

Série n°4

Exercice 1: Déterminer les points critiques, ensuite étudier l'existence des extremums des fonctions suivantes:

- 1) $f(x,y) = 5y^2 + 2x^2 + 10y - 6x + 6$ 2) $f(x,y) = x^2 + xy$
3) $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2xy - 6x + 3$ 4) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
5) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Exercice 2: Soit la fonction f_α définie par:

$$f_\alpha(x,y) = 1 + x + \alpha xy + \alpha x^3 + 2y^2.$$

- 1) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α admet des points critiques. Trouver ensuite ces points.
2) Pour $\alpha = 6$, préciser la nature des extremums de la fonction f_α .

Exercice 3: Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = (2x^2 - 4)^2 + (2x^2 - 4)(y^2 - 1) + (y^2 - 1)^2,$$

$$g(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

- 1) Calculer les dérivées partielles premières de g , ensuite trouver les points critiques, et préciser celles qui sont des extremums en déterminant leur nature.
2) Calculer l'extremum en $(0,0)$ et montrer que c'est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
3) Dédurre de la question précédente que f admet un minimum global en quatre points à déterminer.
4) On veut étudier les extremums liés de la fonction g sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R par deux méthodes:

Méthode 1: (a) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, montrer qu'il existe quatre points critiques de la fonction g .

(b) Montrer que g admet un minimum lié en deux points et un maximum en deux points.

Méthode 2: (a) Écrire l'expression de g en coordonnées polaires (R, θ) , où $\theta \in]-\pi, \pi]$.

(b) Montrer que $\forall \theta \in]-\pi, \pi]$:

$$\frac{R^2}{2} \leq g(R, \theta) \leq \frac{3R^2}{2}.$$

(c) Dédurre que g admet un minimum lié en deux points et un maximum en deux points.

Exercice 4: Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y).$$

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f .

2) Trouver les points critiques de la fonction f , ensuite étudier l'existence et la nature des extrema.

Indication: $(\sin \theta = \sin \varphi) \Leftrightarrow (\theta = \varphi + 2k\pi \vee \theta = \pi - \varphi + 2k\pi).$