Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique

Aide Multicritère à La Décision (AMCD)

Chapitre 2 (suite)

Méthodes d'AMCD utilisant un critère unique de synthèse

Octobre 2021

4. Minimum et Maximum pondéré

- **wmin** (opérateur conjonctif) favorise les alternatives **dont tous les critères importants** ont une bonne performance. Le résultat de l'agrégation est élevé (proche de 1) SSI toutes les quantités à agréger sont élevées.

$$\boldsymbol{wmin(a_i) = \underset{j \in F}{\mathrm{Min}} \{Max\{(1 - w_j), a_{ij}\}\}}$$

- **wmax** (opérateur disjonctif)favorise les alternatives dont **le critère le plus important** à une bonne performance, quelles que soient les performances des autres critères. Le résultat de l'agrégation est élevé dès que l'une des quantités à agréger est élevée.

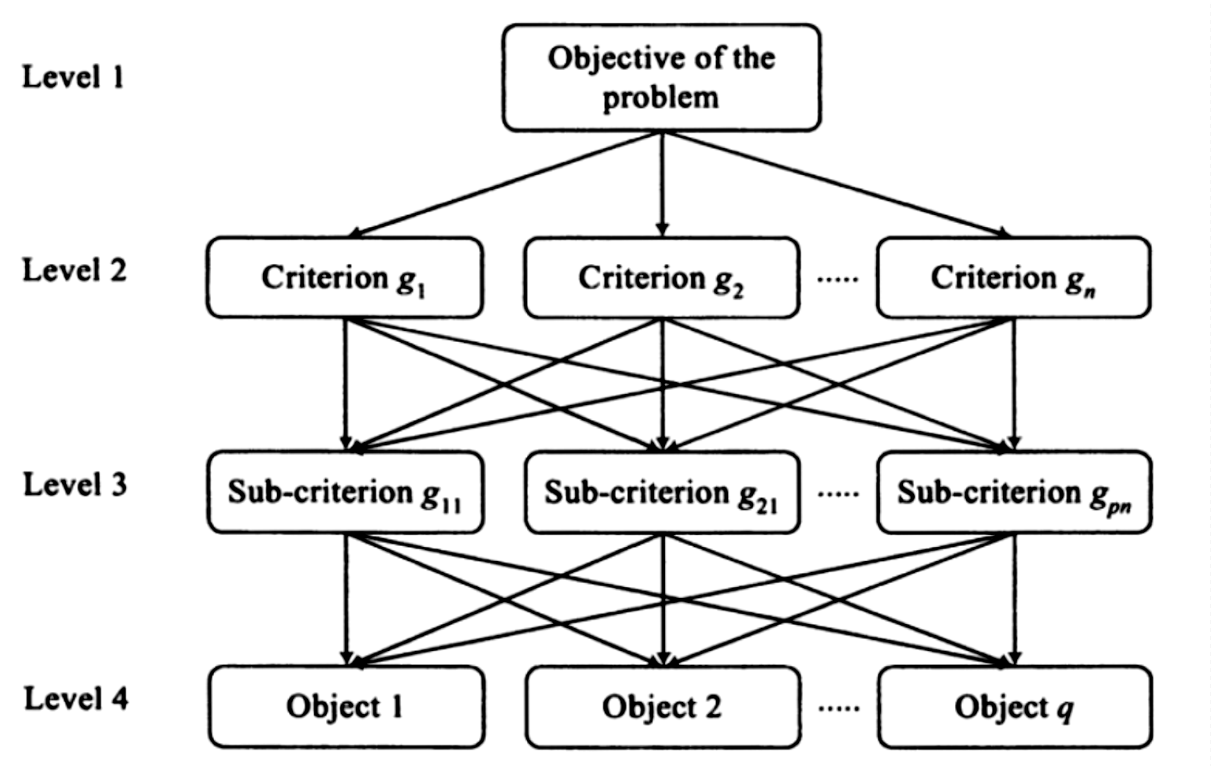
$$\boldsymbol{wmax(a_i) = \underset{j \in F}{\mathrm{Max}} \{Min\{w_j, a_{ij}\}\}}$$

Exemple : Considérons trois critères où $(w_1, w_2, w_3) = (0.1, \mathbf{0.4}, \mathbf{0.5})$,

Soient les deux alternatives a et b : $a = (0.6, 0.9{,}0.7)\ et\ \ b = (0,\ \ 0.1\ ,\ \ \mathbf{1})$

