

Chapitre 2

Tenseur des contraintes

I) - Définition de la contrainte

- On dit qu'un corps solide est en état de contrainte quand il est soumis à des forces extérieures ou bien, d'une façon générale, quand un élément infinitésimal de ce corps est soumis à des forces de la part des éléments voisins.
- Donc, un élément d'un corps solide est sous contrainte quand il est soumis à deux types de forces :
 - i) des forces extérieures, comme la pesanteur qui agit sur tous les éléments du corps; ces forces sont proportionnelles au volume;
 - ii) des forces exercées sur la surface de l'élément par le milieu qui les entoure. Ces forces sont en général proportionnelles à la surface de l'élément. La force exercée par unité de surface est appelée contrainte.

I.1) - Contraintes homogènes

- Une contrainte est dite homogène quand les forces qui s'exercent sur un élément de surface dS , d'orientation et de forme données, ne dépendent pas de la position qu'occupe l'élément à l'intérieur du corps.
- On suppose que l'étude va se limiter à :
 - * des contraintes qui sont homogènes dans l'ensemble du corps solide;
 - * au cas des corps solide (toutes ses parties) en équilibre statique;
 - * à l'absence de champs de forces et de champs de moments.

- On considère un élément de forme cubique et de volume unité (1) d'un corps solide supposé en état de contrainte (contraintes homogènes). On suppose que les faces du cube sont perpendiculaires aux axes (ox_i) du repère orthonormé. Sur chaque face du cube, la matière extérieure exerce une force : cette force peut être décomposée en trois composantes.

La figure suivante schématise les contraintes (forces par unité de surface) sur les trois (3) faces externes.

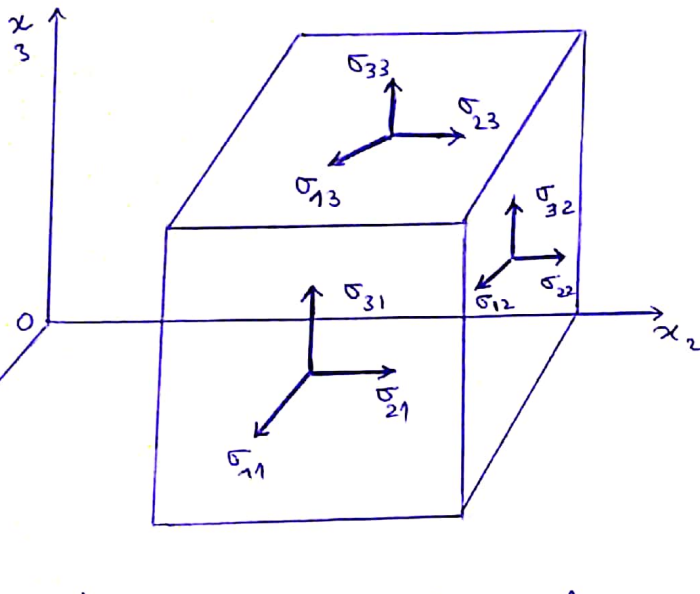


Fig1 : Forces s'exerçant sur un cube de volume unité dans un solide soumis à des contraintes homogènes.

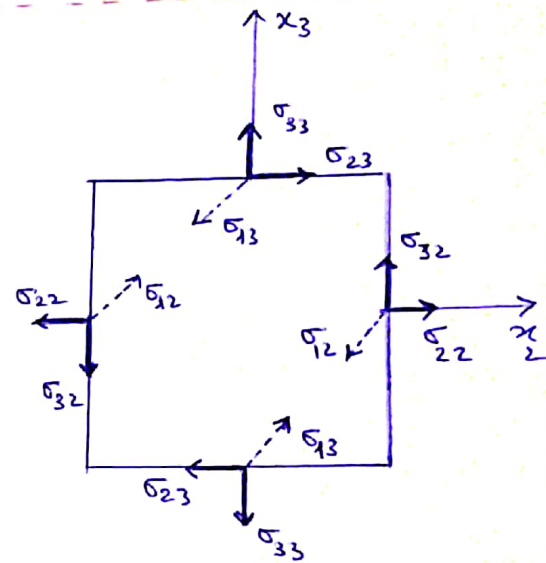


Fig2 : Equilibre statique du cube de volume unité.

- * Les composantes de la contrainte (force par unité de surface) qui s'exerce sur la face perpendiculaire à l'axe ox_1 sont : $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}$ (σ_{i1})
- * Même chose pour la face perpendiculaire à l'axe ox_2 : $\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}$ (σ_{i2})
- * Même chose pour la face perpendiculaire à l'axe ox_3 : $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ (σ_{i3}).

