UNIVERSITE DE JIJEL Juin 2021

Faculté des Sciences et de la Technologie

DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

2ème année ST Automatique (LMD) Matière SALCI **TDN°3**

Exercice N°1 :

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

a. $12\varepsilon(t)$

b. $5\varepsilon(t-12)$

c. $4t^2$

d. $5e^{-5t}$

e. $15\delta(t-4)$

f. $e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2) = \begin{cases} e^{-(t-2)} & t > 2 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$

Solution

En se servant du tableau des transformées de Laplace et des propriétés vues au cours on aura directement :

a) Echelon : 12/p
b) Propriété de retard et amortissement : $(5/p)e^{12p}$
c) Propriété dérivation : $8/p^3$
d) Directe : 5/(p+5)
e) Propriété de retard et amortissement : $15e^{4p}$
f) Propriété produit temporel et convolution avec le retard :

x(t)y(t)➔X(p)*Y(p) Avec : $x(t) = e^{-(t-2)}$ *et* $y(t) = \varepsilon(t-2)$

$$X(p)*Y(p) = \frac{e^2}{p+1} * e^{2p} = e^2\left[\frac{1}{p+1}e^{2(p+1)}\right]$$

Ou avec calcul directe par l'utilisation de la transformée de Laplace :

$$L\left(e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2) = \begin{cases} e^{-(t-2)} & t > 2 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt = \int_{2}^{+\infty} e^{-(t-2)}e^{-pt}dt = e^2\left[\frac{1}{p+1}e^{-t(p+1)}\right]_2^{\infty} = e^2\left[\frac{1}{p+1}e^{2(p+1)}\right]$$

Exercice N°2 :

Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

a. $t^3 + 3t^2 + 4t + 3$

b. $(2t-3)\delta(t-3)$

c. $3t\sin(5t)$.

d. $2t^2\cos(3t)$

e. $2e^{-5t}\sin(5t)$

f. $\cos t\delta(t-\pi/4)$

Solution

a. $t^3 + 3t^2 + 4t + 3$ ➔ $\frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^3} + \frac{4}{p2} = \frac{6 + 6p + 4p^2}{p^4}$

b. $(2t-3)\delta(t-3)$ =3 ➔ $\frac{3}{p}$

c. $3t\sin(5t)$: x(t)y(t)➔X(p)*Y(p) Avec : $x(t) = 3t$ *et* $y(t) = \sin(5t)$

$$X(p)*Y(p) = \frac{3}{p^2} * \frac{5}{p^2 + 25}$$

d. $2t^2\cos(3t)$: x(t)y(t)➔X(p)*Y(p) Avec : $x(t)=2t^2$ et $y(t)=\cos(3t)$

$$X(p)*Y(p)=\frac{4}{p^3}*\frac{p}{p^2+25}$$

e. $2e^{-5t}\sin(5t)$: Propriété de retard et amortissement : $L\{e^{-at}f(t)\}=F(p+a)$ Avec : f(t)=sin(5t)
Comme on peut utiliser directement cette propriété du tableau :

$e^{-at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$

$$L\{e^{-at}f(t)\}=F(p+a)=2\frac{5}{(p+5)^2+25}$$

f. $\cos t\,\delta(t-\pi/4)=\cos(\frac{\pi}{4})$ ➔ $\frac{\cos(\frac{\pi}{4})}{p}$

<u>Exercice N°3 :</u>

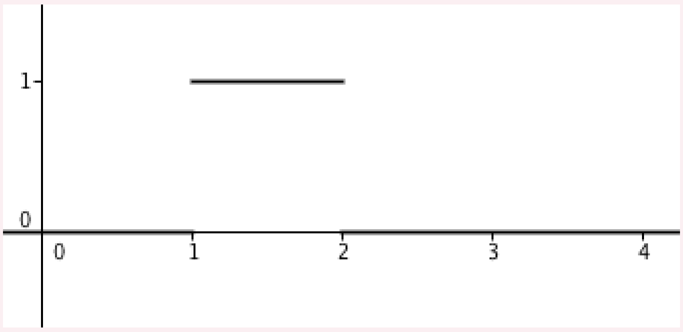
Tracer le graphe et calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1) f(t)=U(t−1)−U(t−2)
2) f(t)=U(t−2)(t−2)^2
3) f(t)=$\sum_{n=0\ldots+\infty}$ (U(t−2n)−U(t−(2n+1))).

