

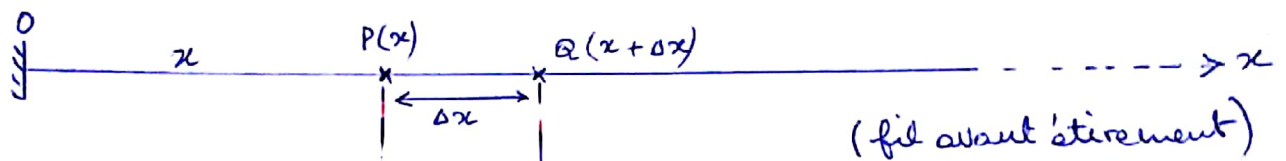
Chapitre 3

Tenseur des déformations

I. Déformation à une dimension.

- On considère un fil extensible supposé fixé à son origine 0.

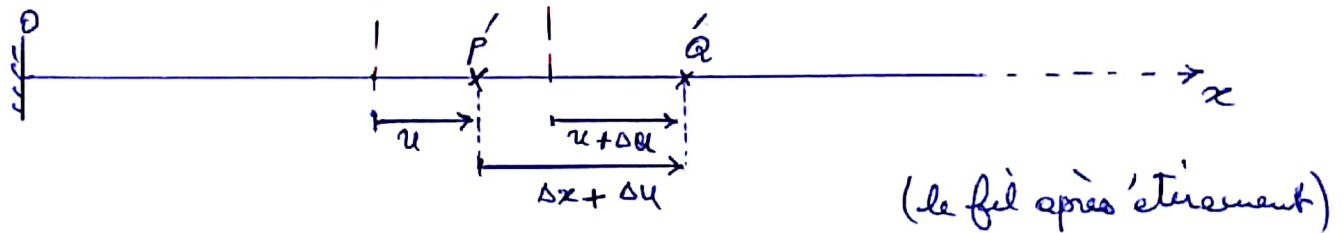
Soient 2 points P et Q du fil très proches l'un de l'autre tel que :



$$OP = x$$

$$OQ = x + \Delta x \quad (PQ = \Delta x)$$

- Si on étire le fil, alors le point P passe au point P' et Q passe au point Q'.



$$\text{donc on pose : } \begin{cases} OP' = x + u \\ \text{et} \\ OQ' = x + \Delta x + u + \Delta u \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \text{avant déformation on a } PQ = \Delta x \\ \text{et après déformation on a } P'Q' = \Delta x + \Delta u \end{cases}$$

- Par définition, la déformation finie est égale à :

$$\boxed{\frac{\text{augmentation de la longueur}}{\text{longueur initiale}} = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\Delta u}{\Delta x}}$$

Rques : Dans l'étude de la déformation, on ne s'intéresse pas au déplacement réel des points, mais plutôt à leurs déplacements relatifs l'un par rapport à l'autre.

- Par définition, la déformation e au point $P(x)$ est donnée par l'expression

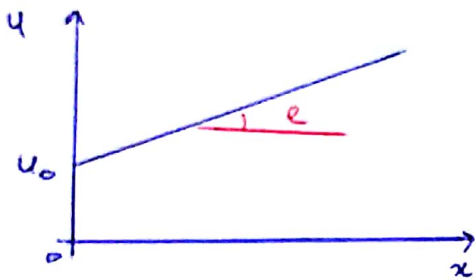
$$e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

c'est sans dimension
 $e \ll 1$

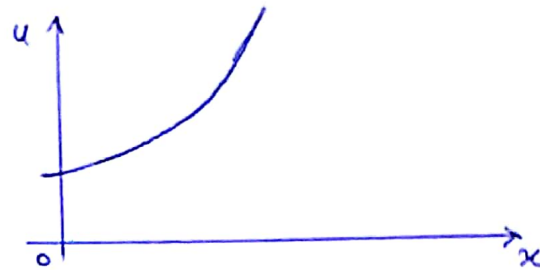
On voit que la déformation e représente la pente de la courbe $u(x)$.

