

Université de Mohammed seddik Benyahia- Jijel
Département de l' architecture

Résistance des Matériaux RDM I



Résistance des Matériaux -RDM1

Introduction

La résistance des matériaux est une science qui traite les méthodes d'ingénieur employées pour le calcul de résistance, de rigidité et de stabilité des éléments de machines et des ouvrages.

❑ On appelle résistance la capacité d'une structure, et de ses pièces de supporter, sans se détruire, une charge déterminée.

❑ La rigidité est la capacité d'une structure et de ses éléments de s'opposer à l'action déformatrice de charges extérieures (modification de la forme et des dimensions).

Résistance des Matériaux -RDM1

- ❑ La stabilité est la capacité d'une structure et de ses éléments de conserver une forme initiale donnée, correspondant à l'état d'équilibre élastique

L'étude en RDM est une étape parfois nécessaire entre la conception et la réalisation d'une pièce. Elle permet

- De justifier son dimensionnement
- De déterminer le choix des matériaux
- De limiter son cout
- Elle permettra également d'évaluer ses déformations éventuelles, et donc sa durée de vie

Résistance des Matériaux -RDM1

2 grands types de problèmes :

□ **Hypothèses:** les **forces extérieures appliquées connues**

□ **Problème:** trouver **les dimensions à donner au corps** pour que les efforts internes ou les déformations ne dépassent pas une limite fixée d'avance

➤ problème de ***dimensionnement***

Résistance des Matériaux -RDM1

Hypothèses: les forces extérieures et les dimensions du corps connues

Problème: trouver les efforts intérieurs ou les déformations résultant de l'application de ces forces extérieures, et vérifier que ces efforts (ou ces déformations) sont bien inférieurs à une limite fixée d'avance

➤ problème de *vérification*

Champ d'application de la RDM

➤ Calcul de structures

- Bâtiments, charpentes, structures métalliques...
- Ouvrages de génie civil...
- Squelette structural de systèmes divers

➤ Calcul de pièces mécaniques

Résistance des Matériaux -RDM1

Plan du cours

- I. Rappels de statique
- II. Caractéristiques géométriques des sections
- III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux
- IV. Caractéristiques mécaniques des matériaux
- V. Sollicitations simples
 - ☐ Traction – Compression
 - ☐ Flexion simple
 - ☐ Cisaillement simple
 - ☐ Torsion pure
 - ☐ Flexion pure
- VI. Sollicitations composées

Résistance des Matériaux -RDM1

Chapitre I Rappels de Statique



Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

Objectif:

détermination des efforts qui s'exercent sur un système matériel indéformable au repos.

Par système matériel, on entend :

- ❑ Un ensemble de points matériels de masse et de volume infiniment petits, ou de solides ayant des dimensions petites vis à vis du milieu étudié.
- ❑ Un solide qui est un système matériel possédant une forme propre

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

Le système matériel est considéré comme indéformable si, quels que soient A et B deux points appartenant au système, la distance AB reste constante

I.1 Notions de force et de moment

A) Force

Une force est un phénomène qui :

- soit modifie le mouvement de l'objet qui la subit,
- soit déforme l'objet sur lequel elle agit.

On distingue deux catégories de forces :

- Les forces de contact (concentrée, linéaire, surfacique),
- Les forces à distance (attraction magnétique, terrestre...).

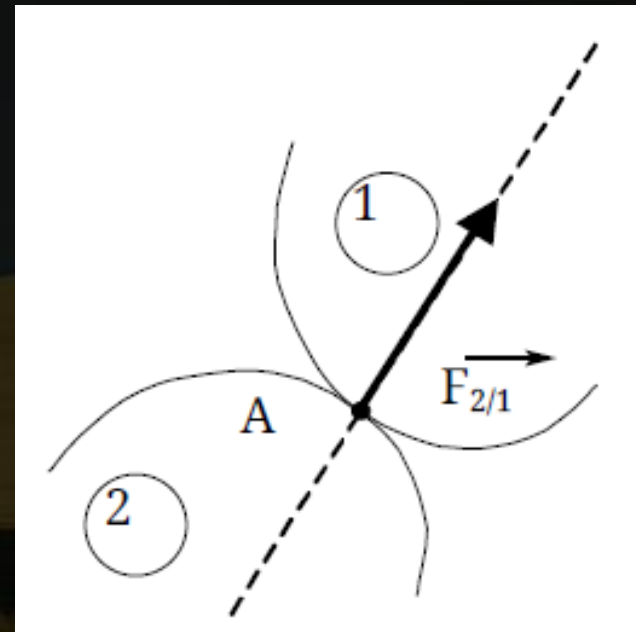
Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

Une force est modélisée par un vecteur et est caractérisée par 4 paramètres :

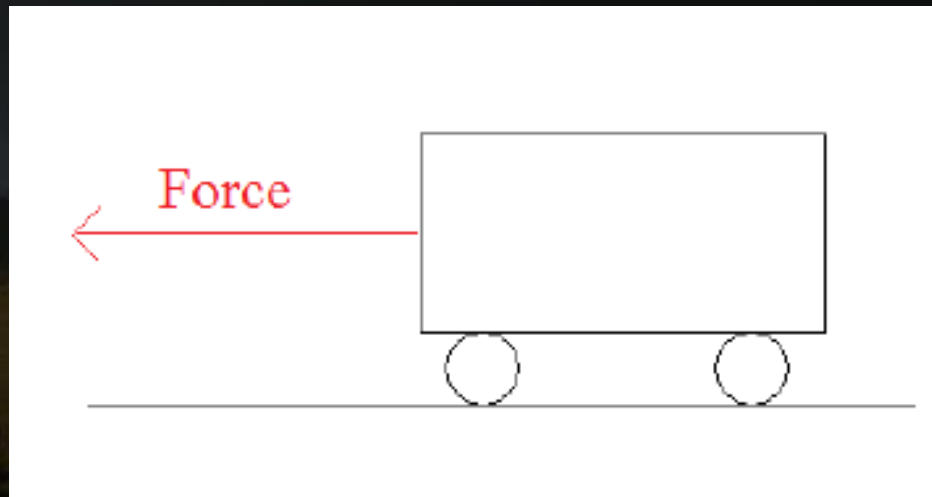
- ☐ un point d'application
- ☐ une direction,
- ☐ un sens,
- ☐ une intensité,

L'unité utilisée est le Newton (N).



$\overrightarrow{F_{2/1}}$ représente l'action mécanique exercée en A par le solide 2 sur le solide 1

- Exemple



Force de traction exercée sur un wagonnet

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

B) Moment

Le moment d'un vecteur par rapport à un point est défini par

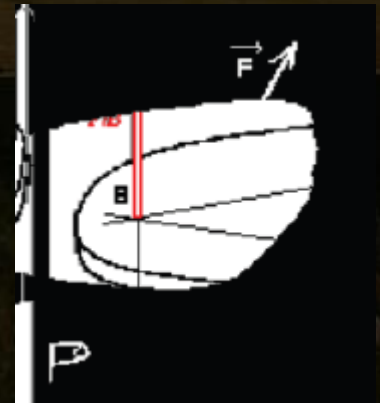
$$M_{\vec{F}/B} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Algébriquement, le moment de la force par rapport au point B vaut :

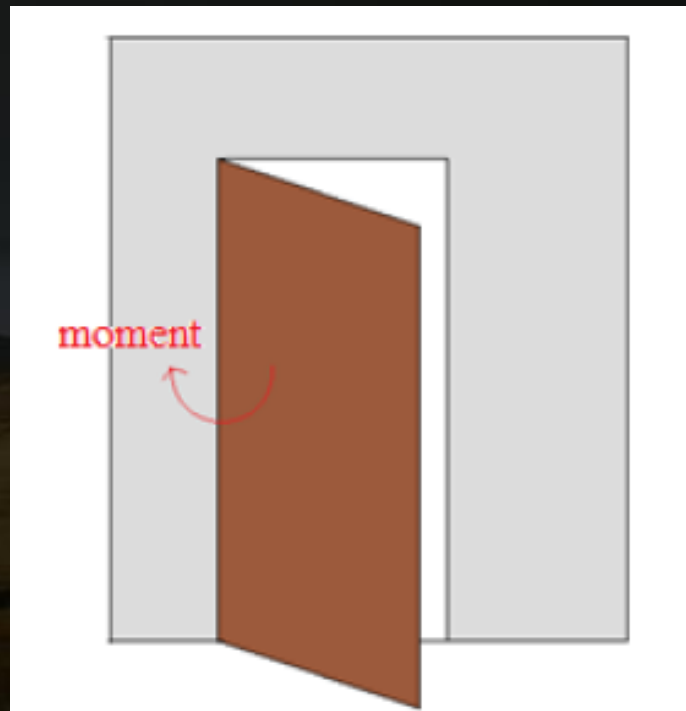
$$M_{\vec{F}/B} = Fd$$

Avec $d = BA \cdot \sin\theta$

L'unité utilisée est le Newton-mètre (N.m).