Solution

1. On distingue 3 cas :
   - Si t<1, alors U(t−1)=0U(t−1)=0 et U(t−2)=0U(t−2)=0 et la fonction est nulle.
   - Si t∈[1,2[, alors U(t−1)=1U(t−1)=1 et U(t−2)=0U(t−2)=0 et la fonction vaut 1.
   - Si t≥2, alors U(t−1)=1U(t−1)=1 et U(t−2)=1U(t−2)=1 et la fonction est nulle.

On obtient donc le graphe suivant :

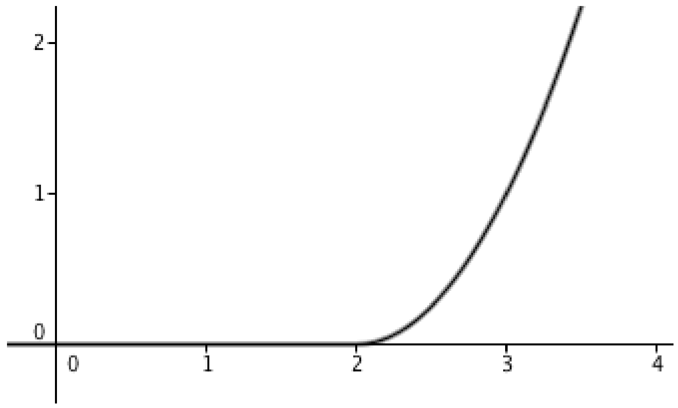


On calcule alors la transformée de Laplace de cette fonction soit en utilisant la transformée de Laplace de la fonction échelon-unité et le théorème du retard, soit en utilisant l'expression de la fonction déterminée ci-dessus.

Avec cette dernière méthode, on trouve que :

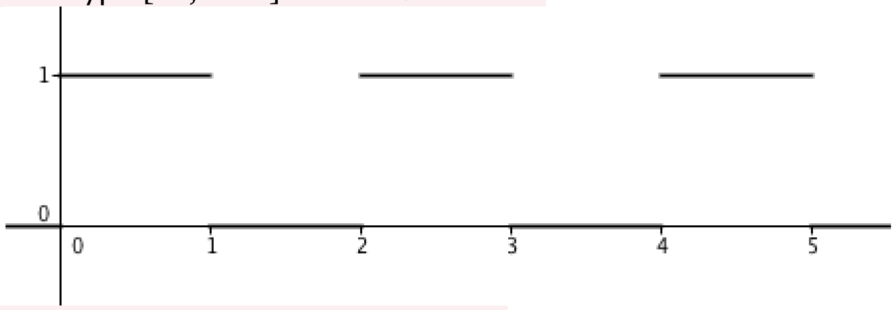
$$F(p)=\int_1^2 f(t).e^{-pt}dt=\int_1^2 e^{-pt}dt=\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-2p}$$

2) La fonction est simplement la fonction $t\mapsto t^2$, mais tronquée à sa partie positive et retardée d'un temps égal à 2. On obtient donc la courbe :



$$F(p)=\frac{2}{p^3}e^{-2p}$$

3) Avec le même raisonnement qu'à la première question, on constate que la fonction vaut 1 sur les intervalles du type $[2n,2n+1]$ et vaut 0 ailleurs :



Le calcul de la transformée de Laplace donne alors :

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1}e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p}e^{-2np}-\frac{1}{p}e^{-(2n+1)p}\right)$$

Remarque : Vous pouvez développer plus…

Exercice N°4 :

Trouver Laplace inverse des fonctions de transfert suivantes :

