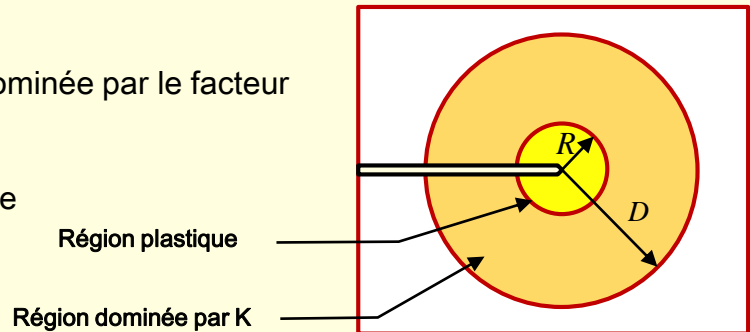


Plan du cours

1. Introduction à la Mécanique Non Linéaire de Rupture (MNLR)
2. Evaluation de la zone plastique par les modèles d'Irwin et de Dugdale
3. Critère de rupture basé sur l'ouverture de fissure

1. Introduction à la mécanique non linéaire de rupture

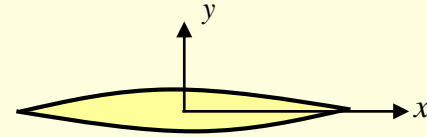
- L'analyse **linéaire élastique** en mécanique de la **rupture** s'applique seulement pour le cas de **matériaux fragiles**.
- Dans la plupart des cas, il existe des **déformations plastiques** au **voisinage du fond de fissure**.
- Supposons la **solution singulière** dominante à l'intérieur du cercle de **rayon D** autour du fond de la fissure.
- Supposons aussi que la **région de confinement plastique** est représentée par le cercle de **rayon R**.
- Si $R \ll D$, la **solution singulière** est dominée par le facteur d'intensité de contrainte **K**.
- Si **R est important**, il faut tenir compte de la **plastification locale**.



2. Evaluation de la zone plastique

- L'idée générale consiste à déterminer le lieu géométrique des points où le champ des contraintes vérifie la limite élastique. La méthode est approximative et permet d'évaluer la taille de la zone plastique
- Considérons une fissure en mode ouverture, les contraintes au voisinage du bout de fissure s'écrivent:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)$$
$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right)$$



- En considérant que la contrainte σ_2 , vérifie le critère de Von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_Y^2 \quad (\sigma_Y : \text{la limite élastique})$$



$$r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + 1 + \cos \theta \right)$$

(En contraintes planes)



$$r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1-2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right)$$

(En déformations planes)

➤ Pour $\theta=0$, la zone plastique est alors:

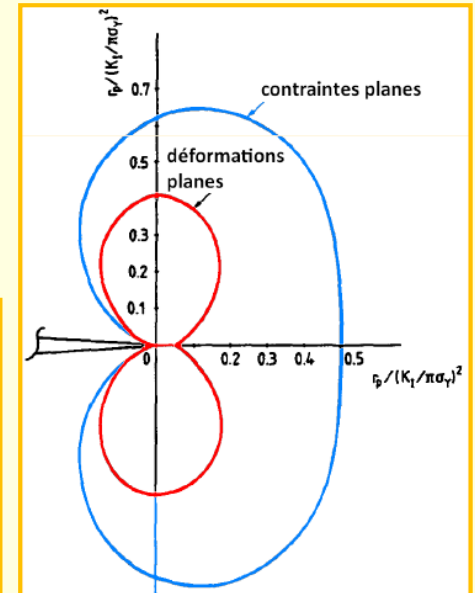
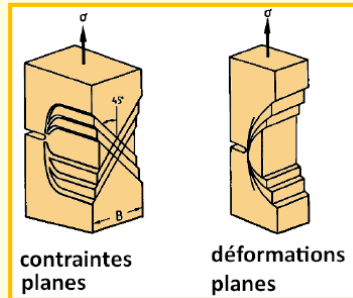
$$r_p(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

(En contraintes planes)

$$r_p(0) = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

(En déformations planes avec $\nu = 1/3$)

Chemin de propagation de la plasticité dans l'épaisseur



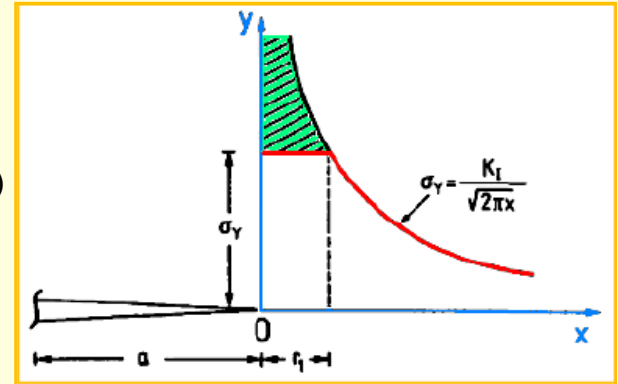
2.1. Modèle d'Irwin

- Irwin proposa en 1960 un modèle permettant d'évaluer la **taille de la zone plastique** sur l'axe de la fissure.
- Hypothèse d'un matériau **élastique-plastique parfait**.
- Hypothèse des **contraintes planes**
- Evolution de σ_Y le long de l'axe de la fissure.
- Le rayon de la zone plastique est donné par:

$$r_p(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad (\sigma_Y : \text{la limite élastique})$$

$$0 < r < r_1 \Rightarrow \sigma_y = \sigma_Y$$

$$r > r_1 \Rightarrow \sigma_Y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$