5. Méthode AHP (Analytic Hierarchy Process)

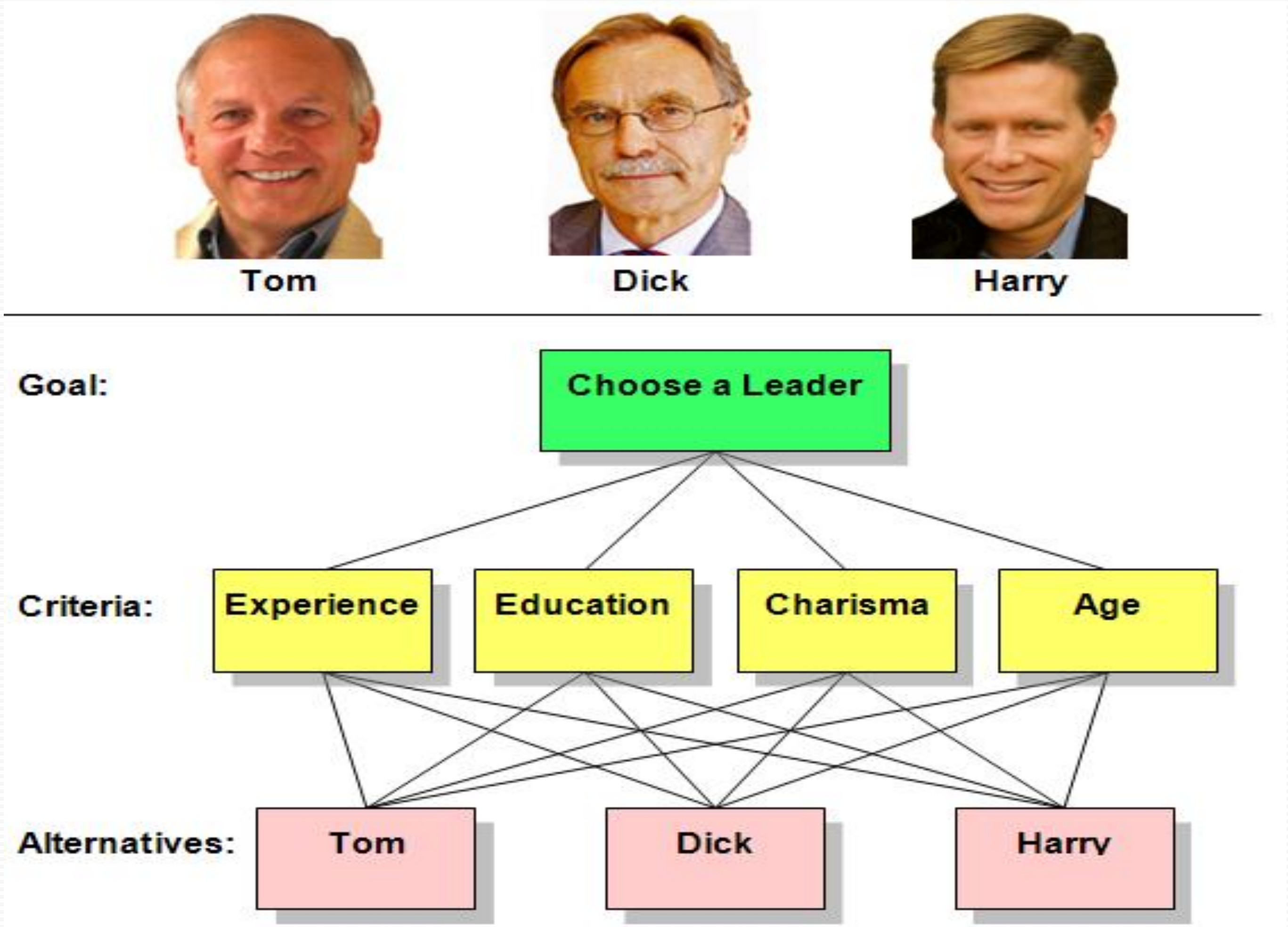
Principe : le problème de décision est structuré sous forme **d'une hiérarchie** d'objectif, de critères, de sous critères et d'alternatives.



