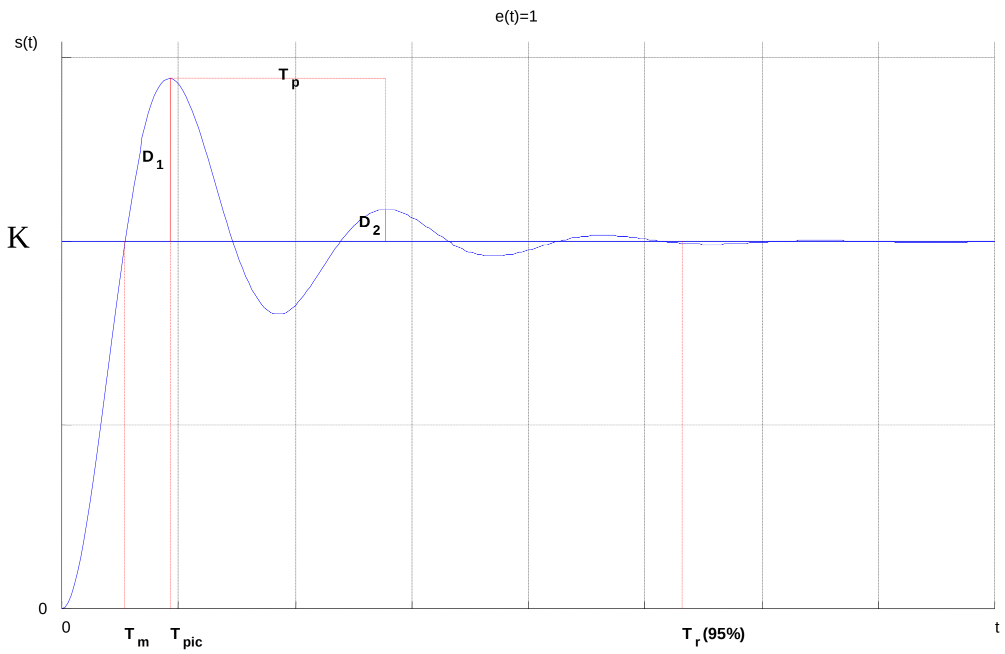
$$s(t)=TL^{-1}\left\{\frac{H(p)}{p}\right\}=k\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi w_0 t}\sin\left[w_0\sqrt{1-\xi^2}.t+\arcsin\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]\right) \quad (3.50)$$

Quelques caractéristiques d'un système du 2^{éme}ordre tirées de la **réponse indicielle** (IξI<1) **comportement oscillatoire:**

- ***<u>Temps de monté</u> :*** $T_m=\frac{\pi-ar\cos(\xi)}{w_0\sqrt{1-\xi^2}}$ (3.51)

- ***Temps de réponse à n%*** : $T_r(n\%) = \frac{1}{w_0 \xi} \ln\left(\frac{100}{n}\right) \quad Si \quad \xi \langle 0.7$ (3.52)
- ***Temps du premier pic*** : $T_{pic} = \frac{\pi}{w_0 \sqrt{1-\xi^2}}$ (3.53)
- ***Pseudo période*** : $T_{pp} = \frac{2\pi}{w_0 \sqrt{1-\xi^2}}$ (3.54)
- ***Pseudo pulsation propre*** : $w_p = w_0 \sqrt{1-\xi^2}$ (3.55)
- ***Dépassement en %*** : $D\% = 100 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ (3.56)
- ***Rapport entre deux maximas successifs*** : $\frac{D_1}{D_2} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ (3.57)
- ***Nombre d'oscillations complètes avant d'atteindre 95% de la valeur finale***:

  $N = \frac{1}{2\xi}$ (3.58)
- ***Constante de temps de réponse*** : $\tau = \xi w_0$ (3.59)



Réponse indicielle d'un système du 2^{éme} ordre **(IξI<1)**

Remarques:

1) La réponse présente la forme d'une sinusoïde amortie par l'exponentielle comme le montre la figure (Fig. 3.18). Cette allure permet de confirmer l'appellation affectée au coefficient ξ, à savoir le **coefficient d'amortissement.**

2) Si ξ=0, la **réponse indicielle** serait une **forme sinusoïdale** entretenue, alors que pour ξ=0, les **amplitudes des oscillations** décroissent au fil du temps et ce, plus moins rapidement selon la valeur de **ξ.**

3) Le **dépassement indiciel** ne dépend que du **coefficient d'amortissement** ξ. Plus ξ est petit, moins la **réponse indicielle** est amortie, et plus le **dépassement indiciel** est important comme.