* si $e = \text{cte}$ alors on dit que la déformation est homogène. Par conséquent : $u(x) = e \cdot x + u_0$

où u_0 : donne le déplacement du point initialement à l'origine.



a) Éirement homogène



b) Éirement non homogène

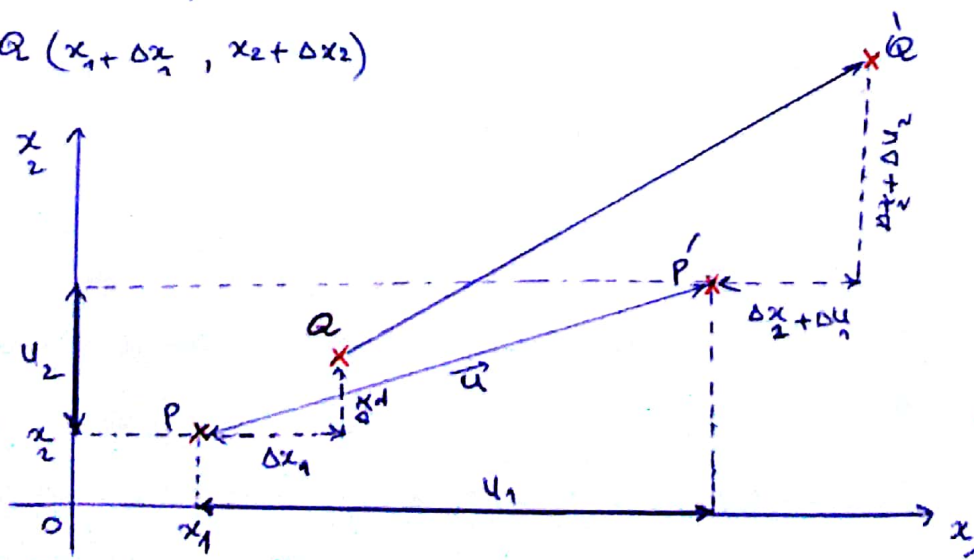
* si e est fonction de la position du point, c'est-à-dire $e = f(x)$, alors on dit que la déformation est inhomogène, par conséquent

$$u(x) = \int f(x) dx + u_0$$

II. Déformation bidimensionnelle (dans le plan).

* Avant la déformation, les 2 points P et Q sont définis par :

$$\begin{cases} P(x_1, x_2) \\ \text{et } Q(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \end{cases}$$



$\vec{u}$ est le vecteur déplacement du point P

e

* Après déformation, P devient P' et Q devient Q' tel que :

$$\begin{cases} P' (x_1 + u_1, x_2 + u_2) \\ \text{et } Q' (x_1 + \Delta x_1 + u_1 + \Delta u_1, x_2 + \Delta x_2 + u_2 + \Delta u_2) \end{cases}$$

Le vecteur déplacement $\vec{u} (u_1, u_2)$ du point $P(x_1, x_2)$ a pour composantes

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ \text{et } u_2 = u_2(x_1, x_2) \end{cases} \rightarrow \text{fonctions des coordonnées du point.}$$

Par conséquent, on peut écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2 \\ \text{et} \quad \Delta u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \end{aligned}$$

- On remarque que les 2 équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \text{ (indice libre)} \\ j = 1 \rightarrow 2 \text{ (indice muet)} \end{array}$$

on pose : $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij}$ 4 composantes de la déformation à deux dimensions.

$$\begin{aligned} \text{on a donc : } e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ e_{21} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Remarque : les composantes $\begin{cases} e_{ij} \text{ sont sans dimension} \\ e_{ij} \ll 1 \end{cases}$

→ Pour trouver le sens géométrique à chacun des 4 composantes e_{ij} , on considère un point Q très proche du point P tel que : $\vec{PQ} = \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$
- Après déformation, les points P et Q (avant déformation) deviennent P' et Q' tel que : $\vec{P'Q'} = \Delta \vec{x} + \Delta \vec{u} (= \Delta \vec{x}_i + \Delta u_i)$