1) $H(p)=\dfrac{p+1}{p^3+5p^2+6p}$

2) $H(p)=\dfrac{p+5}{(p^2+1)(p+2)}$

3) $H(p)=\dfrac{p+3}{(p+2)(p^2+2p+1)}$

4) $H(p)=\dfrac{p+3}{(p+2)(p^2+2p+1)}$

Solution

1) $H(p)=\dfrac{p+1}{p^3+5p^2+6p}$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont 0, -2 et -3, ainsi sa **décomposition** en **éléments simples** est comme suit :

$$H(p)=\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{p+2}+\frac{C_3}{p+3} \quad Où: C_i=(p-p_i)H(p)\big|_{p=p_i} \Rightarrow C_1=\frac{1}{6};\ C_2=\frac{1}{2} et\ C_3=\frac{-2}{3}$$

➔

2) $H(p)=\dfrac{p+5}{(p^2+1)(p+2)}$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont ±j et-2, ainsi la **décomposition** en **éléments simples** de H(p) est comme suit :

$$H(p)=\frac{C_1}{p-j}+\frac{C_2}{p+j}+\frac{C_3}{p+2} \quad Où: C_i=(p-p_i)H(p)\big|_{p=p_i}$$

$$\Rightarrow C_1=1.14e^{j105,26}\ ;\ C_2=1.14e^{-j105,26}\ et\ C_3=\frac{3}{5}$$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

➔ $h(t)=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}+C_3e^{p_3t}=\dfrac{3}{5}e^{-2t}+2,28\cos(t+105.26)$

3) $H(p)=\dfrac{p+3}{(p+2)(p^2+2p+1)}$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont -1 avec un ordre de multiplicité d'ordre égale à 2 et -2, ainsi sa **décomposition** en **éléments simples** est comme suit :

$$H(p)=\frac{C_1}{(p+1)^2}+\frac{C_2}{p+1}+\frac{C_3}{p+2}$$

En utilisant (2.27) ➔ $C_1=2$, $C_2=-1$ et $C_3=1$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

➔ $h(t)=2te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}$

4) $H(p)=\dfrac{p+3}{(p+2)(p^2+2p+1)}$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont -1 avec un ordre de multiplicité d'ordre égale à 2 et -2, ainsi sa **décomposition** en **éléments simples** est comme suit :

$$H(p) = \frac{C_1}{(p+1)^2} + \frac{C_2}{p+1} + \frac{C_3}{p+2}$$

En utilisant l'équation (2.27) de chapitre 2, on trouve : ➔ $C_1=2$, $C_2=-1$ et $C_3=1$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

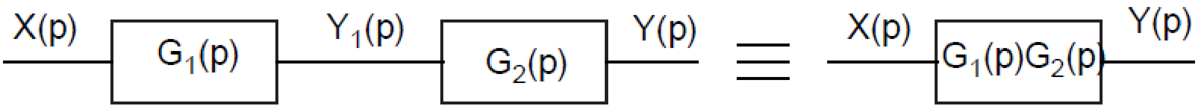
$$\text{➔ } h(t) = 2te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

Exercice N°5 :

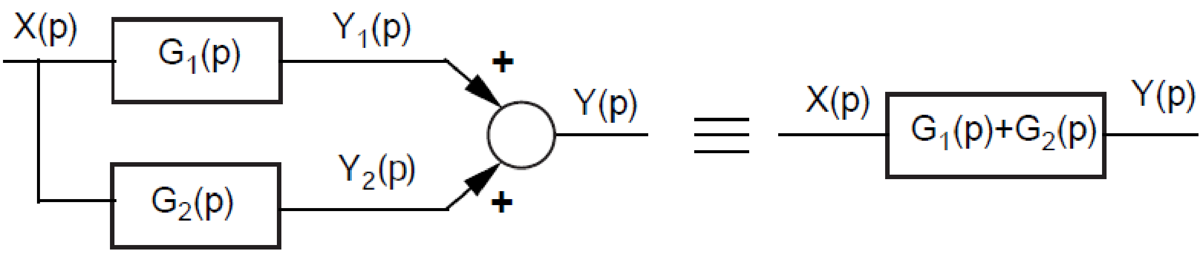
Réduire les schémas fonctionnels suivants en schémas canoniques simples :