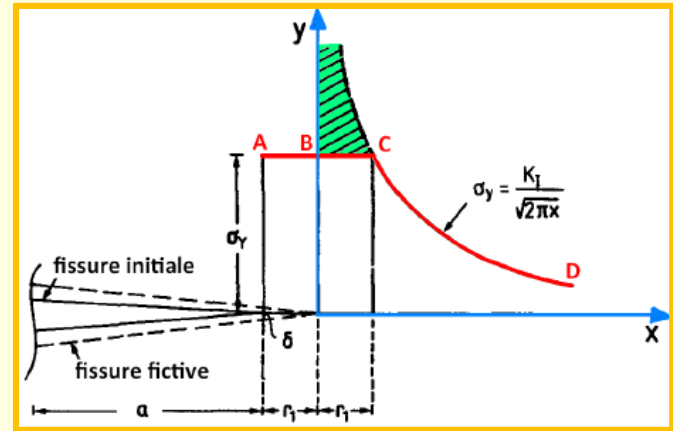
- Comme σ_y est constante pour $r < r_1 \rightarrow$ violation de l'équilibre suivant l'axe y .
- La réduction de σ_y est compensée par σ_x d'où une augmentation de r_1 .

Chapitre III Mécanique non linéaire de la rupture

- Irwin proposa que l'aire en dessous de la courbe $\sigma_y(x)$ soit donnée par:

$$\int_0^{r_1} \frac{K_I dx}{\sqrt{2\pi x}} = 2\sigma_Y r_1$$

- Pour satisfaire l'équilibre
→ la fissure doit s'allonger de r_1
- L'aire en dessous de la courbe ABCD = l'aire sous la courbe $\sigma_y(x) = K_I / \sqrt{2\pi x}$



- La résolution de $\int_0^{r_1} \frac{K_I dx}{\sqrt{2\pi x}} = 2\sigma_Y r_1$ donne la longueur de fissure: $c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$
- Le modèle d'Irwin donne une longueur de fissure deux fois plus importante que la méthode approchée.

Contraintes planes → Méthode approchée

$$r_p(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

Irwin

$$c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

Déformations planes →

$$r_p(0) = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

$$c = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

- De l'ouverture de la fissure, nous pouvons obtenir le champs de déplacement vertical:

$$v(x) = \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a$$

➤ Ce qui donne

$$\delta = 2v = \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma \sqrt{(a+c/2)^2 - a^2}$$



Contraintes planes

→

$$\delta = \frac{4}{\pi E} \frac{K_I^2}{\sigma_Y}$$

Déformations planes

→

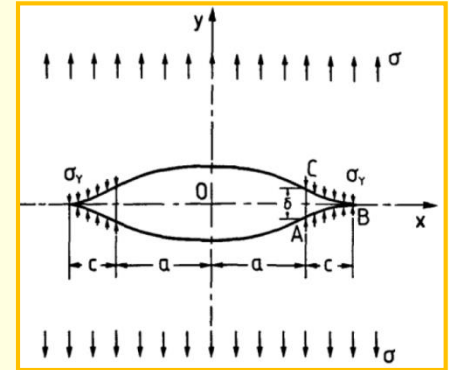
$$\delta = \frac{4(1-\nu^2)}{3\pi E} \frac{K_I^2}{\sigma_Y}$$

2.2. Modèle de Dugdale

- Ce modèle est valable pour les **plaques très minces**, faites d'un **matériau élastique- plastique parfait**.
- Le critère de **Tresca** est utilisé. La plasticité est supposée concentrée le long de l'axe de la fissure.

$$c = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

$$\delta = \frac{K_I^2}{E\sigma_Y}$$



3. Critères de rupture basé sur l'ouverture de fissure (COD)

- Introduit par Wells et Cottrell (1961) → initiation de fissures en présence de plasticité

$$\delta = \delta_c$$

- Le modèle d'Irwin donne (en contraintes planes):

$$\delta_c = \frac{4}{\pi} \frac{K_c^2}{E \sigma_Y}$$

- Le modèle de Dugdale donne (en contraintes planes):

$$\delta_c = \frac{K_c^2}{E \sigma_Y}$$

- D'après le Chapitre 1, nous avons: $G_I = \frac{K_I^2}{E}$

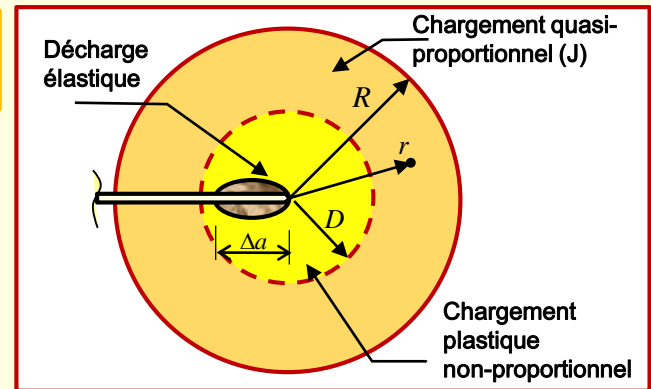
- D'où l'on peut déduire:

$$G = \frac{\pi}{4} \sigma_Y \delta$$

→ D'après le modèle d'Irwin

$$G = \sigma_Y \delta$$

→ D'après le modèle de Dugdale



Le taux de restitution d'énergie de Griffith est proportionnel à l'ouverture de la fissure