$\vec{\Delta u}$ (ou $\vec{\Delta u}_i$) représente la différence dans le déplacement entre les 2 points P et Q qui sont, avant déformation séparés par la distance $\vec{PQ} = \vec{\Delta x} (= \vec{\Delta x}_i)$.

a) e_{11} et e_{21} :

- Soit le cas où $\vec{PQ} = \vec{\Delta x}_1 = \Delta x_1 \vec{e}_1$ (parallèle à ox_1)

Le vecteur $\vec{\Delta u}$ aura pour composantes :
$$\begin{cases} \Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 = e_{11} \Delta x_1 \\ \Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 = e_{21} \Delta x_1 \end{cases}$$

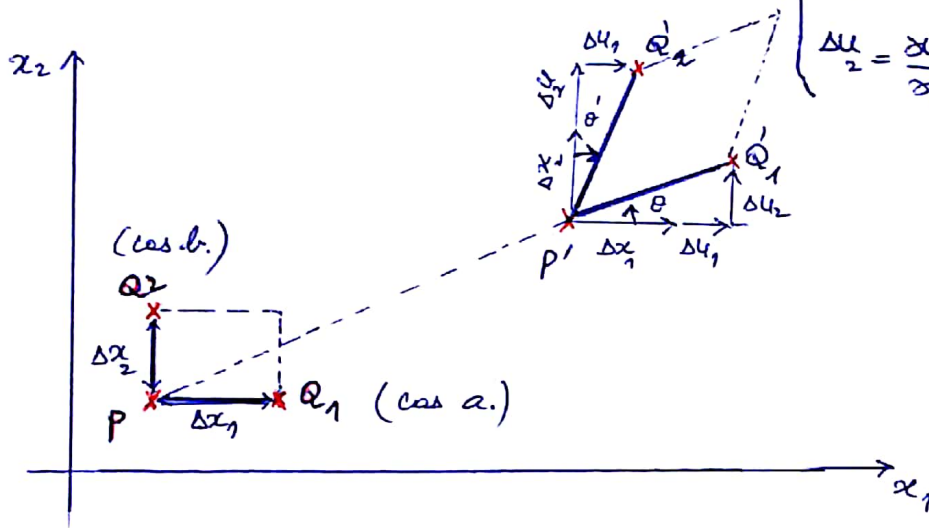


Fig : signification géométrique des composantes d'une déformation bidimensionnelle.

- Cette figure précise les significations de Δu_1 et Δu_2 ;

$PQ = \Delta x_1$ avant déformation et $PQ_1 \begin{cases} \Delta x_1 + \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{cases}$ après déformation.

* e_{11} mesure l'allongement par unité de longueur de PQ_1 dans la direction ox_1 , car :

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

* e_{21} mesure la rotation de PQ_1 (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), car l'angle de rotation θ est donné par :

$$\tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1}$$

nous ne considérons que de petits déplacements ; u_1 et u_2 sont petits

par rapport à x_1 ; par suite, Δu_1 et Δu_2 sont petits par rapport à Δx_1 :

$$\theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = e_{21}$$

angle de rotation au cours de la déformation.

b) e_{22} et e_{12}

- Soit le cas où $\overrightarrow{PQ_2} = \Delta x_2 \vec{e}_2$ (parallèle à ox_2)

Le vecteur $\Delta \vec{u}$ aura pour composantes
$$\begin{cases} \Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2 \\ \text{et} \\ \Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_{22} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} e_{12} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

* $e_{22} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2}$ représente l'allongement par unité de longueur de PQ_2 suivant la direction ox_2

* De même $\theta' \approx \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} = e_{12}$ l'angle de rotation (faible) qui mène PQ_2 en $P'Q'_2$ dans le sens des aiguilles d'une montre.