Schémas fonctionnels ➔ Schémas canoniques réduits

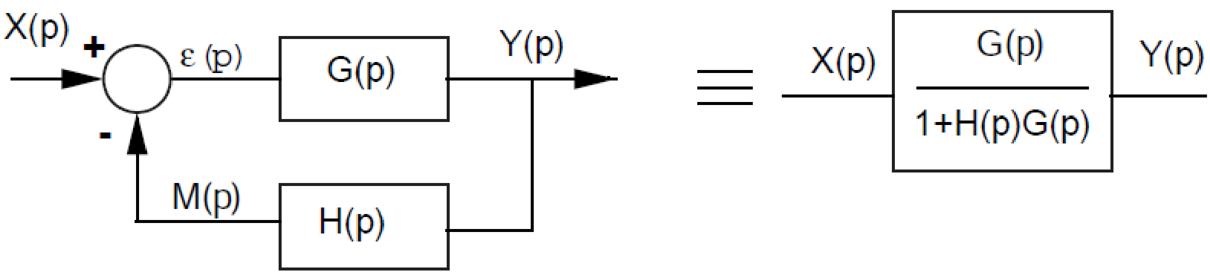
1)



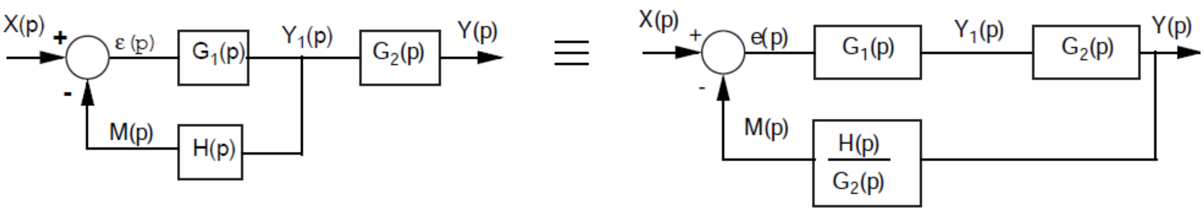
2)



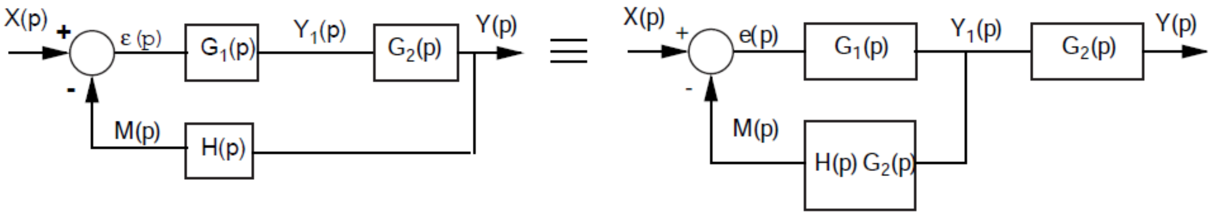
3)



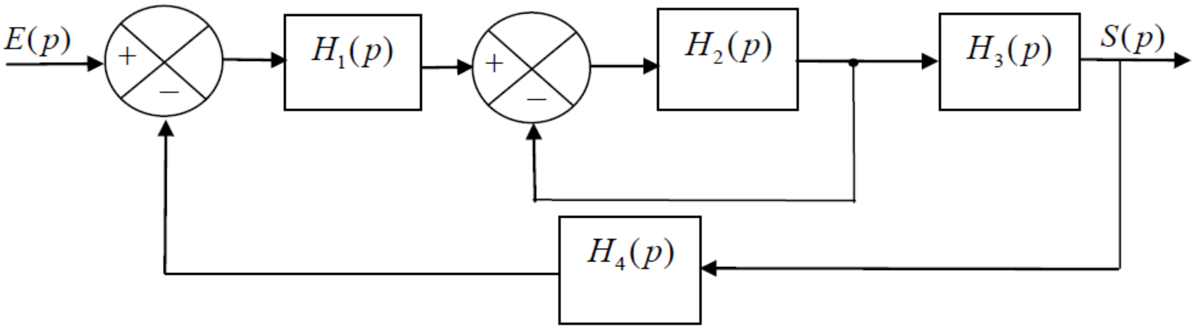
4)