→ Définition : La composante σ_{ij} représente la composante de la contrainte dans la direction (ox_i) qui s'exerce sur la face perpendiculaire à l'axe (ox_j).

σ_{ij} ← face
composante

* Si $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ sont positives, on dit que l'élément de volume est en "traction" ou "tension".

* Si $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33} < 0$, on dit que l'élément de volume est en "compression".

* $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$: composantes normales de la contrainte : contraintes normales ou "contraintes de dilatation".

* $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ etc : Composantes de cisaillement de la contrainte : "contraintes de cisaillement".

→ - L'hypothèse de l'équilibre statique du cube unité impose des conditions sur les composantes σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

* Prenons les moments par rapport à un axe parallèle à Ox_1 passant par le centre du cube (figure 2). Les contraintes étant homogènes, les trois composantes de la force qui s'exerce sur chaque face, passent par le point milieu de cette face. Les composantes normales et les composantes de cisaillement sur les faces (Ox_1) ne donnent pas de moments et la condition d'équilibre s'écrit :

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}$$

$$\text{même chose pour les faces : } \begin{cases} Ox_2 : \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ Ox_3 : \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i, j$$

I.2. Contraintes non homogènes

- Soit le cas de contraintes supposées non homogènes, c'est à dire dépendant de la position spatiale dans le corps.

On considère un volume infinitésimal pris dans un corps supposé soumis à des contraintes non-homogènes. Pour simplifier, on prend le volume sous la forme d'un parallélépipède rectangulaire centré à l'origine O du repère Ox_i et de côtés parallèles aux axes Ox_i . Les longueurs de ses côtés sont δx_1 (le long de Ox_1), δx_2 (le long de Ox_2) et δx_3 (le long de Ox_3), Figure 3. σ_{ij} sont les contraintes à l'origine.

→ La contrainte est homogène, et les forces qui s'exercent sur le cube à travers les trois faces opposées doivent être égales en intensités et opposées à celles représentées sur la figure 1 - (voir fig. 2).

→ Les composantes σ_{ij} forment un tenseur de rang deux.

- Dans de nombreux cas, le tenseur des contraintes n'est pas uniforme ; il varie d'un point à un autre du solide. Calculons la résultante des forces

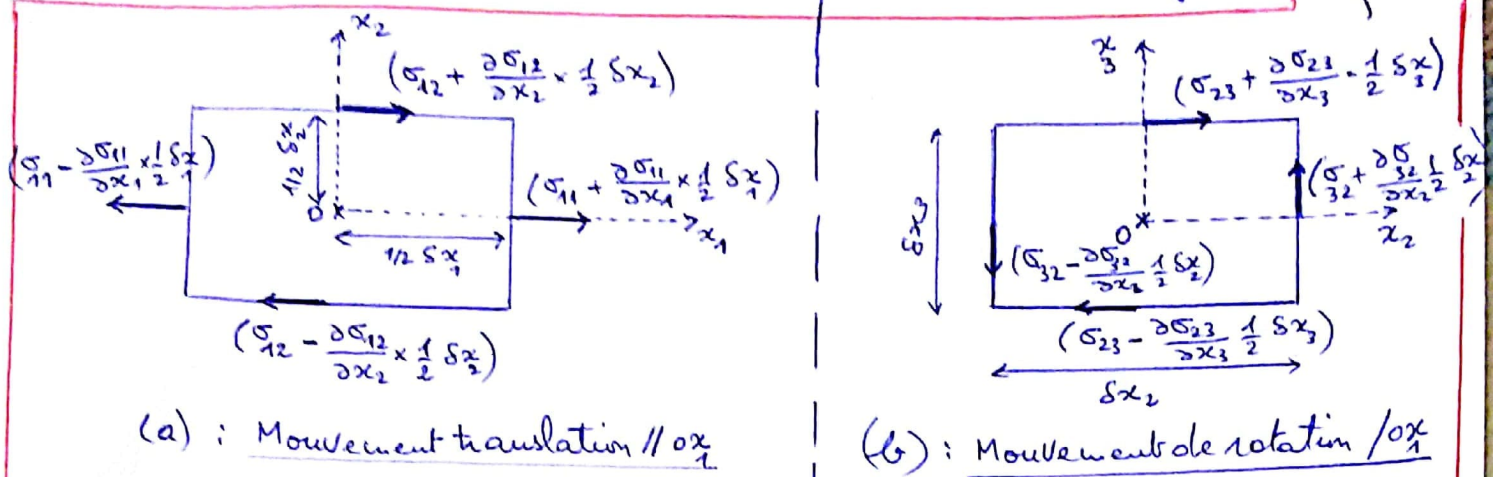


Figure 3 : Contraintes non homogènes.