II.1. Décomposition du tenseur des gradients de déplacements en rotation et déformation

- On considère pure (sans déformation) d'une surface rigide (lame) autour de l'axe qui est perpendiculaire à cette surface d'un angle Φ (petit) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

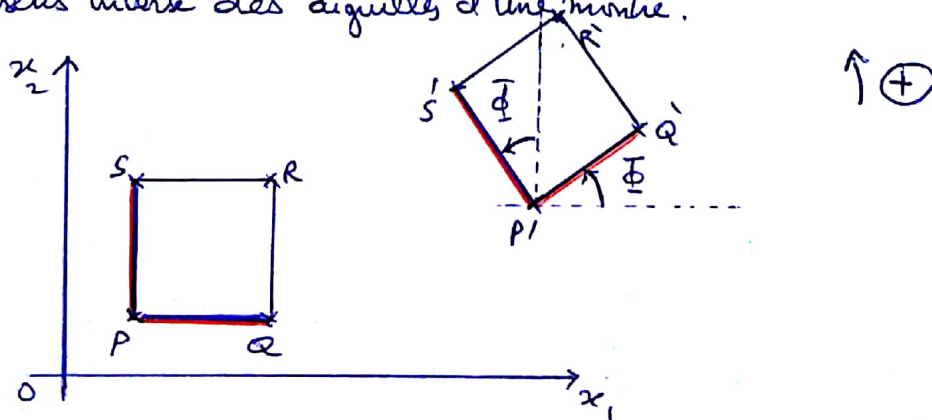


Fig: Rotation d'ensemble dans son plan (autour de l'axe $\perp$ à sa surface) d'une lame indéformable.

- Dans ce cas, les côtes PQ et PS ne subissent pas de déformation proprement dite mais ils subissent une rotation d'angle Φ (supposé dans le sens géométrique positif). Mais les composantes de la déformation bidimensionnelle e_{ij} ne disparaissent pas toutes dans ce cas et d'après la signification géométrique des e_{ij} , on a :

$$\begin{cases} e_{11} = 0 & \text{et} & e_{22} = 0 \\ e_{12} = -\phi & \text{et} & e_{21} = \phi \end{cases} \Leftrightarrow [e_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix}$$

Conséquence :

* Pour éliminer cette difficulté, on est amené à enlever (soustraire) dans $[e_{ij}]$ la partie qui correspond à une rotation pure du solide (à 1 ou 2 ou à 3 dimensions).
 (la lame ne se déforme pas, et les e_{ij} ne s'annulent pas)

* On montre que tout tenseur d'ordre 2 peut s'écrire sous la forme de la somme de 2 tenseurs : un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique.

* Décomposons $[e_{ij}]$ de cette manière, et posons :

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij}$$

partie symétrique $\swarrow$ $\searrow$ partie antisymétrique

$$\text{avec : } \begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}) \\ \text{et} \quad \bar{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji}) \end{cases}$$

* La partie symétrique est définie par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}) = \frac{1}{2} (e_{ji} + e_{ij}) = \varepsilon_{ji}$$

$$\text{on a : } [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) \\ \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) & e_{22} \end{bmatrix}$$

→ Les composantes diagonales ε_{11} et ε_{22} représentent respectivement les allongements par unité de longueur parallèlement aux directions (Ox_1) et (Ox_2) .

→ ε_{12} représente la déformation (ou composante de déformation) de cisaillement.

⊗ La partie antisymétrique correspond à une rotation pure et est définie par :

$$\bar{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{ji} - \varepsilon_{ij}) = -\bar{\omega}_{ji}$$

on a : $\bar{\omega}_{12} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21})$

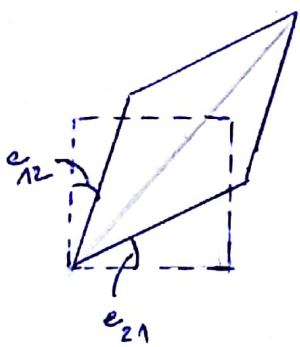
et $\bar{\omega}_{21} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{12}) = -\bar{\omega}_{12}$

* On peut donc résumer la déformation comme suit :