5)



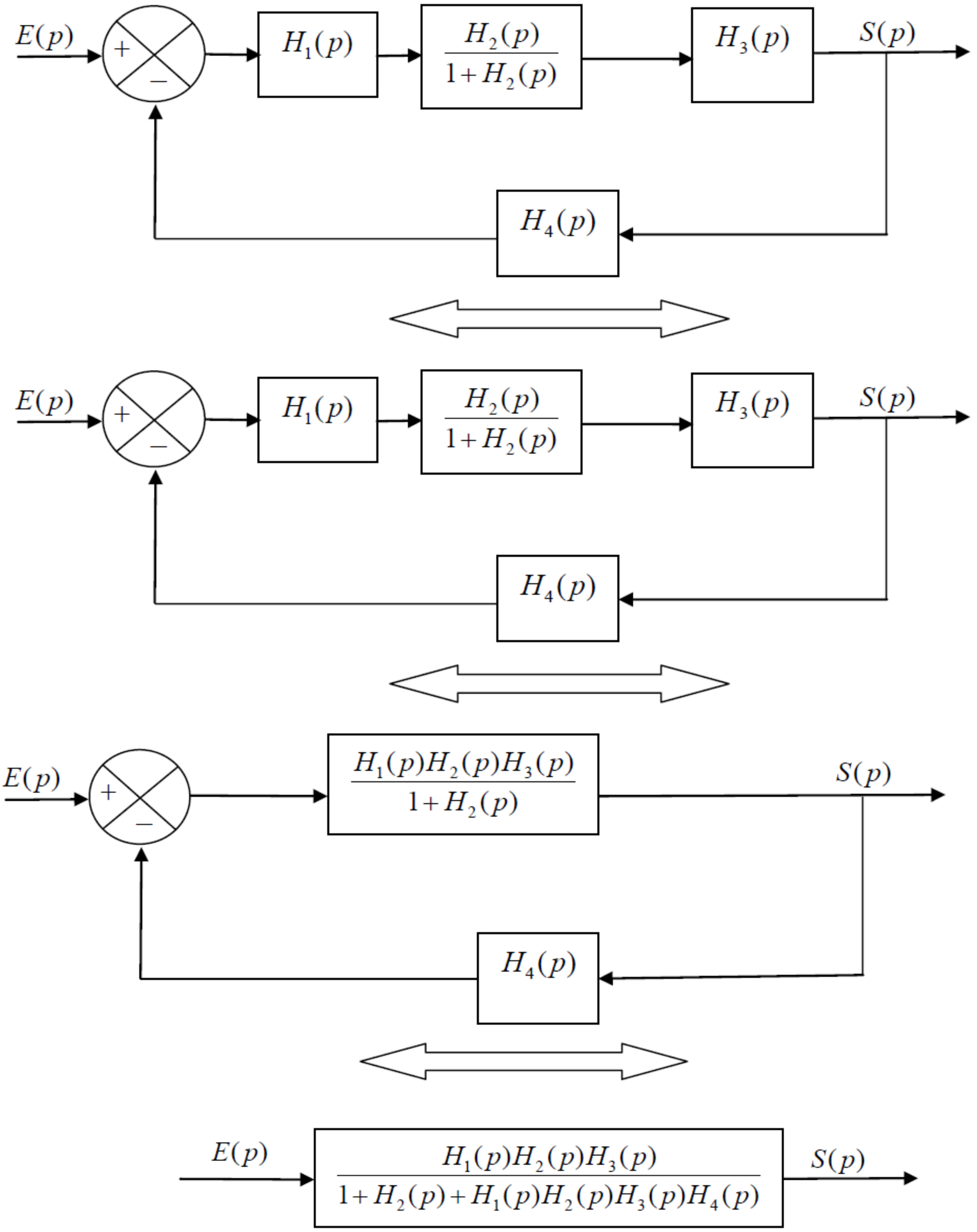
Exercice N°6 :