auxquelles est soumis le parallélépipède, sans négliger l'existence de forces en volume. Soit la face perpendiculaire à (ox_1) de surface $(\delta x_2 \times \delta x_3)$

→ Les forces qui s'exercent sur les 2 faces perpendiculaires à ox_1 dans la direction ox_1 sont :

$$\left[\sigma_{11} + \left(\frac{1}{2} \delta x_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right) \right] \delta x_2 \cdot \delta x_3$$

$$\text{et } - \left[\sigma_{11} - \left(\frac{1}{2} \delta x_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right) \right] \delta x_2 \cdot \delta x_3$$

La résultante de ces 2 forces est égale à : $2 \times \frac{1}{2} \delta x_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \delta x_2 \cdot \delta x_3 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \delta v$

où $\delta v = \delta x_1 \times \delta x_2 \times \delta x_3$: volume du parallélépipède infinitésimal.

→ Les forces qui s'exercent sur les 2 faces perpendiculaires à ox_2 dans la direction ox_1 sont :

$$\left[\sigma_{12} + \left(\frac{1}{2} \delta x_2 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \right) \right] \delta x_1 \delta x_3 \text{ et } - \left[\sigma_{12} - \left(\frac{1}{2} \delta x_2 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \right) \right] \delta x_1 \delta x_3$$

et leur résultante est égale : $\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \delta v$

→ Les forces qui s'exercent sur les 2 faces perpendiculaires à ox_3 dans la direction ox_1 admettent comme résultante : $\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \delta v$

→ Donc, la résultante de toutes les forces qui s'exercent suivant l'axe ox_1 est donnée par : $\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) \delta v$

- De plus, si on suppose qu'il existe un champ de forces dont la composante par unité de masse suivant ox_1 est notée g_1 .
(la masse du volume $\delta v = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$, est $\delta m = \rho \delta v$ où ρ : est la masse volumique du corps)

Par conséquent, suivant ox_1 , on aura la résultante :

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) \delta v + (\rho \delta v) g_1$$

- * $\rightarrow$ Alors, l'équation de mouvement de translation (fig 3-a) de δv suivant la direction ox_1 s'écrit comme :

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) \delta v + \rho g_1 \delta v = \rho \frac{d^2 x_1}{dt^2} \delta v$$

($\frac{d^2 x_1}{dt^2}$: étant l'accélération dans la direction ox_1)

$$\text{c'est-à-dire : } \boxed{\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho g_1 = \rho \frac{d^2 x_1}{dt^2}} \quad (*)$$

$\rightarrow$ Même raisonnement suivant la direction ox_2 :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho g_2 = \rho \frac{d^2 x_2}{dt^2}} \quad - (**)$$

$\rightarrow$ Même raisonnement suivant la direction ox_3 :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho g_3 = \rho \frac{d^2 x_3}{dt^2}} \quad - (***)$$

Les équations (*), (**) et (***) peuvent s'écrire :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1 \rightarrow 3 \end{pmatrix}$$

Cette relation établit la relation des petites variations spatiales des contraintes dans δv avec les accélérations de l'élément.

$\rightarrow$ Dans le cas d'un corps se trouvant en équilibre statique, les équations de mouvement de translation s'écriront :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0}$$

(*) On considère maintenant les équations du mouvement de rotation de l'élément δv par rapport aux axes ox_i (Figure 3b : / ox_1)

a) - Le couple dû aux composantes de cisaillement des contraintes (forces) sur la face perpendiculaire à l'axe (ox_2) s'écrit :

$$\left[\left(\sigma_{32} + \frac{1}{2} \delta x_2 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} \right) \delta x_1 \delta x_3 \cdot \left(\frac{1}{2} \delta x_2 \right) + \left(\sigma_{12} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \frac{1}{2} \delta x_2 \right) \delta x_1 \delta x_3 \cdot \left(\frac{1}{2} \delta x_2 \right) \right] = \sigma_{32} \delta v$$

- Même raisonnement pour les forces sur la face perpendiculaire à l'axe (ox_3) (contraintes σ_{23}) :

$$\left[- \left(\sigma_{23} + \frac{1}{2} \delta x_3 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) \delta x_1 \delta x_2 \frac{1}{2} \delta x_3 - \left(\sigma_{23} - \frac{1}{2} \delta x_3 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) \delta x_1 \delta x_2 \frac{1}{2} \delta x_3 \right] = - \sigma_{23} \delta v$$

- Donc l'équation du mouvement de rotation autour de l'axe ox_1 s'écrit : $(\sigma_{32} - \sigma_{23}) \delta v$

De plus, si on suppose qu'il existe un champ de moment de couple extérieur par unité de volume autour de ox_1 noté G_1 , alors autour de ox_1 on aura l'équation de mouvement de rotation suivante :

$$(\sigma_{32} - \sigma_{23}) \delta v + G_1 \delta v = I_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \quad \text{--- (i)}$$

I_1 étant le moment d'inertie par rapport à l'axe ox_1 et θ_1

θ_1 étant l'angle de rotation par rapport à ox_2 .