Exemple



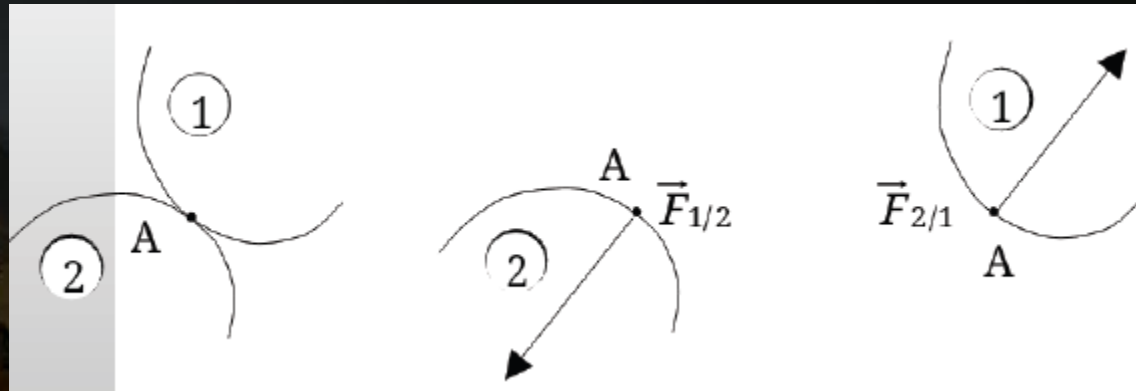
Force sur une poignée de porte excentrée par rapport à l'axe de rotation induisant un moment

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

I.3 Principe des actions mutuelles

Soient deux solides 1 et 2 en contact au point A :



Si le solide 1 exerce en A une action sur le solide 2, réciproquement le solide 2 exerce une action en A sur le solide 1, égale et directement opposée (principe de l'action et de la réaction).

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

I.4 Principe fondamental de la statique

Un solide indéformable, sollicité par un système de forces extérieures, est en équilibre si et seulement si :

1. la résultante générale de ces forces est **nulle**,
2. le moment résultant de ces forces par rapport à un point M quelconque est **nul**.

$$(S) \text{ en équilibre } \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum M_{\vec{F}_{ext}/M} = \vec{0} \end{cases}$$

NB: le choix du point M est uniquement guidé par des raisons de commodité.

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

Equations d'équilibre			
		Système 3D (Oxyz)	Système 2D (Oxy)
R=0		$\Sigma \text{ proj. sur Ox des } F_{\text{ext}}=0$	$\Sigma \text{ proj. sur Ox des } F_{\text{ext}}=0$
		$\Sigma \text{ proj. sur Oy des } F_{\text{ext}}=0$	$\Sigma \text{ proj. sur Oy des } F_{\text{ext}}=0$
		$\Sigma \text{ proj. sur Oz des } F_{\text{ext}}=0$	
$M_{R/M}=0$		$\Sigma \text{ moments/ Ox des } F_{\text{ext}}=0$	
		$\Sigma \text{ moments/ Oy des } F_{\text{ext}}=0$	
		$\Sigma \text{ moments/ Oz des } F_{\text{ext}}=0$	$\Sigma \text{ moments/ Oz des } F_{\text{ext}}=0$

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

I.5 Les actions de liaison

Dans le plan Oxy , un point a trois degrés de liberté :

- 2 degrés de liberté en translation suivant les axes Ox et Oy ,
- 1 degré de liberté en rotation autour de l'axe Oz .

Toute liaison supprimera 1, 2 ou 3 degrés de liberté. Nous allons présenter les trois principaux types de liaisons dans le plan Oxy

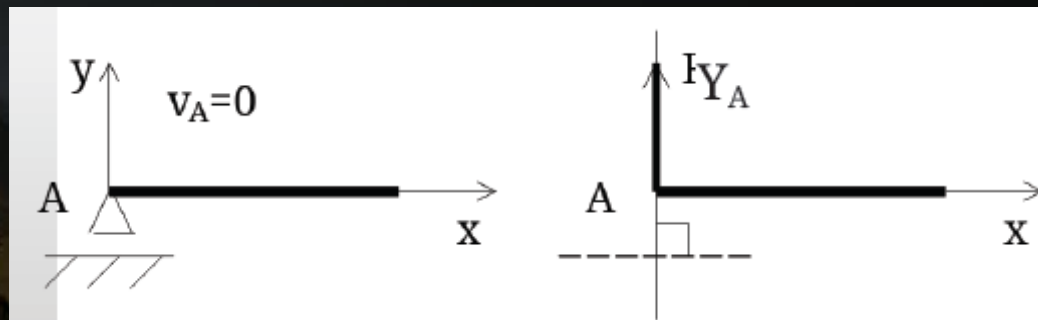
L'appui simple

Un système matériel $S1$ est en appui simple sur un système matériel $S2$ si le contact peut être supposé ponctuel ou suivant une arête, et a lieu sans frottement.

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

L'appui simple impose un seul blocage en translation dans la direction normale à la surface d'appui. Il fait ainsi naître une force de liaison dans cette direction.



La force de liaison a les caractéristiques suivantes :

- Point d'application A ,
- Droite d'action perpendiculaire à la surface d'appui,
- Composante Y_A inconnue.

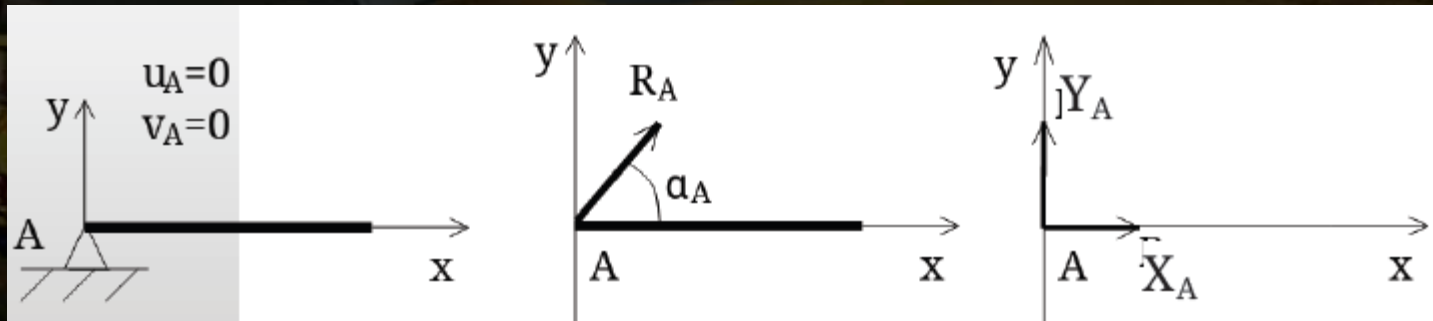
L'appui simple introduit donc 1 inconnue.

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

L'appui double

Elle impose deux blocages en translation suivant les axes Ox et Oy , et la rotation reste libre. L'articulation fait donc naître les deux composantes de la force de liaison.



Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

La force de liaison a les caractéristiques suivantes :

- Point d'application A,
- Composantes X_A et Y_A inconnues.