Thomas Saaty (AHP , 1980)

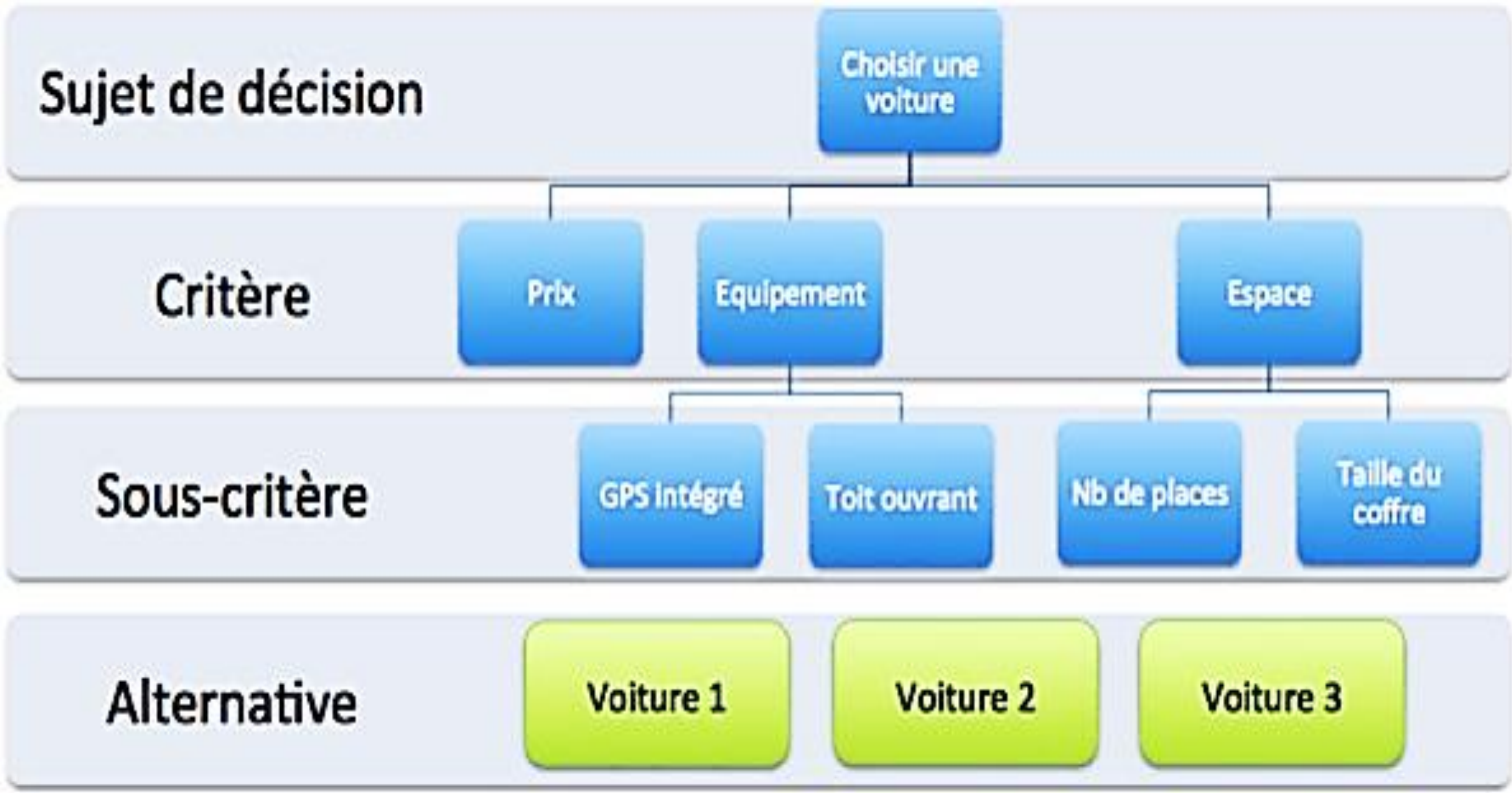
5. Méthode AHP (Analytic Hierarchy Process)

Exemple 1 (Choix d'un leader)



5. Méthode AHP (Analytic Hierarchy Process)

Exemple 2 (Choix d’une voiture)