$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2}$ l'accélération angulaire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

b) - Même raisonnement pour le mouvement de rotation autour de l'axe

ox_2 :

$$(\sigma_{13} - \sigma_{31}) \delta v + G_2 \delta v = I_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \quad \text{(ii)}$$

c) Même raisonnement pour le mouvement de rotation autour de l'axe ox_3

$$(\sigma_{21} - \sigma_{12}) \delta v + G_3 \delta v = I_3 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} \quad \text{(iii)}$$

Rq : Il faut se rappeler que le moment d'inertie I (I_1 ou I_2 ou I_3) est

proportionnel à $(\delta S x^5)$. Quand Sx tend vers zéro (c'est-à-dire pour un élément de volume Sv infinitésimal), le terme $(I \frac{d^2\theta}{dt^2})$ devient négligeable car la valeur de l'accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est physiquement limitée.

→ Conséquence : les 3 équations des mouvements de rotation par rapport aux axes ox_1, ox_2 et ox_3 deviennent respectivement :

$$\begin{cases} \sigma_{32} - \sigma_{23} + G_1 = 0 & (\text{autour de } ox_1) \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} + G_2 = 0 & (\text{autour de } ox_2) \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} + G_3 = 0 & (\text{autour de } ox_3) \end{cases}$$

- On voit donc, quand il n'y a pas de couple volumique extérieur ($G_1 = G_2 = G_3 = 0$) on a $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ avec $i, j = 1, 2, 3$

II. Tenseur des contraintes σ_{ij}

- Les composantes de la contrainte σ_{ij} forment un tenseur de rang 2. Pour cela, on doit montrer que les composantes σ_{ij} relient deux grandeurs vectorielles par une équation du type : $P_i = T_{ij} q_j$ (chap I).
- Il faut noter que le tenseur des contraintes $[\sigma_{ij}]$ ne traduit pas les propriétés physiques du matériau cristallin puisqu'il dépend d'une force appliquée à ce matériau.
- On considère un élément de surface d'aire ds autour d'un point P à l'intérieur d'un corps supposé soumis à des contraintes σ_{ij} .

* Soit $\vec{n}(l_1, l_2, l_3)$, le vecteur unitaire perpendiculaire à ce petit élément ds .

* Soit $\vec{f} \cdot ds$ la force qui s'exerce sur ds .

* La force $\vec{F} = \vec{f} \cdot ds$ représente la force exercée par la matière qui se trouve du côté de la face

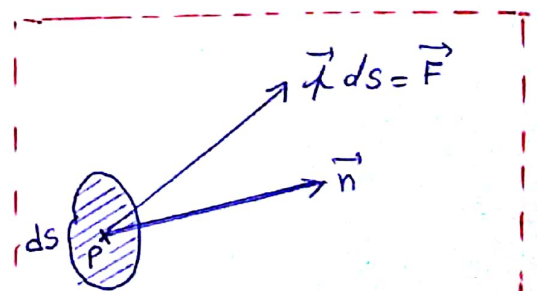


Fig 4 : $\vec{F}$: Force exercée sur ds dans un solide en état de contrainte
 $\vec{n}$: orientation de l'élément ds

positive de ds , définie par le sens de $\vec{n}$, sur la matière se trouvant du côté de la face négative $(-\vec{n})$.

* On suppose que :

- la contrainte est homogène ;
- il n'y a pas de champ de forces, le corps est en équilibre statique.

* Soit à considérer à l'intérieur du corps l'équilibre d'un volume infinitésimal représentant un tétraèdre $OABC$ dans un système d'axes orthonormés Ox_i .