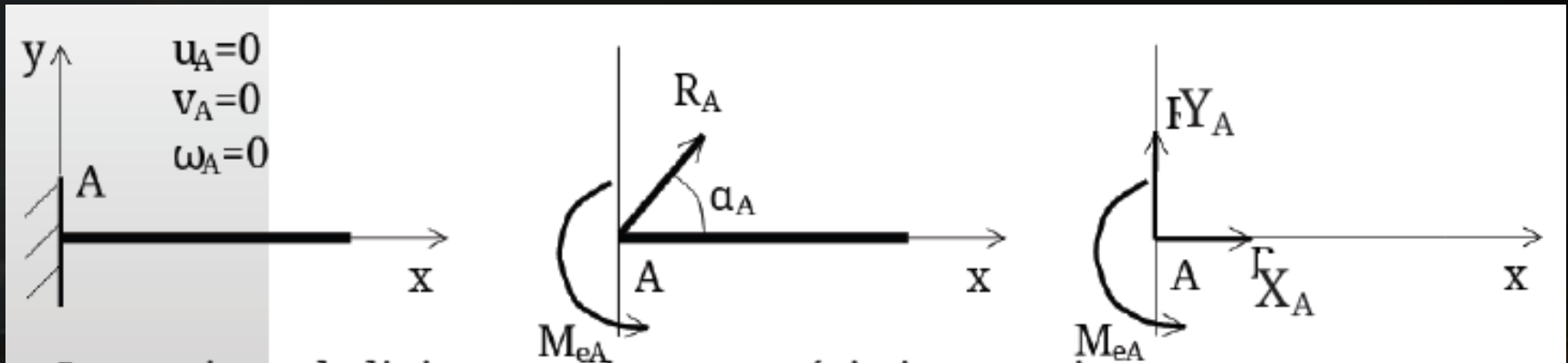
L'articulation introduit donc 2 inconnues (X_A et Y_A).

L'encastrement

Il impose trois blocages (les deux translations et la rotation). Les deux blocages en translation font naître les deux composantes de la force de liaison. Le blocage en rotation fait naître le moment d'encastrement.

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique



Les actions de liaison ont les caractéristiques suivantes :

- Point d'application A,
- Composantes X_A et Y_A de la force de liaison inconnues,
- Moment d'encastrement M_{eA} inconnu.

L'encastrement introduit donc 3 inconnues (X_A , Y_A et M_{eA}).

Résistance des Matériaux-RDM1

I. Rappels de Statique

I.6 Isostaticité – Hyperstaticité

Dans le cas plan, on a au plus trois équations d'équilibre.

1. Si les actions de liaison introduisent 3 inconnues, le problème est statiquement déterminé (possible, n'admettant qu'une solution) ou **isostatique**.

2. Si les actions de liaison introduisent plus de 3 inconnues, le problème est statiquement indéterminé ou **hyperstatique**. Il faudra introduire de nouvelles équations issues de la RDM.

Si les actions de liaison introduisent moins de 3 inconnues, le problème est **hypostatique**. La structure est alors appelée **mécanisme** et n'est pas stable.

Résistance des Matériaux -RDM1

Chapitre II Caractéristiques géométriques des sections



Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

Introduction

Ultérieurement, pour calculer les contraintes et les déformations des solides étudiés, nous aurons besoin de savoir déterminer un certain nombre de caractéristiques géométriques des sections planes :

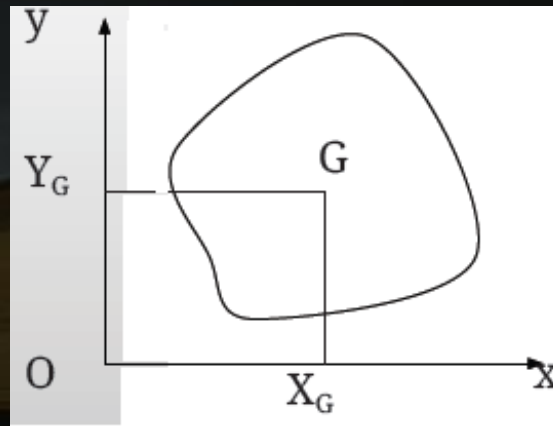
- ☐ Centre de gravité,
- ☐ Moment statique,
- ☐ Moments quadratiques

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

II.1 Centre de gravité

Soit une section plane d'aire S définie dans un repère orthonormé Oxy .



Les coordonnées du centre de gravité G sont définies par :

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

Si la section S peut être décomposée en n sous-sections simples, d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (x_{Gi} et y_{Gi}) alors :

$$X_G = \frac{\iint X dS}{S} \quad , \quad Y_G = \frac{\iint Y dS}{S}$$

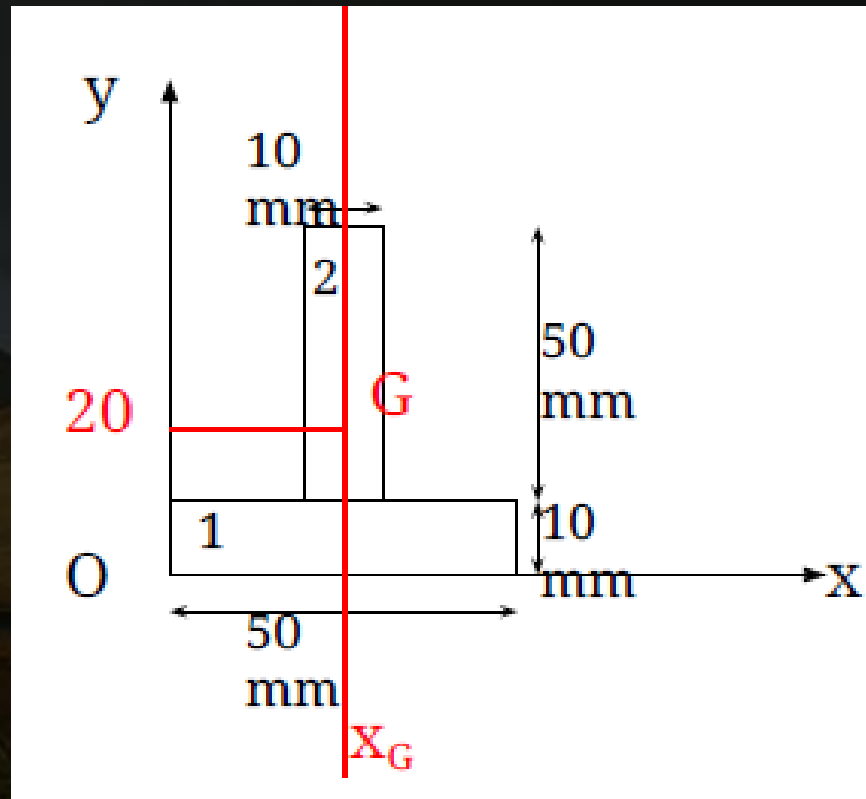
Si la section S peut être décomposée en n sous-sections simples, d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (x_{Gi} et y_{Gi}) alors :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i X_{Gi})}{S} \quad , \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i Y_{Gi})}{S}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

Exemple



Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

II.2 Moment statique

Pour un élément dS , de coordonnées X et Y , le moment statique élémentaire **par rapport à l'axe Ox** est, par définition, la quantité :

$$du_x = YdS$$

Ce qui donne pour l'ensemble de la section :

$$u_x = \iint YdS \text{ soit } u_x = SY_G$$

De même :

$$u_y = \iint XdS \text{ soit } u_y = SX_G$$

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

Remarques :

□ pour tout axe passant par le centre de gravité, le moment statique par rapport à cet axe est nul.

□ si la section S peut être décomposée en n sous sections simples, d'aires connues S_i et de c.d.g connus (x_{Gi} et y_{Gi}) alors :

$$u_X = \sum_{i=1}^n (S_i Y_{Gi})$$

$$u_Y = \sum_{i=1}^n (S_i X_{Gi})$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

II.3 Moments quadratiques

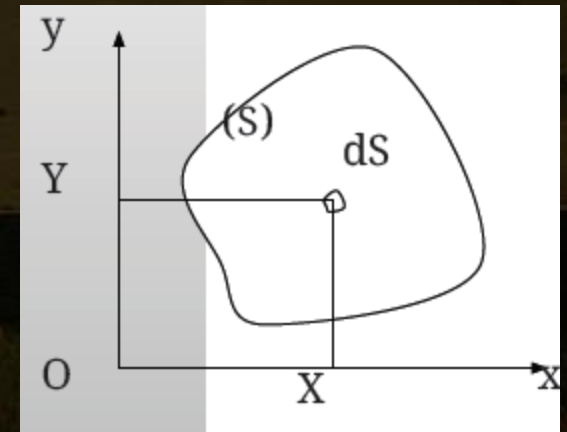
Moment quadratique par rapport à un axe Pour un élément dS , de coordonnées X et Y , le moment quadratique élémentaire par rapport à l'axe Ox est, par définition, la quantité :

$$dI_{Ox} = Y^2 dS$$

Ce qui donne pour l'ensemble de la section :

$$I_{Ox} = \iint Y^2 dS$$

$$I_{Oy} = \iint X^2 dS$$



Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

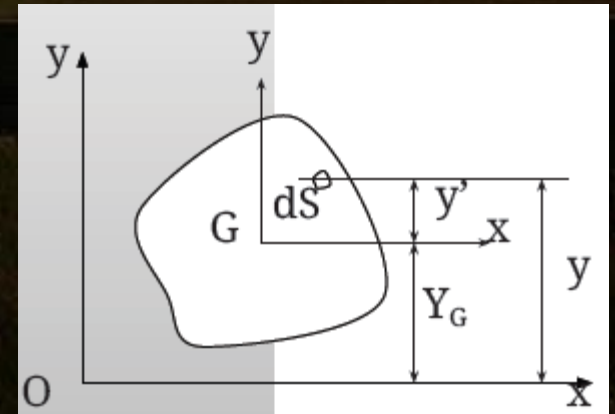
Remarques :

❑ Le moment quadratique est aussi appelé moment d'inertie de la section.