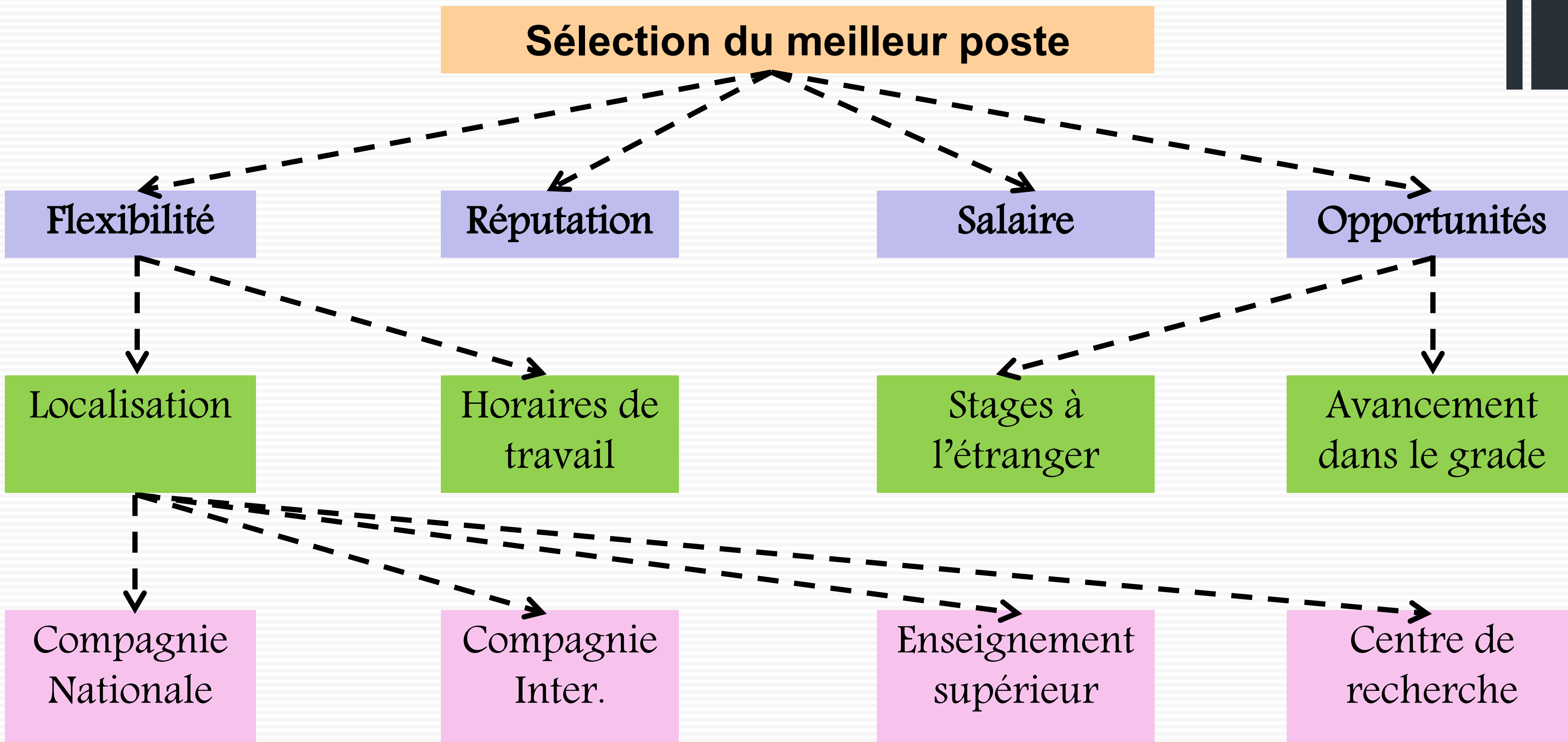
5. Méthode AHP (Analytic Hierarchy Process)

AHP repose sur la comparaison des :

- ✓ **paires de Critères** : chaque élément dans la matrice de comparaison exprime avec quel poids le critère contribue à la réalisation de l'objectif
- ✓ **paires de Sous-critère** : chaque élément dans la matrice de comparaison exprime avec quel poids le sous-critère contribue à la réalisation du critère
- ✓ **paires de Alternatives** : chaque élément dans la matrice de comparaison exprime à quel point l'alternative satisfait le critère (ou sous critère).