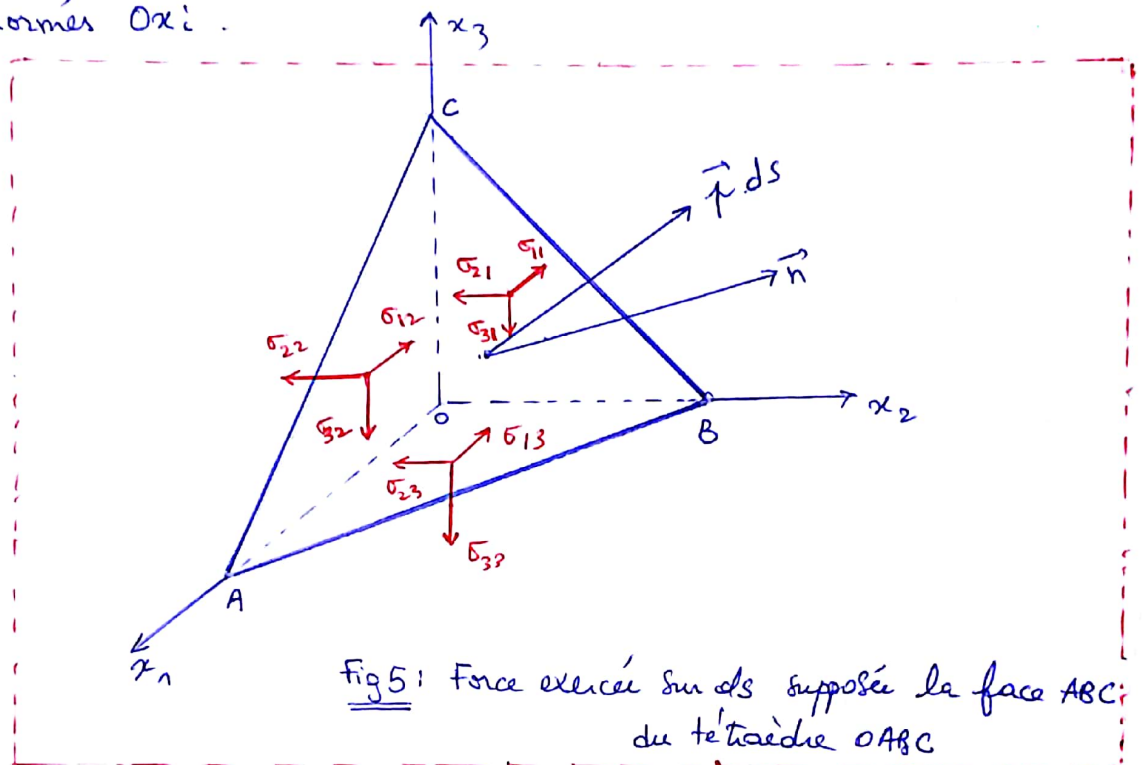


Fig 5: Force exercée sur ds supposée la face ABC du tétraèdre $OABC$

Les forces s'exerçant sur les trois autres faces OAB , OBC et OAC du tétraèdre sont indiquées sur la figure 5 :

* La condition d'équilibre des forces permet d'écrire :

1) - parallèlement à Ox_1 : $f_1 (\text{aire } ABC) = \sigma_{11} (\text{aire } OBC) + \sigma_{12} (\text{aire } OAC) + \sigma_{13} (\text{aire } OAB)$

2) - parallèlement à Ox_2 : $f_2 (\text{aire } ABC) = \sigma_{21} (\text{aire } OBC) + \sigma_{22} (\text{aire } OAC) + \sigma_{23} (\text{aire } OAB)$

3) - parallèlement à Ox_3 : $f_3 (\text{aire } ABC) = \sigma_{31} (\text{aire } OBC) + \sigma_{32} (\text{aire } OAC) + \sigma_{33} (\text{aire } OAB)$.

sachant que : $\frac{\text{aire } OBC}{\text{aire } ABC} = l_1$; $\frac{\text{aire } OAC}{\text{aire } ABC} = l_2$; $\frac{\text{aire } OAB}{\text{aire } ABC} = l_3$

(l_1, l_2, l_3 étant les cosinus directeurs de $\vec{n}$)

alors on aura :

$$\begin{cases} f_1 = \sigma_{11} l_1 + \sigma_{12} l_2 + \sigma_{13} l_3 \\ f_2 = \sigma_{21} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \sigma_{23} l_3 \\ f_3 = \sigma_{31} l_1 + \sigma_{32} l_2 + \sigma_{33} l_3 \end{cases}$$

C'est-à-dire $\underline{f_i = \sigma_{ij} l_j}$ avec $\begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j : 1 \rightarrow 3 \end{cases}$

- $\vec{f}$ est la force qui s'exerce par unité de surface sur l'élément dS orienté par sa normale $\vec{n}$: $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$

- On aura donc la relation tensorielle reliant les deux vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{n}$ par une relation linéaire : $\underline{\vec{f} = [\sigma_{ij}] \vec{n}}$

$[\sigma_{ij}]$ est alors un tenseur et il est symétrique.