❑ Il est toujours positif

Translation d'axes : Théorème de Huygens

Soit un élément dS de S dans le repère Oxy , et soit le repère Gxy qui passe par le centre de gravité G de S et dont les axes sont parallèles à Ox et Oy .



Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

$$I_{OX} = \iint Y^2 dS \text{ avec } Y = Y_G + Y'$$

$$I_{OX} = \iint (Y_G^2 + 2Y_G Y' + Y'^2) dS$$

Ce qui donne

$$I_{OX} = Y_G^2 \iint dS + 2Y_G \iint \underline{Y' dS} + \iint Y'^2 dS$$

Moment statique /GX=0

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Finalement, on obtient :

$$I_{OX} = I_{GX} + SY_G^2$$

De même

$$I_{OY} = I_{GY} + SX_G^2$$



Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Théorème :

Le moment quadratique par rapport à un axe est égal au moment quadratique par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la surface par le carré de la Distance entre les deux axes.

Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments quadratiques connus I_{Oxi} et I_{Oyi} , alors:

$$I_{OX} = \sum_{i=1}^n I_{Oxi}$$

$$I_{OY} = \sum_{i=1}^n I_{Oyi}$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Remarque :

Généralement, pour le calcul des contraintes et des déformations, nous avons besoin de connaître le moment quadratique de la section par rapport à son centre de gravité.

Donc si la section peut être décomposée en n sous sections

Si de centre de gravité G_i et de moment quadratique I_{Gix} ou I_{Giy} connus

$$I_{GX} = \sum_{i=1}^n (I_{Gix} + S_i (Y_{Gi} - Y_G)^2)$$

$$I_{GY} = \sum_{i=1}^n (I_{Giy} + S_i (X_{Gi} - X_G)^2)$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Moment quadratique par rapport à un couple d'axe

Ce moment quadratique est aussi appelé **moment produit**.

Pour un élément dS , le moment produit élémentaire par rapport aux axes Ox et Oy est par définition la quantité:

$$dI_{OXY} = XY dS$$

Ce qui donne pour l'ensemble de la section

$$I_{OXY} = \iint XY dS$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Théorème de Huygens

$$I_{OXY} = I_{GXY} + SX_GY_G$$

- ❑ Le moment produit est une grandeur algébrique
- ❑ Si un des deux axes est un axe de symétrie pour la section alors $I_{Oxy}=0$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Calculs pratiques :

□ Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments produits connus I_{Oxyi} , alors:

$$I_{OXY} = \sum_{i=1}^n I_{OXYi}$$

Si on cherche le moment produit d'une section par rapport à son centre de gravité et que celle-ci peut être décomposée en n sous-sections de c.d.g. G_i connus et de moments produits par rapport à leur c.d.g. connus I_{Gixy} , alors:

$$I_{GXY} = \sum_{i=1}^n \left(I_{G_iXY} + S_i (X_{Gi} - X_G)(Y_{Gi} - Y_G) \right)$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Moment quadratique par rapport à un point

Ce moment quadratique est aussi appelé **moment quadratique (ou d'inertie) polaire**.

Pour un élément dS , à une distance ρ de O , le moment quadratique polaire élémentaire par rapport à ce point est par définition la quantité:

$$dI_O = \rho^2 dS$$

Ce qui donne pour l'ensemble de la section:

$$I_O = \iint \rho^2 dS$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

on peut écrire

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 \text{ soit } I_0 = \iint X^2 dS + \iint Y^2 dS$$

Finalement on obtient

$$I_0 = I_{OX} + I_{OY}$$

Changement d'origine (Théorème de Huygens)

Soit:

$$I_0 = (I_{GX} + SY_G^2) + (I_{GY} + SX_G^2)$$

Résistance des Matériaux

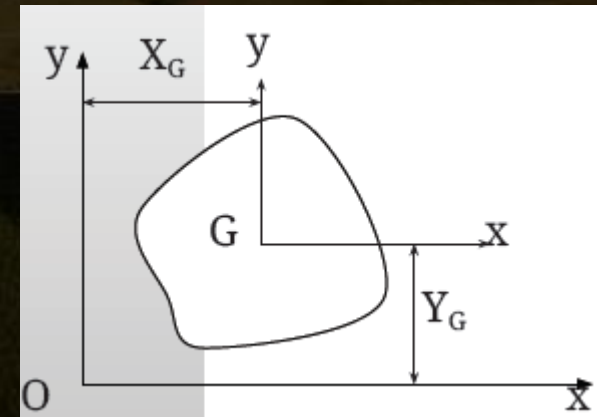
II. Caractéristiques géométriques des sections

Ou

$$I_O = I_{GX} + I_{GY} + S(X_G^2 + Y_G^2)$$

Finalement, on obtient:

$$I_O = I_G + S(OG)^2$$



Résistance des Matériaux

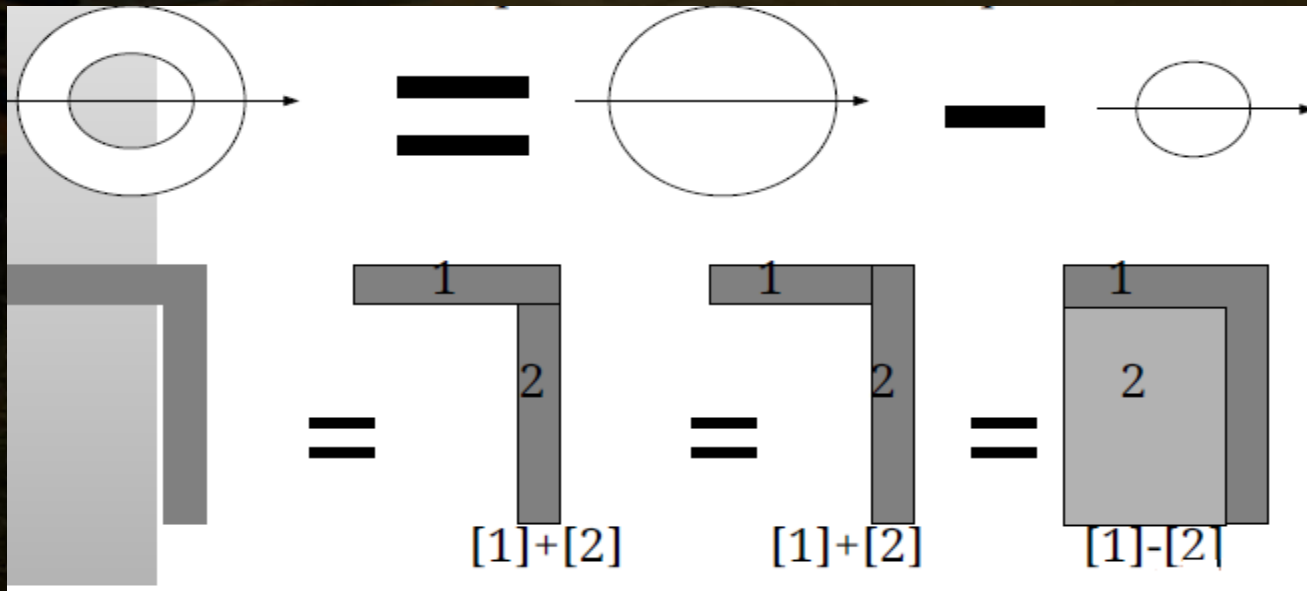
II. Caractéristiques géométriques des sections

Remarques pratiques concernant le calcul des moments

Quadratiques

Les moments quadratiques s'ajoutent et se retranchent.

Cette propriété permet une détermination aisée dans le cas de surfaces composées d'éléments simples.



Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

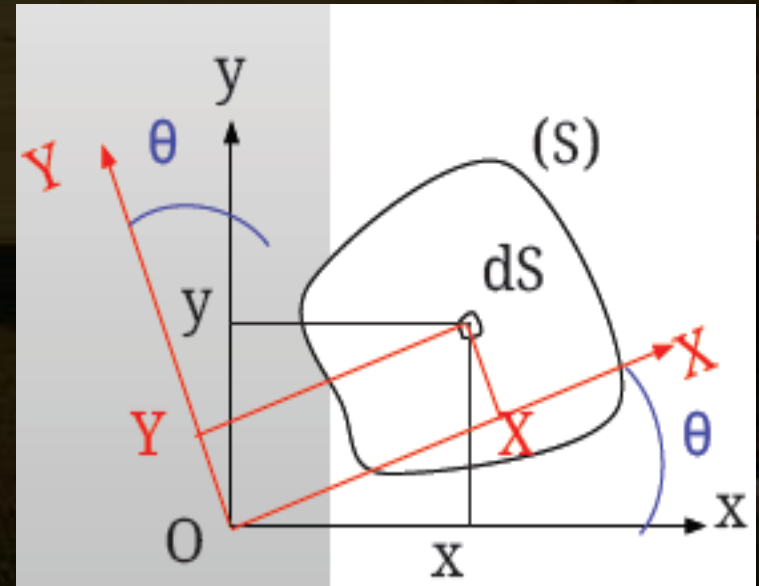
Moments quadratiques d'axes concourants

□ Rotations d'axes

Soit la section plane S , et deux systèmes d'axes Oxy et OXY obtenu par une rotation d'angle θ .

Les relations liant les coordonnées dans les deux repères sont:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$



Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Calculons le moment quadratique / OX :

$$I_{OX} = \iint (x^2 \sin \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos \theta) dS$$

$$I_{OX} = \sin \theta \iint x^2 dS + \cos \theta \iint y^2 dS - 2 \sin \theta \cos \theta \iint xy dS$$

Ce qui nous donne :

$$I_{OX} = \sin^2 \theta . I_{OY} + \cos^2 \theta . I_{OX} - 2 \sin \theta \cos \theta . I_{OXY}$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

En passant à l'angle double :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

On obtient:

$$I_{Ox} = \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2} + \frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \cos 2\theta - I_{Oxy} \sin 2\theta$$

De même, pour le moment quadratique / OY, on obtient :

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

$$I_{OY} = \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2} - \frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \cos 2\theta + I_{Oxy} \sin 2\theta$$

Calcul du moment produit :

$$I_{OXY} = \iint XY dS = \iint (x \cos \theta + y \sin \theta)(-x \sin \theta + y \cos \theta) dS$$

$$I_{OXY} = \sin \theta \cos \theta \left(\iint y^2 dS - \iint x^2 dS \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \iint xy dS$$

Soit

$$I_{OXY} = \frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \sin 2\theta + I_{Oxy} \cos 2\theta$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Recherche des directions principales

Il s'agit des directions donnant les moments quadratiques extrêmes (maximal et minimal). Pour les trouver, dérivons I_{Ox} et I_{Oy} / θ et annulons ces dérivées:

$$\frac{dI_{Ox}}{d\theta} = -2 \frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \sin 2\theta - 2I_{Oxy} \cos 2\theta = 0$$

$$\frac{dI_{Oy}}{d\theta} = 2 \frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \sin 2\theta + 2I_{Oxy} \cos 2\theta = 0$$

Ces deux expressions s'annulent pour :

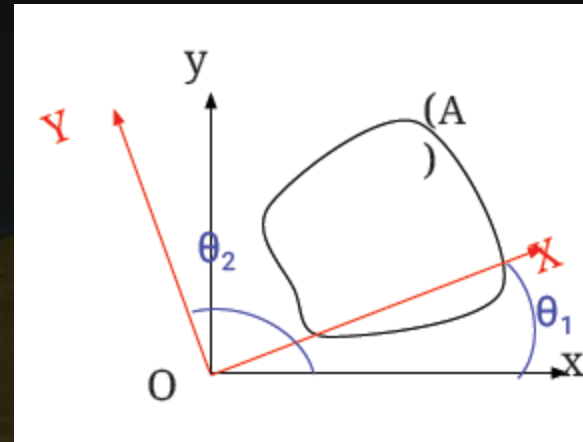
$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{Oxy}}{I_{Ox} - I_{Oy}}$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Recherche des directions principales

Cette expression nous donne deux directions conjuguées définies par les angles θ_1 et θ_2



Les directions ainsi déterminées s'appellent les directions principales (ou axes principaux), elles sont orthogonales et définies par la relation:

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{oxy}}{I_{ox} - I_{oy}}$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Remarques:

- ❑ Pour les directions principales, I_{OXY} est nul.
- ❑ Tout axe de symétrie, est axe principal d'inertie.
- ❑ Tout axe perpendiculaire à un axe de symétrie est également axe principal d'inertie.



Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Expression des moments quadratiques principaux

Pour connaître les expressions des moments quadratiques principaux (I_{maxi} et I_{mini}), il suffit de remplacer, dans les formules donnant I_{Ox} , I_{Oy} et I_{Oxy} , la valeur de θ par les solutions de l'équation:

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{Oxy}}{I_{Ox} - I_{Oy}}$$

On obtient ainsi:

$$I_{maxi} = \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2}\right)^2 + I_{Oxy}^2}$$

$$I_{mini} = \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2}\right)^2 + I_{Oxy}^2}$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Représentation graphique – Cercle de Mohr

Reprenons les expressions donnant I_{OX} et I_{OXY}

$$I_{OX} - \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2} = \frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \cos 2\theta - I_{Oxy} \sin 2\theta$$

$$I_{OXY} = \frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \sin 2\theta + I_{Oxy} \cos 2\theta$$

Effectuons la somme des carrés, on obtient:

$$\left(I_{OX} - \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2} \right)^2 + I_{OXY}^2 = \left(\frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2} \right)^2 + I_{Oxy}^2$$

Résistance des Matériaux

II. Caractéristiques géométriques des sections

Ce qui correspond à l'équation d'un cercle de centre C et de rayon R

$$X_C = \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2}$$

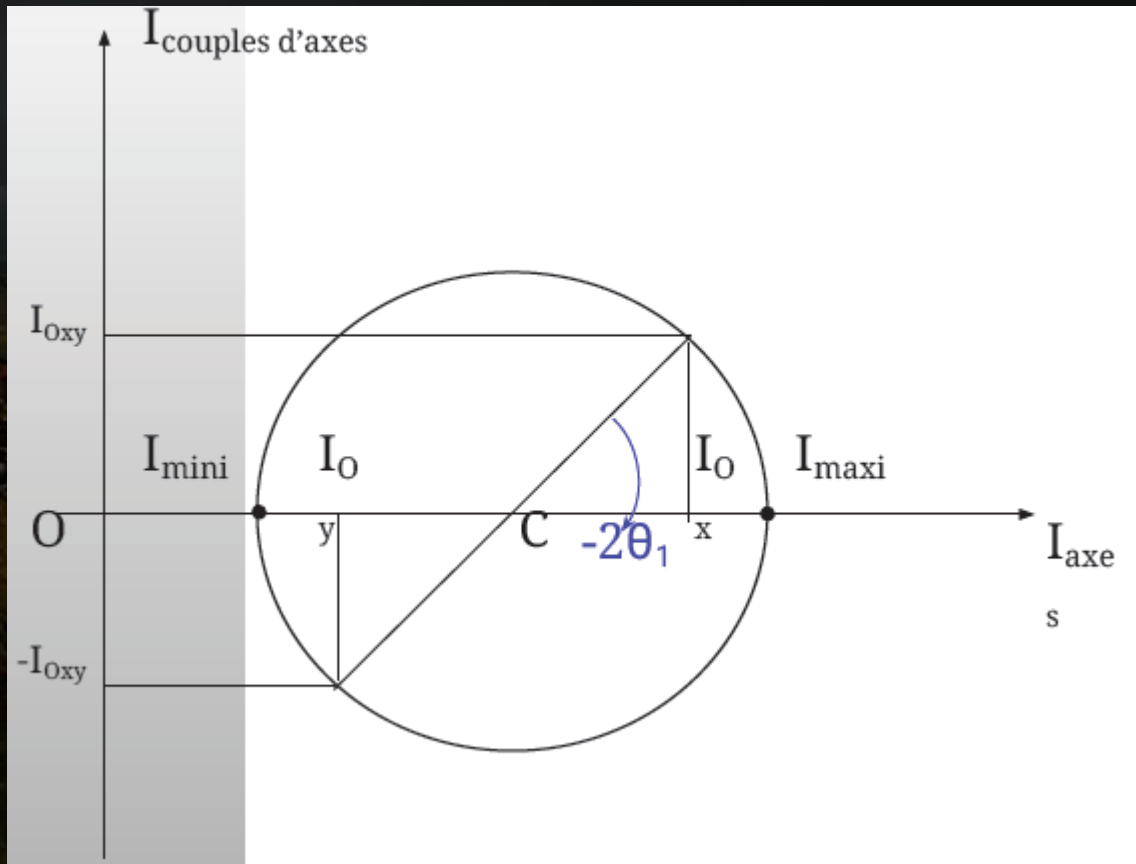
et

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2}\right)^2 + I_{Oxy}^2}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