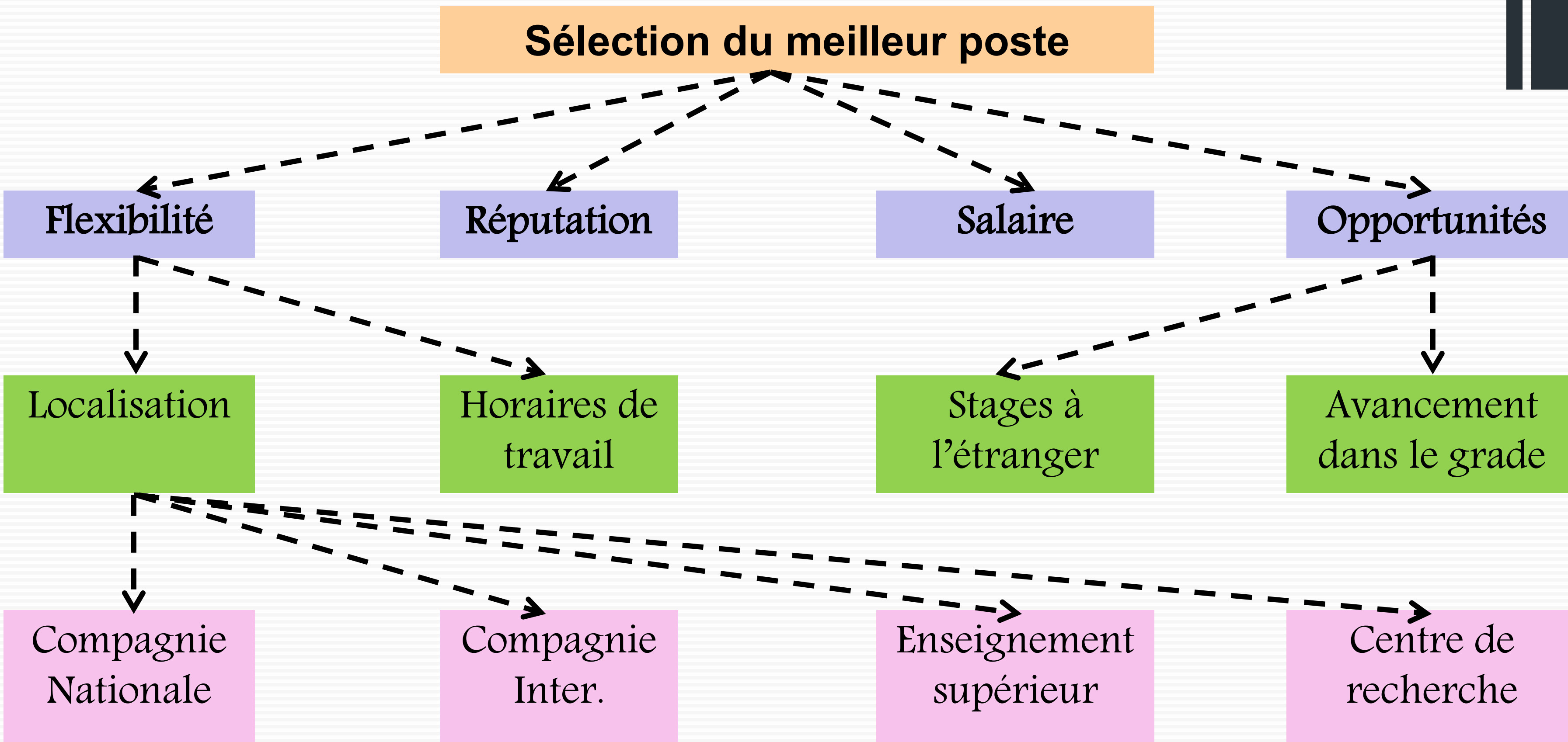
L'échelle sémantique/numérique **des préférences** utilisé dans le remplissage des matrices est le suivant :

Intensité de la préférence	Valeur associée
différence nulle ou négligeable	1
Préférence légère	3
Préférence	5
Préférence forte	7
Préférence très forte	9



Choix Job	Flexibilité	Opportunités	Salaire	Réputation
Flexibilité				
Opportunités				
Salaire				
Réputation				