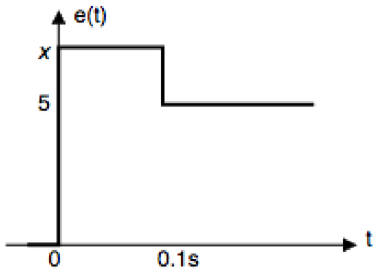
4) Pour un asservissement, le **dépassement** est un critère d'évaluation important de la performance en **régime transitoire.**
5) Dans plusieurs applications, l'automaticien cherche à réaliser un **dépassement faible** ou négligeable**.**

Exercice n°6

Un système linéaire est caractérisé par l'équation

$$0{,}5.\frac{ds}{dt}+s(t)=15.e(t)$$

1. Donner l'expression de la fonction de transfert du système. Quels sont le type, l'ordre, le gain et la ou les constantes de temps de ce système ?
2. L'entrée appliquée est donnée en figure 2 (le système étant initialement au repos).
   - donner l'expression de s(t) en fonction de x
   - trouver x pour qu'à t = 0.1, la réponse atteigne sa valeur finale et ne la quitte plus.



Solution : La solution est déjà faite en présentiel !!!???

1)

$$0{,}5.\frac{ds}{dt}+s(t)=15.e(t) \Rightarrow 0{,}5.pS(p)+S(p)=15.E(p) \Rightarrow (0{,}5.p+1)S(p)=15.E(p)$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)}=\frac{15}{1+0.5p}$$

C'est un système du premier ordre, linéaire et invariant➔ K=15 et τ=0.5 (seconde)

2) $\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{15}{1+0.5p} \Rightarrow S(p)=\frac{15E(p)}{1+0.5p}$

Calculant E(p) (l'entrée donnée) :

$$E(p)=\int_0^\infty e(t).e^{-pt}dt=\int_0^{0.1} xe^{-pt}dt+\int_{0.1}^\infty 5e^{-pt}dt=\frac{x}{p}(1-e^{-0.1p})+\frac{5}{p}e^{-0.1p}$$

Remplaçons E(p) dans S(p) on aura :

$$S(p)=\frac{15E(p)}{1+0.5p}=\frac{15}{1+0.5p}\left(\frac{x}{p}(1-e^{-0.1p})+\frac{5}{p}e^{-0.1p}\right)$$

s(t) est Laplace inverse de S(p).

$$S(p)=\frac{15E(p)}{1+0.5p}=\frac{15}{1+0.5p}\left(\frac{x}{p}(1-e^{-0.1p})+\frac{5}{p}e^{-0.1p}\right)=\frac{15}{1+0.5p}\left(\frac{x}{p}-\frac{x}{p}e^{-0.1p}+\frac{5}{p}e^{-0.1p}\right)=$$
$$=\frac{15x}{(1+0.5p)p}-\frac{15xe^{-0.1p}}{(1+0.5p)p}+\frac{15X5e^{-0.1p}}{(1+0.5p)p}$$

Remarquons bien que c'est la propriété de modulation ou retard et amortissement, qu'il faut utiliser pour faciliter les calculs, les Transformées de Laplace de deux derniers termes sont calculés directement de celle du premier terme .==> s(t) ???
On'a :

$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$

$$L^{-1}\left(\frac{15x}{(1+0.5p)p}\right)=15x(1-e^{-\frac{t}{0.5}})=15x(1-e^{-2t})$$
$$L^{-1}\left(\frac{15x}{(1+0.5p)p}e^{-0.1p}\right)=15x(1-e^{-\frac{(t+0.1)}{0.5}})=15x(1-e^{-2(t+0.1)})$$
$$L^{-1}\left(\frac{75}{(1+0.5p)p}e^{-0.1p}\right)=75(1-e^{-\frac{(t+0.1)}{0.5}})=75(1-e^{-2(t+0.1)})$$

$$\Rightarrow \quad s(t)=15x(1-e^{-2t})-15x(1-e^{-2(t+0.1)})+75(1-e^{-2(t+0.1)})=15x(1-e^{-2t}-1+e^{-2(t+0.1)})+75(1-e^{-2(t+0.1)})$$
$$=15x(e^{-2(t+0.1)}-e^{-2t})+75(1-e^{-2(t+0.1)})$$