Représentation graphique – Cercle de Mohr



$$X_C = \frac{I_{Ox} + I_{Oy}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_{Ox} - I_{Oy}}{2}\right)^2 + I_{Oxy}^2}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

Rayon de giration

Le moment d'inertie d'une figure par rapport à un axe quelconque peut être représenté sous forme de produit de l'aire de cette figure par le carré d'une certaine grandeur appelée rayon de giration :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

- L'unité du rayon de giration est une unité de longueur (cm ou mm généralement).

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

Module de résistance

On appelle module de résistance ou moment résistant axial le rapport entre le moment d'inertie par rapport à un axe donné et la distance de cet axe jusqu'au point le plus éloigné de la section transversale :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

L'unité du moment résistant est une unité de longueur de puissance 3 (cm³ ; mm³)

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

- Section rectangulaire

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{b^3h/12}{b/2} = \frac{b^2h}{6}$$

- Section cercle

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{r} = \frac{\pi r^4}{4} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

II. Caractéristiques géométriques des sections

- Anneau:

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)\frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4)$$

$$\alpha = d/D$$

Résistance des Matériaux-RDM1

Chapitre III

Hypothèses de la Résistance des Matériaux



Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

- ❑ La RDM est une théorie simplifiée.
- ❑ Elle découle d'un certain nombre d'hypothèses qui cadrent son domaine de validité.
 - On s'intéresse à des solides considérés comme déformables
 - Des restrictions multiples sont nécessaires pour utiliser la RDM....
 - sur les géométries...
 - sur les matériaux...
 - sur les efforts extérieurs...
- ❑ Ce chapitre vise à poser l'ensemble de ces hypothèses

Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Notion de poutre

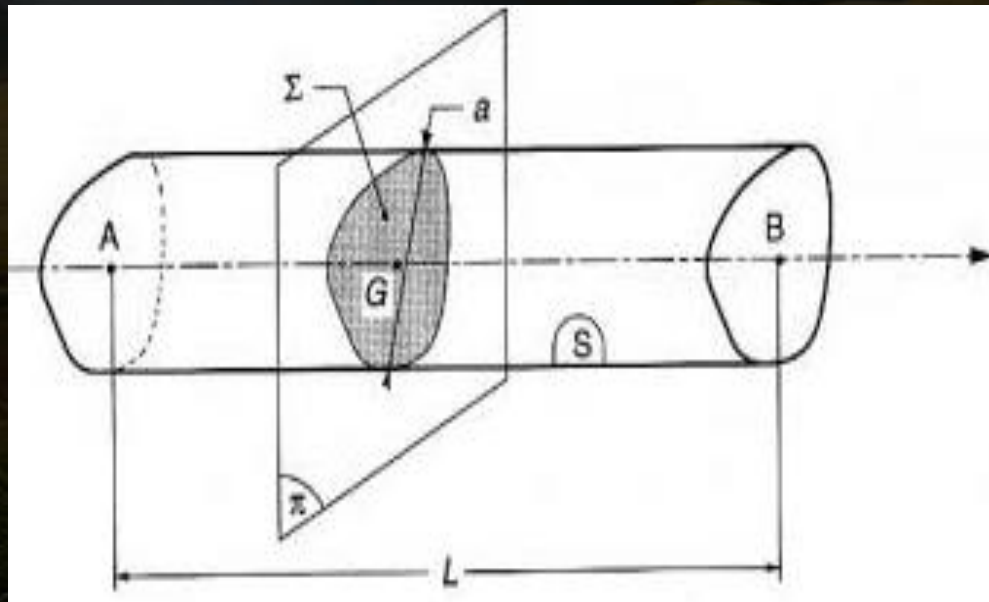
Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre G décrit une courbe plane appelée ligne moyenne

- La ligne moyenne est droite ou son rayon de courbure est grand par rapport aux dimensions de la section.
- La section droite (S) de centre de surface G est constante ou varie progressivement.
- La poutre a une grande longueur par rapport aux dimensions de la section.
- Les points disposés de façon identique sur les sections droites constituent des lignes appelées fibres.
-

Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

- La ligne moyenne est aussi appelée fibre neutre.
- Le programme nous limite aux poutres droites (la section ne varie pas) présentant un plan de symétrie contenant la ligne moyenne



Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Hypothèses sur les matériaux

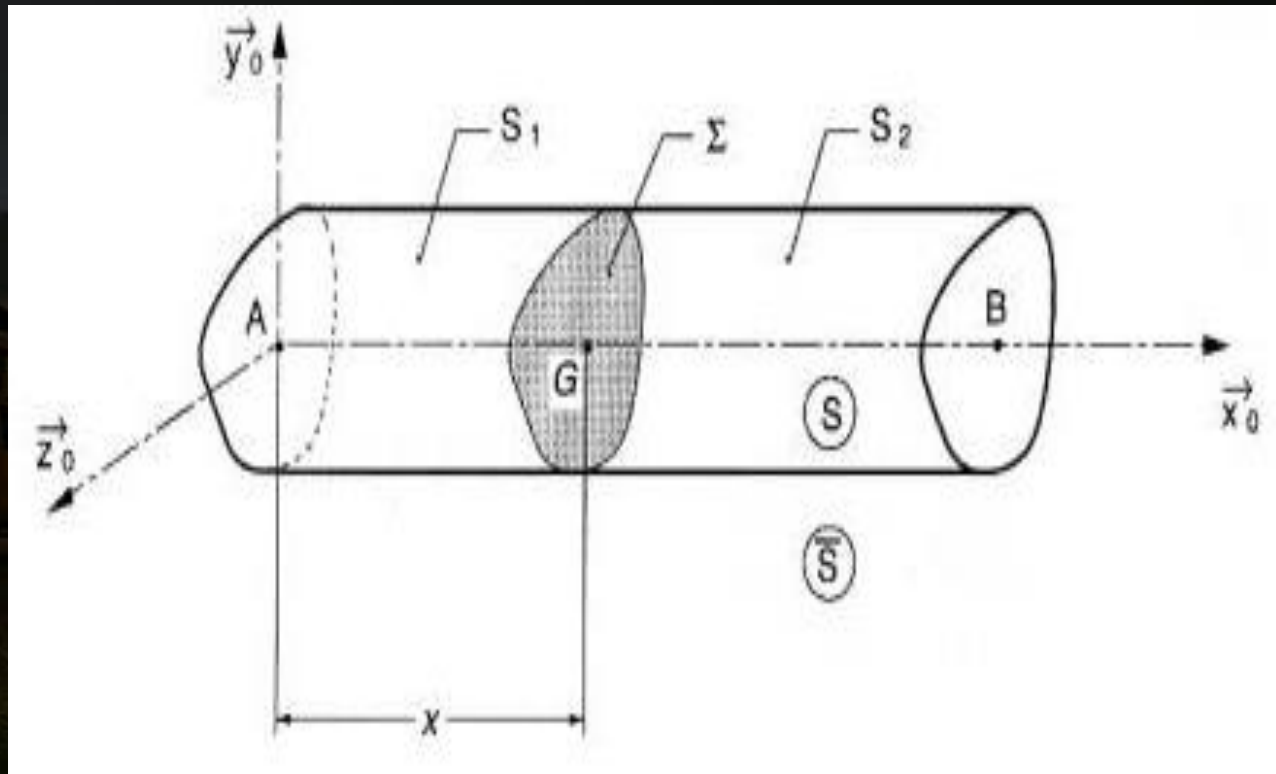
On suppose que les matériaux sont continus, homogènes et isotropes :

- Continu : les discontinuités microscopiques dues à la nature des matériaux de construction (grains, mailles...) sont négligées.
- Homogènes : la constitution est la même en chaque point.
- Isotropes : leurs propriétés physiques sont les mêmes dans toutes les directions.

Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Repérage associé à la poutre



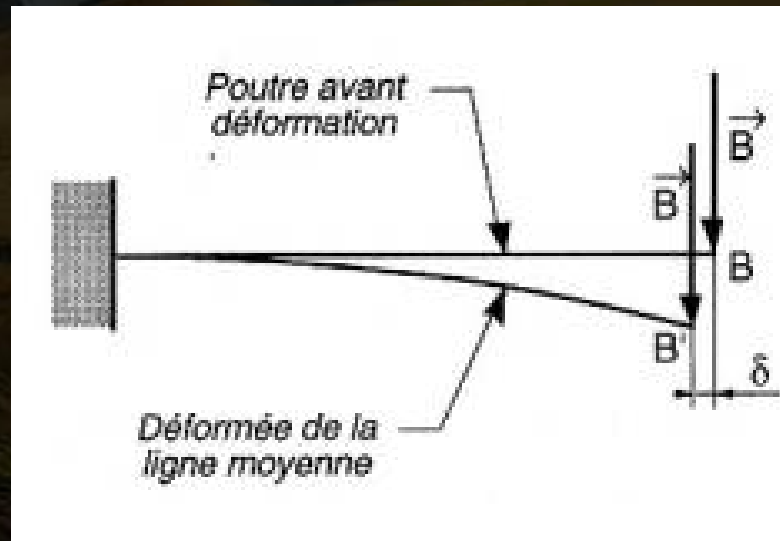
Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Hypothèse sur les efforts

Les efforts sont invariants.

Les déplacements sous charges étant petits, les efforts extérieurs sont supposés avant et après application du chargement ($d = 0$)



Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Sur les déformations

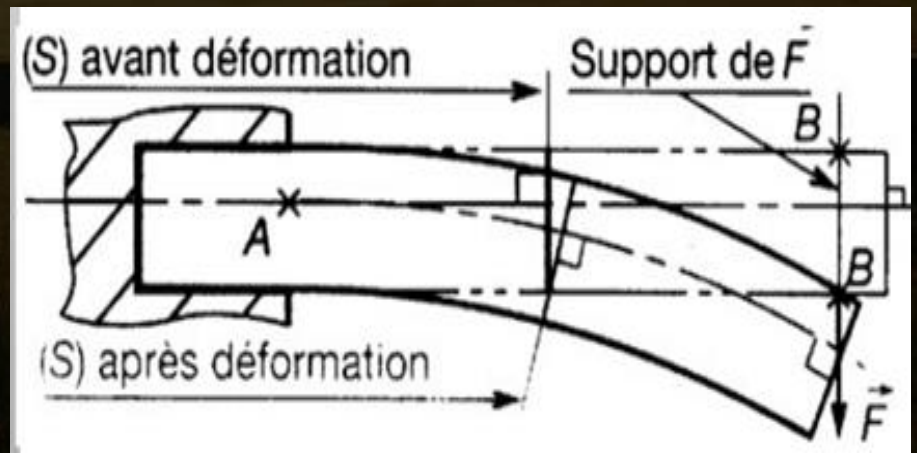
Les déformations doivent être

Petites → réversibles

Lentes à chaque instant le corps peut être considéré comme étant en équilibre statique

Hypothèse de Navier Bernoulli

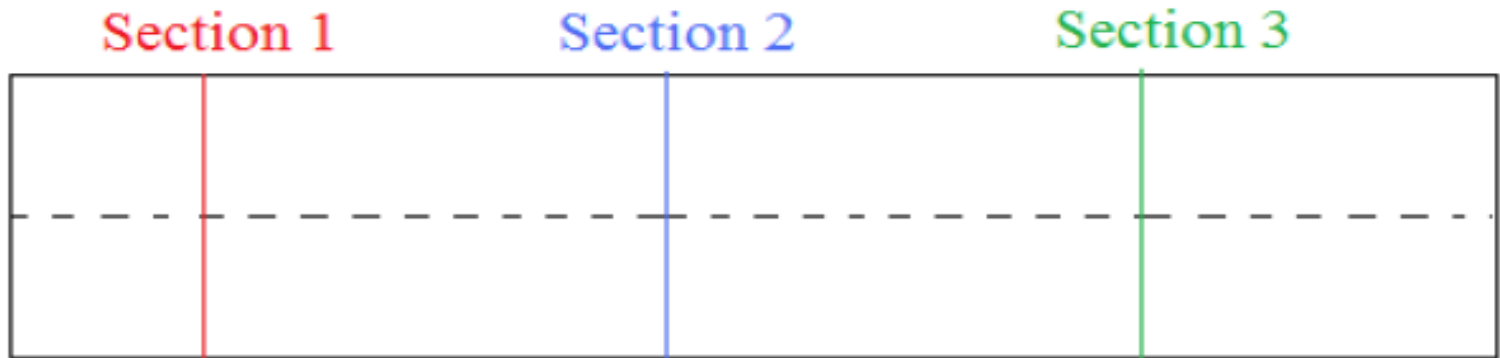
Les sections planes, normales à la ligne moyenne avant chargement demeurent planes et normales à la ligne moyenne après chargement



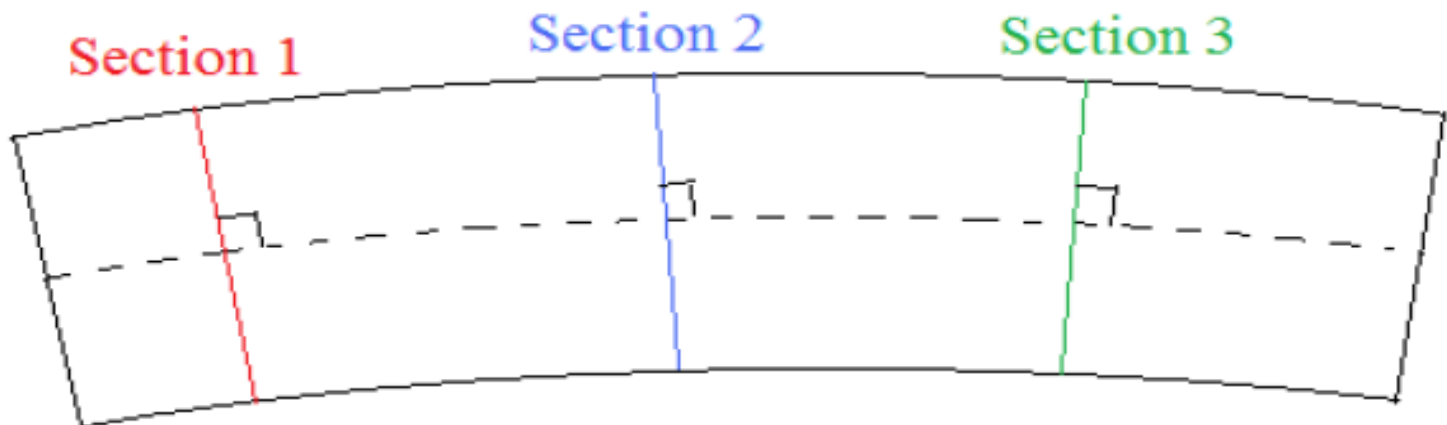
Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Etat initial :



Etat déformé :