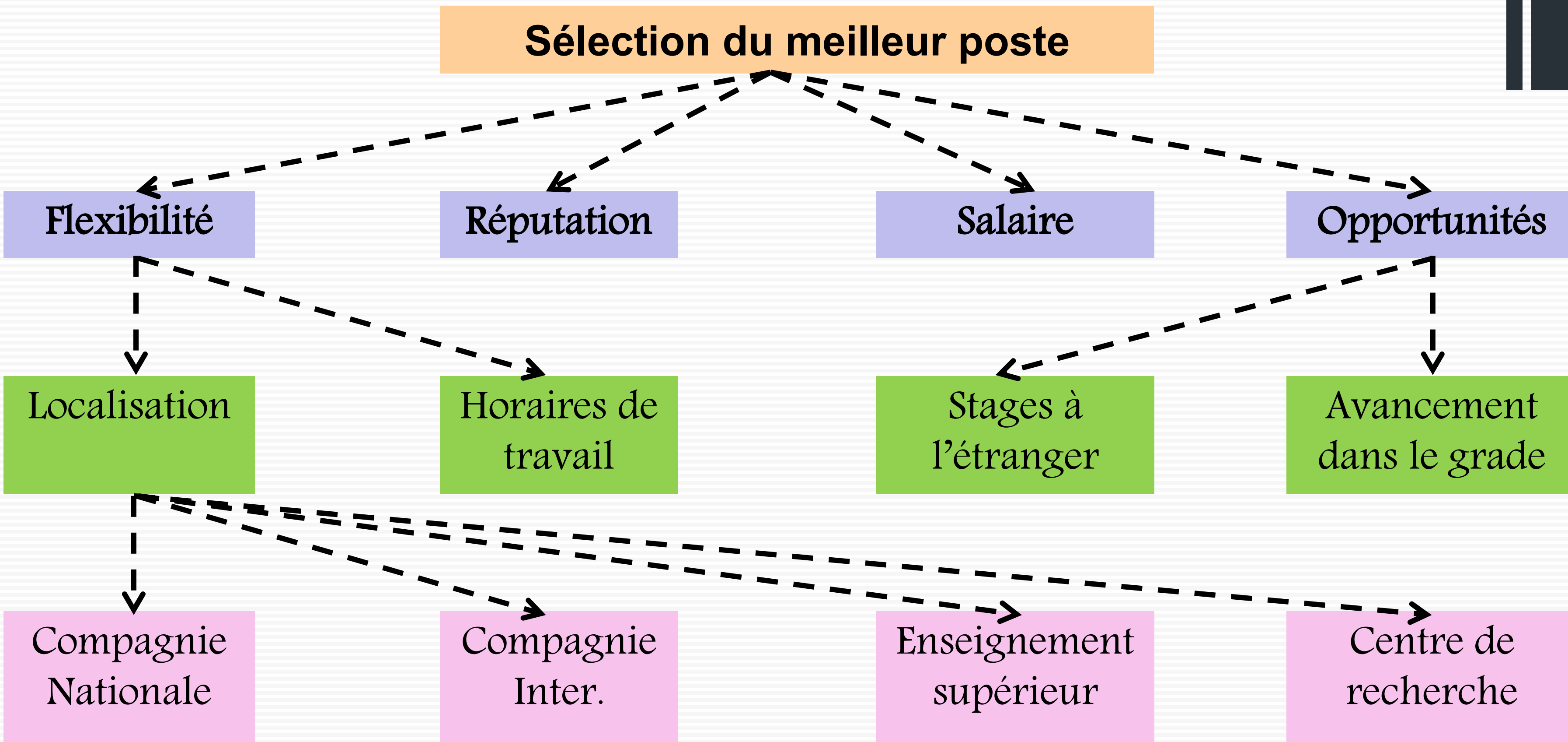
Calcul des poids des critères



Flexibilité	Localisation	Horaire
Localisation		
Horaire		

Opportunités	Stage	Grade
Stage		
Grade		

Calcul des poids des sous-critères



Localisation	Comp.nat	Comp.inter	Ens.Sup	Centre.R
Comp.nat				
Comp.inter				
Ens.Sup				
Centre.R				

Calcul des performances partielles

On fait de même pour:

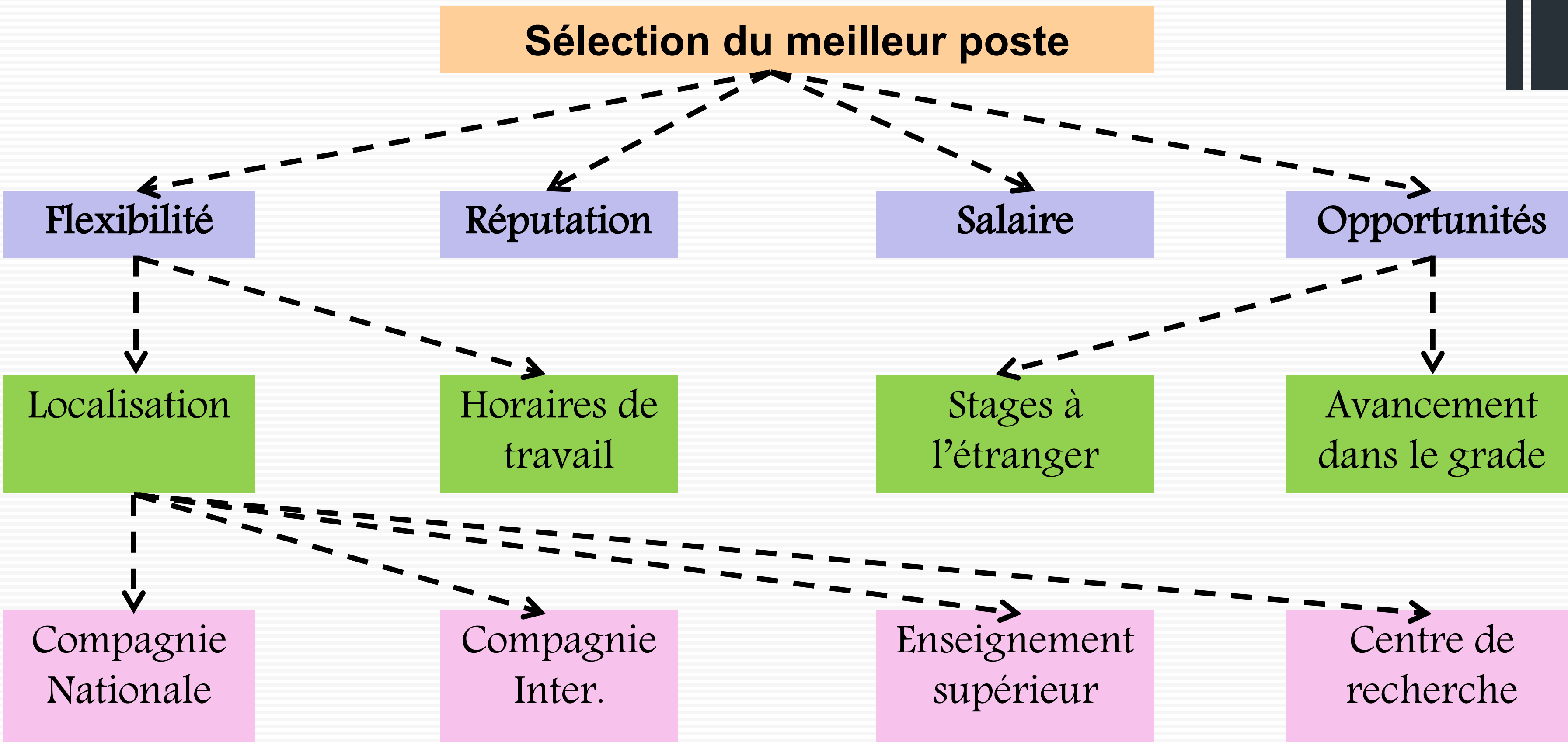
1. Horaire de travail,
2. Stage,
3. Grade,
4. Salaire,
5. Réputation