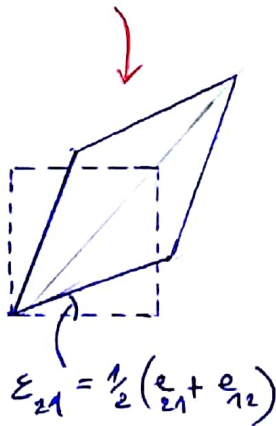
$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12} + \bar{\omega}_{12} \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \varepsilon_{21} &= \varepsilon_{21} + \bar{\omega}_{21} \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{12}) \end{aligned}$
--	--

↓
Déformation pure
(de cisaillement)

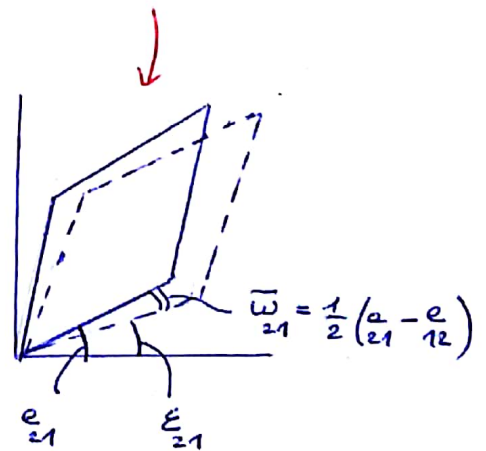
↓
Rotation pure



=



+



II.2. Cas de la déformation bidimensionnelle homogène

- Pour une déformation homogène, toutes les composantes ε_{ij} sont constantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow \boxed{u_i = \varepsilon_{ij} x_j + (u_0)_i} \quad i, j = 1, 2 \begin{cases} i: \text{libre} \\ j: \text{mué} \end{cases}$$

u_i : la composante du vecteur déplacement suivant l'axe i .

$(u_0)_i$: est le déplacement du point initialement à l'origine.

En conséquence, durant la déformation homogène :

- * une ligne droite reste une ligne droite ;
- * des droites parallèles restent parallèles ;
- * une ellipse se transforme en une autre ellipse ;
- * un cercle devient une ellipse.

III. Déformation tridimensionnelle (à trois dimensions).

- La méthode utilisée pour caractériser la déformation d'un corps solide à trois dimensions (ex: un cristal) est très analogue aux cas de la déformation bidimensionnelle.

- L'ensemble des composantes de la déformation e_{ij} est formé de 9 grandeurs : $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ où $i, j = 1, 2, 3$

Les 9 composantes e_{ij} forment le tenseur de déformation de rang 2.

* e_{11}, e_{22}, e_{33} : représentent les allongements par unité de longueur parallèlement à ox_1, ox_2, ox_3 , respectivement ;

* e_{12} : est la rotation vers ox_1 d'un élément linéaire du solide parallèle à ox_2 , cette rotation étant faite autour de ox_3 ;

* e_{31} : est la rotation vers ox_3 d'un élément linéaire du solide parallèle à ox_1 , cette rotation étant faite autour de ox_2 ;

* les autres e_{ij} ont des significations analogues.

(a) - Par contre, si le corps solide subit une simple rotation (pure) sans déformation, alors le tenseur $[e_{ij}]$ est antisymétrique.

* Les 3 composantes indépendantes de $\bar{w}_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji})$ représentent les composantes du vecteur axial qui définit la rotation :

$$[\bar{w}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2(e_{12} - e_{21}) & 1/2(e_{13} - e_{31}) \\ -1/2(e_{12} - e_{21}) & 0 & 1/2(e_{23} - e_{32}) \\ -1/2(e_{13} - e_{31}) & -1/2(e_{23} - e_{32}) & 0 \end{bmatrix}$$

(b) - Le tenseur de déformation (pure) $[\epsilon_{ij}]$ est défini comme étant la partie symétrique du tenseur de déformation $[e_{ij}]$.