Simplifier

Réduire ce **schéma fonctionnel** et en déduire la **fonction de transfert** du **système**.

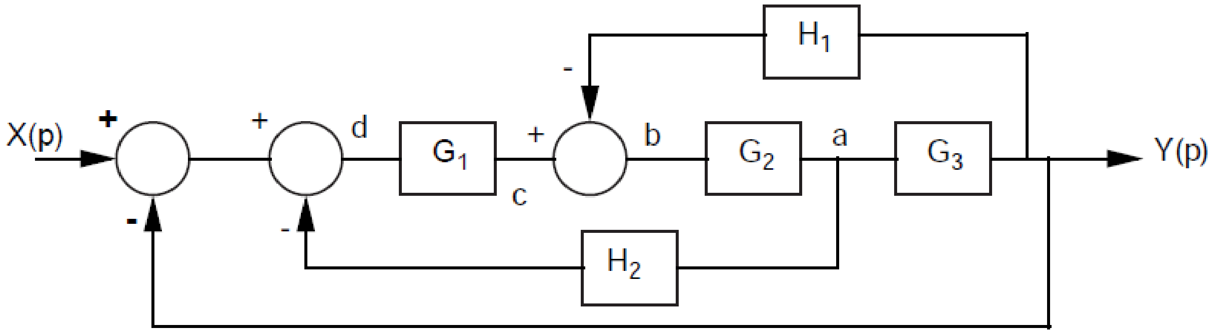
Solution



La fonction de transfert de système est :

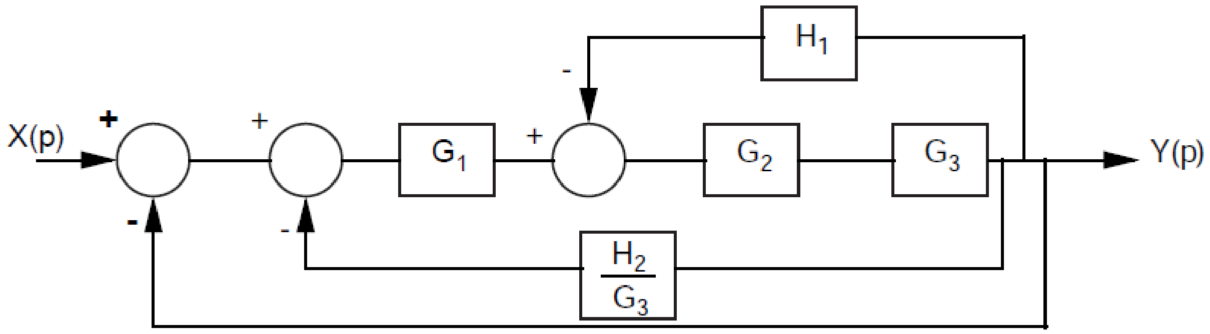
$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_2(p)+H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$