Etapes de la méthode AHP

I) Pour chaque matrice de comparaison (aussi appelée **matrice de Saaty**):

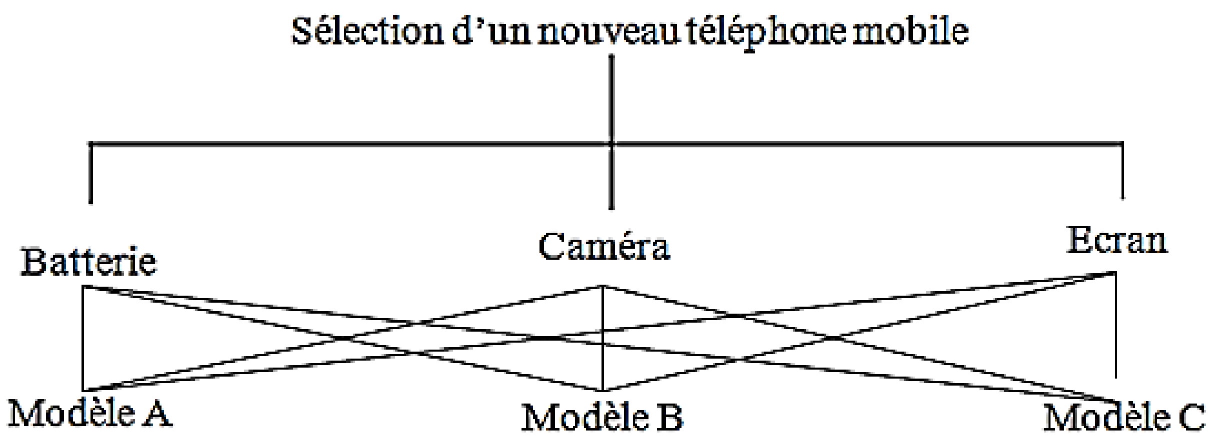
- **Additionner les colonnes de la matrice**: tous les éléments d'une même colonne sont additionnés.
- **normaliser la matrice**: chaque entrée de la matrice est divisé par le total de sa colonne.
- **calculer la moyenne des lignes**: tous les éléments d'une même ligne de la matrice normalisé sont additionnés et ensuite divisé par le nombre d'entrées qu'elle comporte.

II) Calcul de la performance globale pour chaque alternative en utilisant la **méthode de la somme pondérée**.