* Par rapport à des axes quelconques :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \Rightarrow [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) & \frac{1}{2}(e_{13} + e_{31}) \\ \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) & e_{22} & \frac{1}{2}(e_{23} + e_{32}) \\ \frac{1}{2}(e_{13} + e_{31}) & \frac{1}{2}(e_{23} + e_{32}) & e_{33} \end{bmatrix}$$

où : ϵ_{ii} : déformation de traction (ou extension)

$\epsilon_{ij} (i \neq j)$: déformation de cisaillement.

III. 1. Déformations homogènes à trois dimensions.

- Comme dans le cas bidimensionnel, toutes les composantes e_{ij} sont constantes si la déformation est homogène. Nous pouvons écrire :

$$u_i = e_{ij} x_j + (u_0)_i \quad \begin{matrix} (i, j = 1, 2, 3) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{libre} \quad \text{muet} \end{matrix}$$

$(u_0)_i$: étant le déplacement de l'origine.

* Comme : $e_{ij} = \epsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij} \Rightarrow u_i = (\epsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij})x_j + (u_0)_i$

$\Rightarrow \bar{u}_i = \epsilon_{ij} x_j$: déplacement dû à la déformation (pure).

(*) Par rapport aux axes principaux

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad \text{où } \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 : \text{déformations principales}$$

- Donc, par rapport aux axes principaux, les composantes de cisaillement disparaissent.

- On peut donner la signification géométrique des déformations principales $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, en choisissant un cube de volume unité (longueur des côtés égale à 1) dont les arêtes sont parallèles aux axes principaux. (Fig.)

- Pendant la déformation, les arêtes (côtés) restent perpendiculaires et leurs longueurs deviennent :

$$(1 + \varepsilon_1), (1 + \varepsilon_2) \text{ et } (1 + \varepsilon_3)$$

où ε_1 et ε_2 et $\varepsilon_3 \ll 1$.

* Le volume du cube est donné par :

$$V_{av} = 1^3 \rightarrow V_{ap} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$$

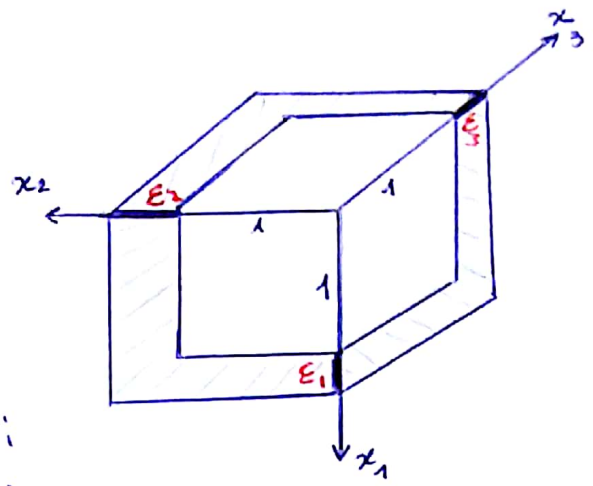


Fig: Déformation d'un cube unit

- Donc la variation du volume Δ du cube unité, qui représente ce qu'on appelle Dilatation, est égale à :

$$\Delta = V_{ap} - V_{av} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad / \text{ axes principaux.}$$

⊕ Par rapport à des axes quelconques, la dilatation est :

$$\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}$$

$\Delta = \varepsilon_{ii}$ est un invariant.

III.2. Quadrique des déformation (Ellipsoïde des déformation)

- La quadrique des déformation a pour équation :

$$\varepsilon_{ij} x_i x_j = 1$$

elle est identique à la quadrique : $e_{ij} x_i x_j = 1$.

* La QR de $[\varepsilon_{ij}]$ est seulement la partie symétrique.

- Soit $\vec{l}$ un vecteur de module unité $\|\vec{l}\| = 1$, considéré dans le solide avant déformation.

Après déformation, $\vec{l}$ change en direction et en module. Le vecteur déplacement dû à la déformation est : $\vec{u} = [\varepsilon_{ij}] \vec{l}$.