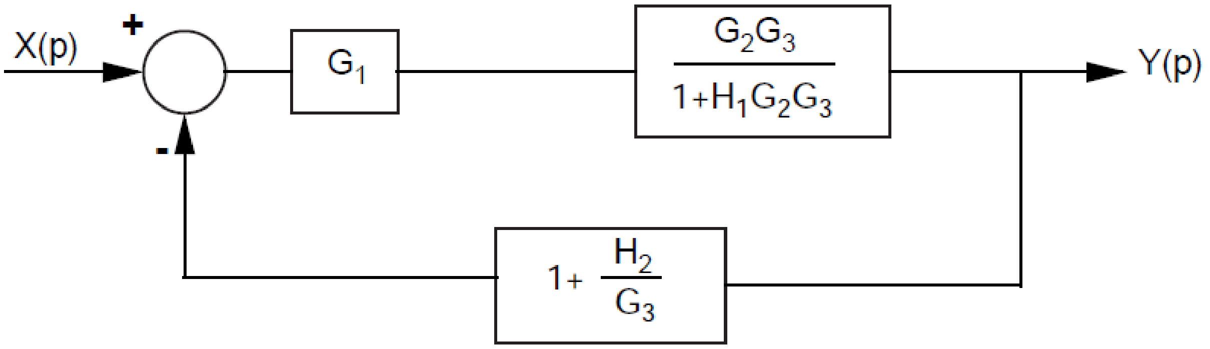
Exercice N°7 :



Simplifier ce **schéma fonctionnel** et en déduire la **fonction de transfert** du **système**.

Solution





La fonction de transfert de système est :

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+H_1(p)G_2(p)G_3(p)+H_2(p)G_1(p)G_2(p)+G_1(p)G_2(p)G_3(p)}$$

Exercice N°8 :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+3\frac{d^2}{dt^2}y(t)+6y(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t)-x(t)$$

1) Déterminer $Y(p)$ du signal de sortie sachant que les conditions initiales sont nulles.
2) Déterminer la fonction de transfert du système décrit par l'équation précédente.
3) Calculer $y(\infty)$ pour un signal d'entrée $x(t)=5\sin t$.

Solution

1) Laplace de l'équation différentielle :

$$p^3Y(p)+3p^2Y(p)+6Y(p)=p^2X(p)-X(p) \Rightarrow Y(p)=\frac{X(p)(p^2-1)}{p^3+3p^2+6}$$

2) Fonction de transfert : $Y(p)=\dfrac{X(p)(p^2-1)}{p^3+3p^2+6} \Rightarrow \dfrac{Y(p)}{X(p)}=\dfrac{(p^2-1)}{p^3+3p^2+6}$

Système de troisième ordre linéaire et invariant.

3) $x(t)=5\sin t \Rightarrow X(p)=\dfrac{1}{p^2+1} \Rightarrow Y(p)=\dfrac{(p^2-1)}{p^3+3p^2+6}\,\dfrac{1}{p^2+1}$

Théorème de la valeur finale : $y(\infty)=\lim_{p\to 0} pY(p) \Rightarrow y(\infty)=0$

<u>Exercice N°9 :</u>

Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)\right]$

b) $\mathscr{L}\left[\left(t+2\right)\mathscr{U}(t)+\left(t+3\right)\mathscr{U}(t-2)\right]$

c) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

Solution :

U(t) est l'échelon unitaire.

Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)\right]$

$$f(t)=\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)\;=\;t^2\,\mathscr{U}(t)+t\,\mathscr{U}(t)-e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)$$

$$F(p)=\boxed{\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+3}}$$

b) $\mathscr{L}\left[\left(t+2\right)\mathscr{U}(t)+\left(t+3\right)\mathscr{U}(t-2)\right]$

$$f(t)=(t+2)\,\mathscr{U}(t)+(t+3)\,\mathscr{U}(t-2)=\left(t+2\right)\mathscr{U}(t)+\left((t-2)+5\right)\mathscr{U}(t-2)$$

$$\mathscr{L}\left[(t+5)\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}$$

$$\mathscr{L}\left[(t+2)\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}=\frac{2p+1}{p^2}$$

$$\mathscr{L}\left[((t-2)+5)\,\mathscr{U}(t-2)\right]=\left(\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}\right)e^{-2p}$$

$$F(p)=\boxed{\frac{2p+1}{p^2}+\left(\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}\right)e^{-2p}}$$

c) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

$$f(t)=\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$$

$$\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)\mathscr{U}(t)\right]=\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\;=\;\frac{p^2+p+2}{p^3}$$

$$\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{(p+2)^2+(p+2)+2}{(p+2)^3}$$

$$F(t)=\boxed{\frac{p^2+5p+8}{(p+2)^3}}$$

<u>Exercice N°10 :</u>

Calculer Laplace inverse

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{(p+5)^2}\right]$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p-1}{(p^2+2p+5)}\right]$