- Par conséquent, ce tenseur de contraintes (ou tenseur de la contrainte) peut être rapporté à ses axes principaux :

* Par rapport à des axes oxi quelconques :

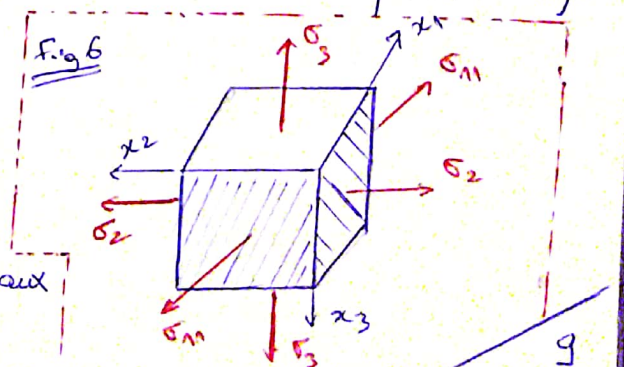
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

* Par rapport aux axes principaux :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les contraintes principales : elles représentent les contraintes normales (les contraintes de cisaillement disparaissent).

* La figure 6 montre les contraintes normales qui s'exercent sur les faces d'un corps cubique dont les arêtes sont confondues (parallèles) avec les axes principaux du tenseur de la contrainte $[\sigma_{ij}]$.



III. Quadrique représentative (QR) de la contrainte $[\sigma_{ij}]$.

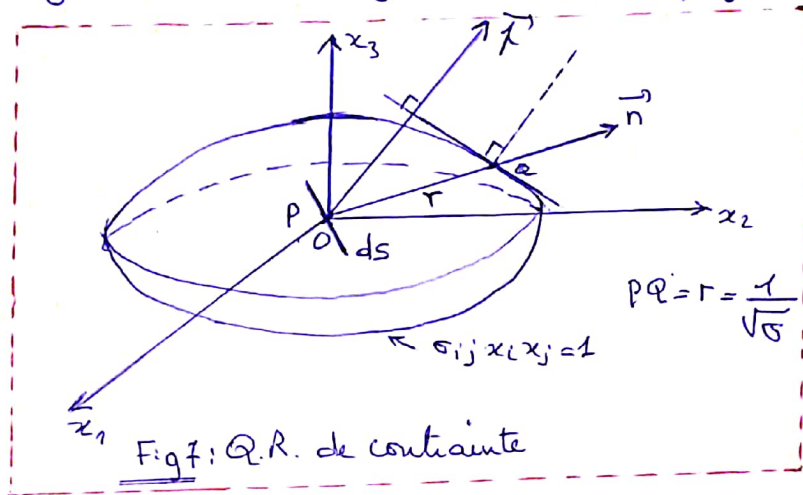
- La quadrique qui représente les σ_{ij} est appelée "quadrique des contraintes", c'est une surface ayant pour équation :

$$\sigma_{ij} x_i x_j = 1 \text{ par rapport à des axes quelconques ;}$$

$$\text{et } \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = 1 \text{ par rapport aux axes principaux .}$$

- * Si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont positives, cette quadrique est un ellipsoïde ayant pour demi-longueurs des axes (demi-axes) : $\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_3}}$.

- Cette QR satisfait évidemment les deux propriétés géométriques : rayon vecteur et rayon normal. (Figure 7).



- * On considère un élément de surface ds de normale $\vec{n}$ autour d'un point P pris dans un corps en état de contrainte.

Du fait des contraintes, cette surface est soumise à la force $\vec{F} = \vec{\tau} ds$

- * La contrainte $\vec{\tau}$ à laquelle est soumise la surface ds est perpendiculaire au plan tangent à la QR au point Q de l'intersection de la QR avec le vecteur $\vec{n}$ normal à ds .

La longueur du rayon vecteur r donne la contrainte normale σ transmise à travers l'élément de surface ds : $\sigma = 1/r^2$

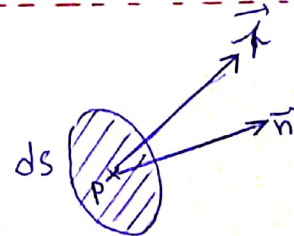


Fig 8: Sous l'effet des contraintes, l'élément de surface ds (orienté suivant $\vec{n}$) est soumis à la force $\vec{F} = \vec{\tau} ds$, où la direction de $\vec{\tau}$ est donnée grâce à la propriété du rayon normal de la QR de la contrainte

cette contrainte normale σ appliquée à l'élément de surface dS est donnée analytiquement par :

$$\sigma = \sigma_{ij} l_i l_j \text{ par rapport à des axes quelconques}$$

et $\sigma = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2$ par rapport aux axes principaux.

IV - Tenseurs de contraintes particuliers

On donne quelques formes prises par le tenseur, dans certains cas particuliers :

1°) - Contrainte uniaxiale σ :

Ex : le cas d'une longue tige
verticale soumise à une

contrainte le long de son axe (portant un poids à son extrémité').