C'est-à-dire, les composantes de ce déplacement sont : $\bar{u}_i = \varepsilon_{ij} l_j$

$$\Delta = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1$$

$$= (1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2))(1 + \varepsilon_3) - 1$$

$$= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 1$$

$$\boxed{\Delta V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}$$

Développement limité de Taylor :

$$\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \text{(au voisinage)} \end{array} \quad (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

P : point d'intersection de la direction $\vec{l}$ avec la QR.
 π : étant le plan tangent à la QR au point P.

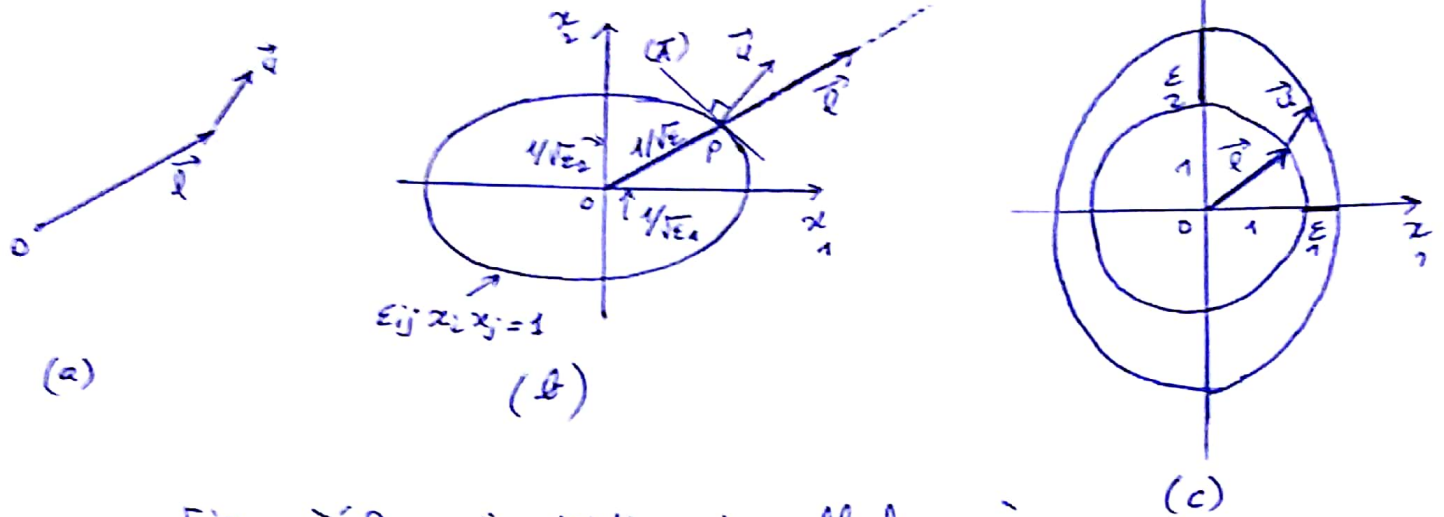


Fig: Déformation tridimensionnelle homogène

- L'extrémité de $\vec{l}$, vecteur unitaire tracé avant déformation subit un déplacement $\vec{u}$.
- la direction de $\vec{u}$ s'obtient à partir de $\vec{l}$ en utilisant la propriété du rayon normal de la quadrique des déformations. $\vec{u}$ est normal à la quadrique en P. L'allongement ϵ dans la direction $\vec{l}$ est donné par : $OP = 1/\sqrt{\epsilon}$.
- Déformation correspondante d'une sphère de rayon unité.

- La déformation ϵ (ou allongement par unité de longueur) ^{dans la direction $\vec{l}$} est égale à la composante du vecteur déplacement $\vec{u}$ dans la direction du vecteur $\vec{l}$.