Solution :

U(t) est l'échelon unitaire.

a) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$$

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+3)(p+4)} = \frac{2}{p+4}+\frac{-1}{p+3}$$

$$f(t)=\boxed{\left(2\,e^{-4t}-e^{-3t}\right)\,\mathscr{U}(t)}$$

b) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(p+5)^2}\right]$$

$$F(p)=\frac{3}{(p+5)^2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{p^2}\right]=3\,t\,\mathscr{U}(t)$$

$$f(t)=\boxed{3\,t\,e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)}$$

c) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p-1}{(p^2+2p+5)}\right]$$

$$F(p)=\frac{p-1}{(p^2+2p+5)} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}-\frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2^2}-\frac{2}{p^2+2^2}\right]=\left(\cos(2t)-\sin(2t)\right)\,\mathscr{U}(t)$$

$$f(t)=\boxed{\left(\cos(2t)-\sin(2t)\right)\,e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

Exercice N°11 :

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les équations suivantes :

a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$ avec : $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$

b) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

c) $x''(t) - x(t) = (3e^{-2t} + t^2 + 1)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

d) $x''(t) - 4x(t) = (3e^{-t} - t^2)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$

e) $x''(t) + x(t) = e^{t}\cos(t)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

f) $x''(t) + x(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)$ avec : $x(0) = 2$ et $x'(0) = 0$

Solution :

a) $x'(t) + x(t) = t\,\mathscr{U}(t) - t\,\mathscr{U}(t-1)$ condition initiale : $x(0) = 0$

$$x'(t) + x(t) = t\,\mathscr{U}(t) - \big((t-1)+1\big)\,\mathscr{U}(t-1)$$

$$(p\,X(p) - 0) + X(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p}$$

$$(p+1)X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{p+1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} - \frac{1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$\boxed{x(t) = \left(t - 1 + e^{-t}\right)\mathscr{U}(t) - (t-1)\,\mathscr{U}(t-1)}$$

b) $x''(t) + x'(t) = \mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

$$(p^2\,X(p) - 0 - 0) + (p\,X(p) - 0) = \frac{1}{p}$$

$$(p^2 + p)X(p) = \frac{1}{p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+p)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$$

$$\boxed{x(t) = \left(t - 1 + e^{-t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

c) $x''(t) + 4x(t) = 2\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - 0 - 1) + 4X(p) &= \frac{2}{p} \\
(p^2+4)X(p) &= \frac{2}{p} + 1 \\
X(p) &= \frac{p+2}{p(p^2+4)} \quad = \frac{\frac{1}{2}}{p} + \frac{-\frac{1}{2}p + 1}{p^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2t) + \sin(2t)\Big)\ \mathscr{U}(t)}$$

d) $x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - p - 0) + 5(p\,X(p) - 1) + 4X(p) &= \frac{1}{p+2} \\
(p^2+5p+4)X(p) &= \frac{1}{p+2} + p + 5 \\
X(p) &= \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p^2+5p+4)} \quad = \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p+1)(p+4)} \\
&= \frac{5/3}{p+1} + \frac{-1/2}{p+2} + \frac{-1/6}{p+4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{5\,e^{-t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-4t}}{6}\right)\ \mathscr{U}(t)}$$

e) $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - p - 1) + 2(p\,X(p) - 1) + 2X(p) &= 0 \\
(p^2+2p+2)X(p) &= p + 3 \\
X(p) &= \frac{p+3}{p^2+2p+2} \\
&= \frac{p+1}{(p+1)^2+1^2} + \frac{2}{(p+1)^2+1^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \Big(\cos(t) + 2\sin(t)\Big)e^{-t}\ \mathscr{U}(t)}$$