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2°) - Contrainte biaxiale

Ex : Plaque mince dont les arêtes
sont soumises à des forces.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3°) - Contrainte triaxiale

c'est le cas général, cet état
de contrainte présente trois contraintes
principales différentes de zéro.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

4°) Pression hydrostatique.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} = [-P \delta_{ij}]$$

5°) - Contrainte de cisaillement pur :

C'est le cas particulier de contrainte
biaxiale.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rq : Pour trouver les composantes σ'_{ij} dans un nouveau repère, on applique
la loi de transformation des composantes de tenseurs de rang 2 :

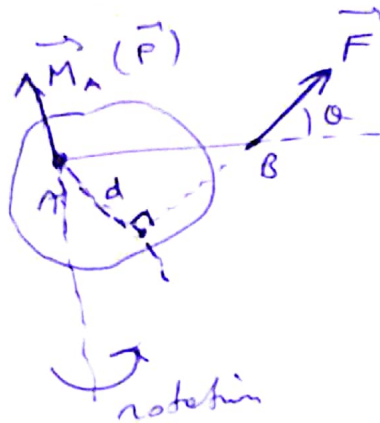
$$\sigma'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

$$\forall i, j \begin{cases} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{cases}$$

(Somme sur k et l)

moment d'une force

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$



$$\begin{aligned} \|\vec{M}_A\| &= AB \cdot F \cdot \sin \theta \\ &= F \cdot d \end{aligned}$$

bras de levier

$$\vec{J}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

poire n index = majeur



le zéro à la valeur maximale ρgh qui, dans le cas d'une éprouvette en acier par exemple ($\rho \approx 7,8 \text{ kg dm}^{-3}$), est égale à $(7,8 \cdot 10^3) \cdot 9,81 \cdot 0,1 = 7,7 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. Cette contrainte est ainsi complètement négligeable devant les contraintes appliquées aux éprouvettes dans le domaine élastique qui sont de l'ordre du mégapascal (MPa). On peut ainsi négliger l'influence de la pesanteur.

227

11.7 Exercices

Exercice 11.1

On considère une contrainte uniaxiale T s'exerçant sur une surface perpendiculaire au vecteur $\mathbf{n}$ de cosinus directeur n_1, n_2, n_3 dans un système d'axes orthonormés $(Ox_1x_2x_3)$ donné.

Déterminer les composantes du tenseur des contraintes dans le système d'axes $(Ox_1x_2x_3)$.

On exprimera d'abord le tenseur dans un système d'axes où l'un des axes, Ox'_1 par exemple, est parallèle à $\mathbf{n}$ puis on effectuera le changement d'axes.

Exercice 11.2

On considère un tenseur des contraintes qui, dans un système d'axes orthonormés $(Ox_1x_2x_3)$, s'exprime sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer les modules T_ν et τ des contraintes respectivement normale et de cisaillement auxquelles est soumise une surface normale au vecteur unitaire $\mathbf{n}$ de cosinus directeurs n_1, n_2, n_3 .
- 2) Pour quelles directions du vecteur $\mathbf{n}$ la contrainte de cisaillement est-elle maximale ?

Exercice 11.3

Soit un tenseur de cisaillement pur représenté dans un système d'axes orthonormés $(Ox_1x_2x_3)$ par :

$$\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la forme de ce tenseur dans un système d'axes déduit de $(Ox_1x_2x_3)$ par une rotation de 45° autour de Ox_3 .

Exercice 11.4

Le tenseur des contraintes $[T]$ en un point M d'un matériau est donné dans un système d'axes orthonormés $(Ox_1x_2x_3)$, par :

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{pmatrix} 10^7 \text{ N m}^{-2}.$$

- 1) Déterminer les contraintes principales et leurs directions.
- 2) Retrouver ces résultats par la méthode du cercle de Mohr.
- 3) Calculer la contrainte T s'exerçant sur une petite surface, centrée en M et dont la normale a pour cosinus directeurs $\sqrt{3}/2$, $1/2$ et 0 . La décomposer en contrainte normale et contrainte de cisaillement.

$x_3 = x_3.$

Cette opération laisse la forme du tenseur inchangée.

20.9 Chapitre 11

Exercice 11.1

Dans un système d'axes $(Ox'_1x'_2x'_3)$ où Ox'_1 est parallèle à $\mathbf{n}$, le tenseur $[T]$ a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le système d'axes $(Ox_1x_2x_3)$, les composantes T_{ij} du tenseur des contraintes sont données par $T_{ij} = a_{ik}a_{jl}T'_{kl} = a_{i1}a_{j1}T$ puisque le seul terme T'_{ij} non nul est $T'_{11} = T$. Seules apparaissent les composantes a_{i1} de la matrice de passage du système $(Ox'_1x'_2x'_3)$ au système $(Ox_1x_2x_3)$ c'est-à-dire les composantes n_1, n_2, n_3 du vecteur $\mathbf{n}$.