Donc : $\epsilon = \vec{u}_i l_i$

comme : $\vec{u}_i = \epsilon_{ij} l_j$, alors : $\boxed{\epsilon = \epsilon_{ij} l_i l_j}$ / axes qqes

* Par rapport aux axes principaux : la déformation dans la direction $\vec{l}$ est égale à : $\boxed{\epsilon = \epsilon_1 l_1^2 + \epsilon_2 l_2^2 + \epsilon_3 l_3^2}$

- La figure (c) représente la déformation subie par une sphère de rayon unité.

→ Avant déformation : l'équation de la sphère est :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

→ Après déformation: équation de la sphère déformée ($x'_i = x_i(1+\epsilon_i)$):

$$\frac{x_1'^2}{(1+\epsilon_1)^2} + \frac{x_2'^2}{(1+\epsilon_2)^2} + \frac{x_3'^2}{(1+\epsilon_3)^2} = 1$$

c'est l'équation de l'ellipsoïde de déformation (ellipsoïde des dilatations).

* La surface (sphère déformée) est toujours un ellipsoïde: $\frac{x_i'^2}{(1+\epsilon_i)^2} = 1$

Exemples de déformation:

* Déformation plane: cas où une déformation principale est nulle.

* Cisaillement pur: est un cas particulier de déformation plane. un cisaillement pur autour de l'axe (ox_3), (une déformation dans le plan ox_1x_2) lui correspond le tenseur de déformation:

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* Elongation simple: exprimé dans un système d'axes donné ($ox_1x_2x_3$) ce tenseur ne comporte qu'un seul terme non nul situé sur la diagonale, soit par exemple: $[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- un petit parallélépipède rectangle dont les arêtes sont parallèles aux axes et de longueurs $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ reste un parallélépipède rectangle dont seule l'arête parallèle à ox_3 a subi un allongement égal à ϵ .

IV. Dilatation Thermique.

- Considérons une tige de matériau isotrope de longueur l_0 à la température T_0 et soumettons-la à une variation de température uniforme ΔT . Sa longueur devient l tel que:

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique linéaire du matériau.

- De façon analogue, un solide soumis à une élévation

de température uniforme ΔT se déforme (déformation homogène) tel que : $\boxed{\epsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T}$, $\forall (i,j)$
 α_{ij} s'exprime en $(^{\circ}\text{C})^{-1}$

où α_{ij} sont des constantes (au nombre de 9) et représentent ce que l'on appelle "les coefficients de dilatation thermique".

$[\alpha_{ij}]$ = tenseur de rang 2 symétrique.

axes qqes : $[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ et axes principaux : $[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: coefficients principaux de la dilatation thermique.

* Sous l'effet de ΔT , une sphère prise dans le solide devient un ellipsoïde avec les $1/2$ longueurs des axes proportionnelles à $(1 + \alpha_1 \Delta T)$, $(1 + \alpha_2 \Delta T)$, $(1 + \alpha_3 \Delta T)$. (on rappelle que : $\alpha_1 \Delta T = \epsilon_1$, $\alpha_2 \Delta T = \epsilon_2$, $\alpha_3 \Delta T = \epsilon_3$).

* Equation de la QR de la dilatation thermique : $\alpha_{ij} x_i x_j = 1$
 (par rapport à des axes qqes).

par rapport aux axes principaux, l'équation devient : $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 1$

* Le coefficient de dilatation volumique est : $\boxed{\alpha_{ii} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$, c'est un invariant.

* Peu de matériaux solides sont caractérisés par certains coefficients de dilatation négatifs.

Exemples :
 (unité = $10^{-6} ^{\circ}\text{C}^{-1}$)

cristal	système cristallin	Température	α_1	α_2	α_3
Aragonite	orthorhombique	40°C	35	17	10
Zinc	Hexagonal	60°K	-2	-2	55
		300°K	13	13	64
quartz	Rhomboédrique	25°C	13	13	8
calcite	"	40°C	-5,6	-5,6	25
Rutile	quadratique	40°C	7,1	7,1	9,2
Diamant	cubique	25°C	0,89	0,89	0,89

Rq : La déformation due à la dilatation thermique admet la symétrie cristalline du solide.