Performance globale (a) = $a_L * w_L * w_F + a_H * w_H * w_F + a_R * w_R + a_S * w_s + a_T * w_T * w_O + a_G * w_G * w_O$

Exemple



Objectif	Batterie	Caméra	Ecran
Batterie	**1**	**¼**	**3**
Caméra		**1**	**7**
Ecran			**1**

Batterie	A	B	C
A	**1**	**4**	**3**
B		**1**	**½**
C			**1**

Caméra	A	B	C
A	**1**	**5**	**3**
B		**1**	**¼**
C			**1**

Ecran	A	B	C
A	**1**		
B	**3**	**1**	
C	**7**	**2**	**1**

1. Que signifient les valeurs ¼ et 7 dans la matrice **Objectif**
2. Classer les alternatives en appliquant AHP.

Soit la **matrice de Saaty** suivante , est-elle **cohérente** ??

	x	**y**	**z**
x	1	2	1/3
y		1	3
z			1

Inconsistance des matrices de comparaison

Saaty a proposé de calculer le **ratio de consistance** RC. Si $RC \leq 0.1$ alors la matrice M est acceptée sinon elle doit être révisée.

$$\boldsymbol{RC = \frac{IC}{RI}}$$

IC désigne l'indice de cohérence, il se calcule comme suit : $\boldsymbol{IC = \frac{\lambda_{max} - N}{N-1}}$

- N : est le nombre des éléments en comparaison
- λ_{max} : est la valeur propre maximale, qu'on obtient à partir de la résolution du système d'équations: $M\omega = \lambda_{max}\omega$ Tel que :
  - M est la matrice considérée.
  - ω c'est le vecteur normalisé des poids ou des performances partielles

NB. IC =0 cohérence parfaite lorsque λ_{max}=N

RI désigne Random Index. Pour chaque dimension n on donne le RI correspondant dans le tableau ci-dessous (ces valeurs sont obtenues en calculons la moyenne des Ics sur un échantillon de matrices générées aléatoirement).

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Exemple: vérifions la consistance de la matrice ci-dessous:

	x	y	z
x	1	1/3	1/2
y	3	1	3
z	2	1/3	1

En Matlab, utiliser Eig(M) pour trouver les valeurs propres :

$$IC = \frac{\lambda_{max} - N}{N-1} = \frac{3.04-3}{3-1} = 0.02$$

$$RC = \frac{IC}{RI} = \frac{0.02}{0.58} = 0.034\ldots << 0.1$$

6. TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)

L'idée clé dans TOPSIS consiste à calculer la distance euclidienne entre les alternatives et deux solutions de références (alternatives fictives) :

- PIS (Positive Ideal solution)
- NIS (Negative Ideal solution)

La meilleure alternative selon TOPSIS est celle ayant l'indice de similarité maximale avec la solution idéale. C'est-à-dire qui soit la plus proche du PIS et en même temps qui soit la plus éloignée du NIS.

<u>Etape 1</u> : Normalisation Vectorielle des performances partielles

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_i a_{ij}{}^2}} \quad \forall\, i = 1, \dots, m\; j = 1, \dots, n$$

<u>Etape 2</u>: Multiplication par les poids

$$v_{ij} = \omega_j r_{ij} \quad \forall\, i = 1, \dots, m\; j = 1, \dots, n$$

<u>Etape 3</u>: Identification des solutions PIS et NIS

PIS = $\{ v_1{}^*, \dots, v_j{}^*, \dots, v_n{}^* \} = \{(\max_i v_{ij} / j \in J_1), (\min_i v_{ij} / j \in J_2)\}$

NIS = $\{ v_{1*}, \dots, v_{j*}, \dots, v_{n*} \} = \{(\min_i v_{ij} / j \in J_1), (\max_i v_{ij} / j \in J_2)\}$

J_1 : ensemble des critères bénéfice J_2 : ensemble des critères coût

<u>Etape 4</u>: Calcul des distances par rapport à PIS et NIS

$$d_i^* = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - v_j^*)^2} \qquad d_{i*} = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - v_{j*})^2}$$

<u>Etape 5</u>: Calcul de l'indice de similarité à la solution idéale

$$S_i = \frac{d_i^*}{d_i^* + d_{i*}}$$

<u>Etape 6 :</u> Ordonner les actions par ordre décroissant des indices de similarité

Exemple [Problème de choix d'une voiture]

Le choix d'une voiture se fait selon les critères suivants : Prix (u.m), Puissance (Kw) Consommation (litre/100Km), confort (1 très mauvais 2 Moyen 3 bon 5 très bien). Considérons les poids : 0.3 0,2 0,3 et 0,2. On donne la matrice des performances ci-dessous. Appliquer TOPSIS afin de choisir la bonne voiture.

Voiture	Prix	Puissance	consommation	confort
Touristique	25 500	85	7	2
Luxe 1	38 000	90	8.5	5
Luxe 2	35 000	85	9	3
Economique	15 000	50	7.5	1