On obtient $T_{ij} = n_i n_j T$, soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} T.$$

Exercice 11.2

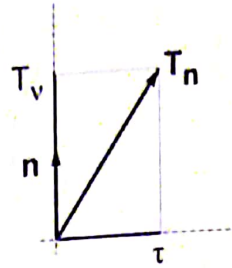
1) $\mathbf{T}_n = [T]\mathbf{n}$. Ici seul $T_{33} \neq 0$ et $(\mathbf{T}_n)_3 = n_3 T$ et $(\mathbf{T}_n)_2 = (\mathbf{T}_n)_1 = 0$.

$$T_\nu = \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{n} = n_3^2 T.$$

La composante de cisaillement est la projection de $\mathbf{T}_n$ sur la surface. Dans le plan formé par $\mathbf{T}_n$ et $\mathbf{n}$ (représenté sur la figure suivante) :

$$\tau^2 = \|\mathbf{T}_n\|^2 - T_\nu^2 = n_3^2 T^2 - n_3^4 T^2 = n_3^2 T^2 (1 - n_3^2),$$

$$\tau = n_3 \sqrt{1 - n_3^2} T.$$



$$2) \frac{\partial \tau}{\partial n_3} = \frac{1 - 2n_3^2}{\sqrt{1 - n_3^2}} T \text{ qui s'annule pour } n_3 = \pm \sqrt{2}/2.$$

$n_3 = \cos \theta$ si θ est l'angle entre $\mathbf{n}$ et Ox_3 . La contrainte de cisaillement est maximale pour les orientations de surface dont la normale décrit un cône d'axe Ox_3 et d'angle au sommet 45° . Elle vaut alors $\tau = T/2$.

Exercice 11.3

La matrice de changement de système d'axes est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le nouveau repère, les composantes T'_{ij} forment la matrice :

$$\begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.4

1) La direction Ox_3 est un axe principal avec pour valeur principale 7,6. Dans le sous-espace (Ox_1, Ox_2) on résout : $\det(\{T_{ij}\} - \lambda E) = 0$.

On obtient $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5,5$. Pour $\lambda_1 = -2$, la direction principale est définie par la relation entre ses composantes :

$x_1 = -1,33x_2$, soit une direction faisant un angle de $-36,9^\circ$ avec l'axe Ox_1 .

Pour $\lambda_2 = 5,5$, la direction principale est perpendiculaire à la direction précédente.

Ainsi, les directions principales se déduisent des directions Ox_1 et Ox_2 par une rotation de $-36,9^\circ$ autour de l'axe Ox_3 .

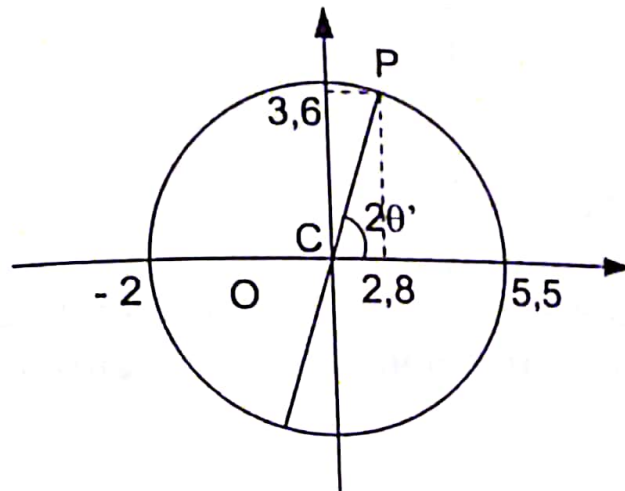
2) La position du centre C du cercle de Mohr est donnée par :

$$x_C = (2,8 + 0,7)/2 = 1,75$$

et l'angle $2\theta'$ est défini par :

tg $2\theta' = 3,6/(2,8 - 1,75)$ soit $2\theta' = 73,74^\circ$.

Ainsi, les directions principales se déduisent des directions Ox_1 et Ox_2 par une rotation de $\theta = -\theta' = -36,9^\circ$ autour de l'axe Ox_3 .



3) Soit $\mathbf{n}$ le vecteur $(\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$, $(\mathbf{T}_n)_i = T_{ij} n_j$ soit :

$$10^7 \begin{pmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 10^7 \begin{pmatrix} 2,4 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \|\mathbf{T}_n\| = 5,1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}.$$

$$\text{La contrainte normale vaut : } T_\nu = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,4 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} 10^7,$$

$$\text{soit } T_\nu = 4,3 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}.$$

$$\text{La contrainte de cisaillement vaut : } \tau = \sqrt{\|\mathbf{T}_n\|^2 - T_\nu^2} = 2,7 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}.$$