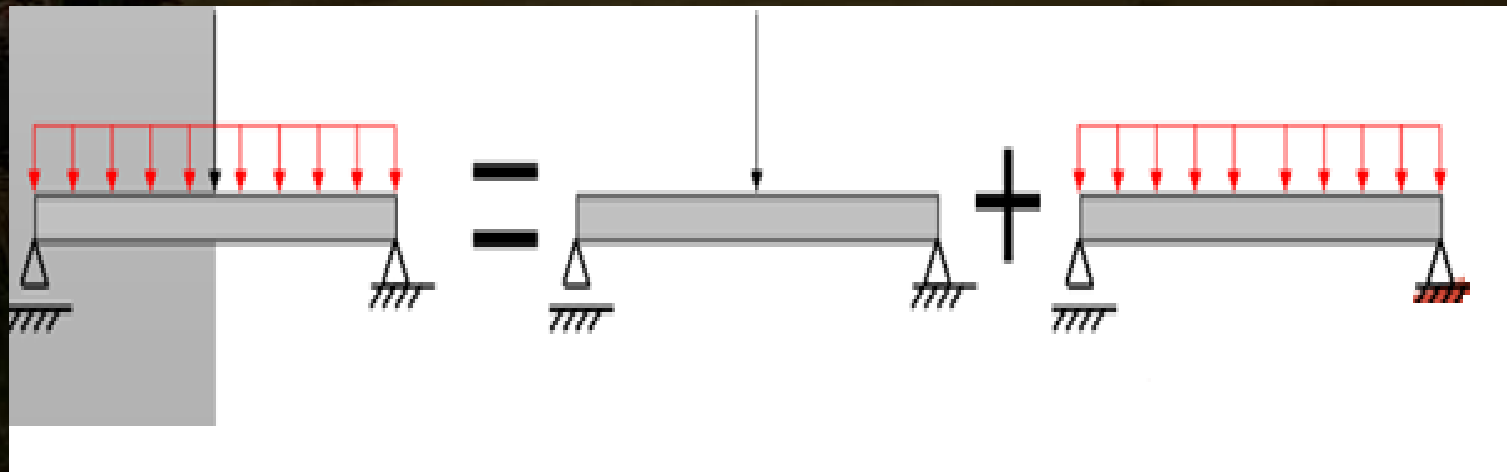


Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Principe de superposition

La déformation (ou la contrainte) en un point M de la poutre due à plusieurs actions mécaniques extérieures est égale à la somme des déformations (ou des contraintes) dues à chaque action mécanique extérieure prise isolément



Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

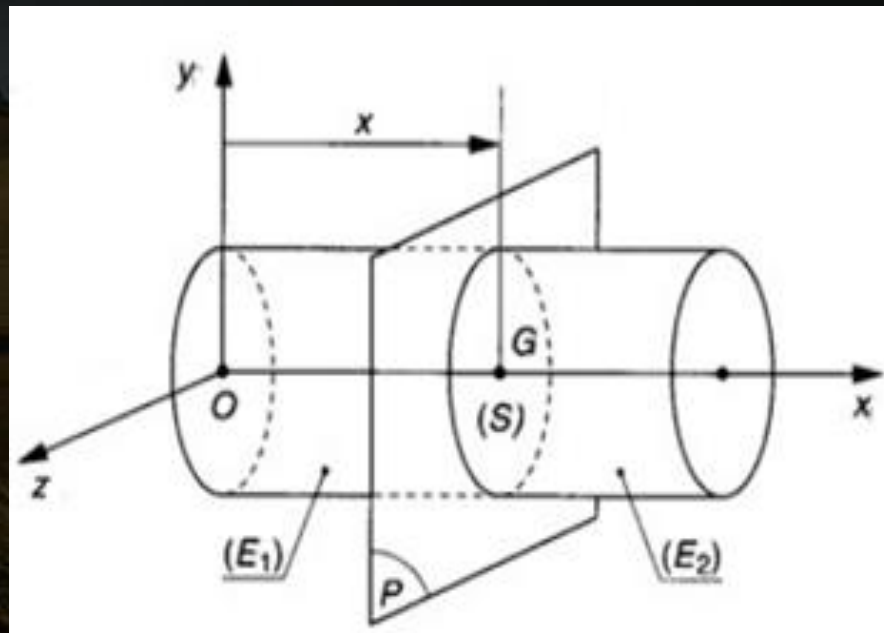
Actions intérieures-forces de cohésion

Lorsqu'un solide est soumis à un système de forces extérieures, il s'exerce, au cœur du matériau constituant le solide, des forces intérieures permettant au solide de garder son intégrité physique. Ces forces intérieures portent aussi le nom de forces de cohésion. Pour mettre en évidence ces forces de cohésion, on peut effectuer une coupure fictive suivant un plan perpendiculaire à la ligne moyenne, séparant la poutre en deux tronçons E_1 et E_2 .

Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Si on isole le tronçon de gauche E_1 , les forces de cohésion représenteront les efforts exercés par le tronçon de droite E_2 sur le tronçon de gauche E_1

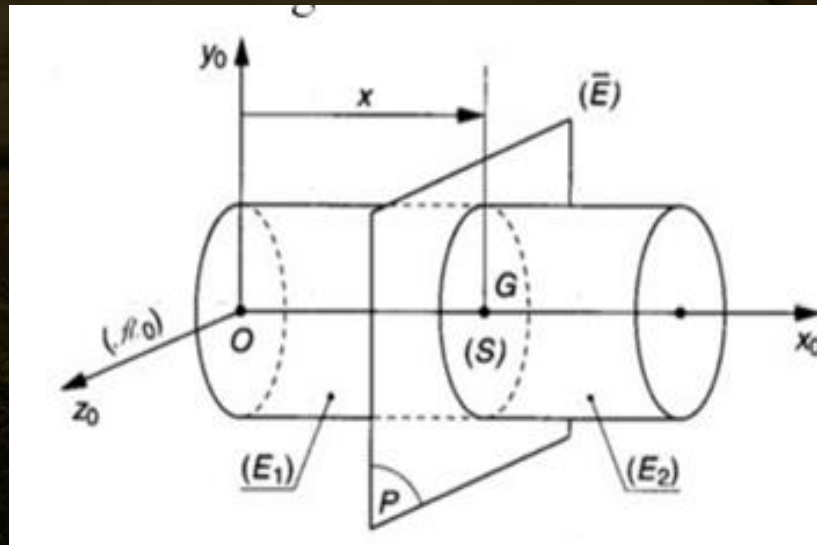


Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Élément de réduction

Ce sont les différentes composantes des actions intérieures exprimées par rapport au centre de gravité G de la section S de la coupure fictive. Les expressions des éléments de réductions de x , l'abscisse du centre de gravité G de la section



Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

- **En 3D**

Effort normal

N : composante algébrique de \vec{N} sur \vec{x}

Efforts Tangentiels (tranchants)

T_y : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{y}

T_z : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{z}

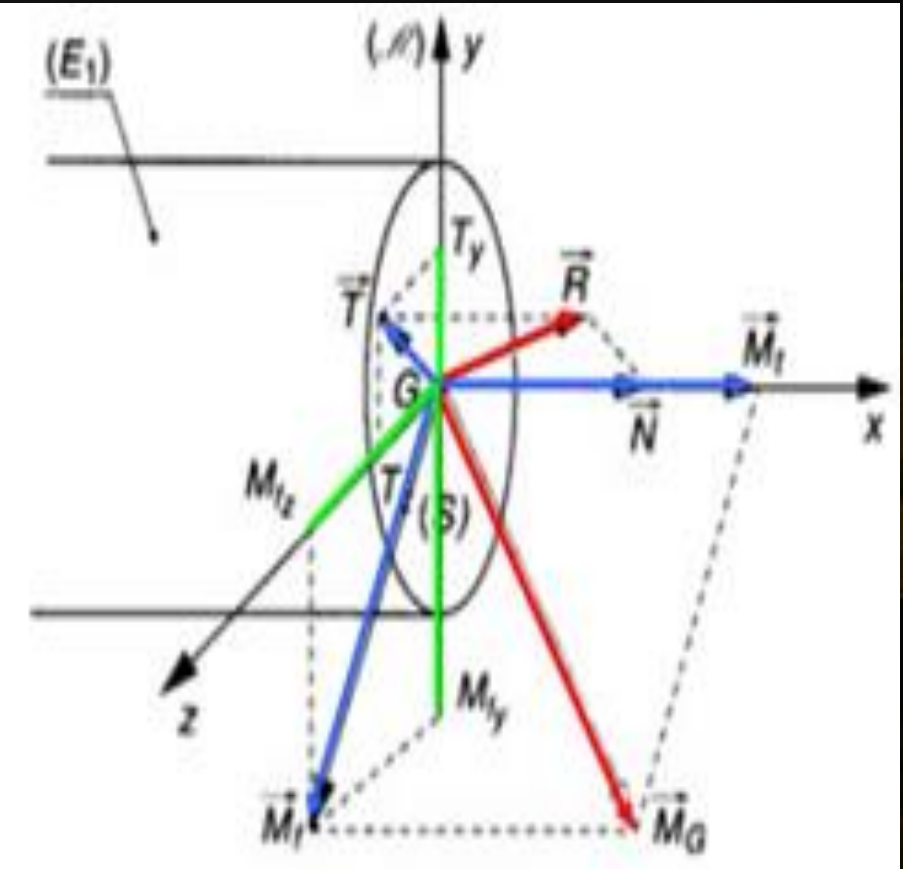
Moment de Torsion

M_t : composante algébrique de \vec{M}_t sur \vec{x}

Moment de flexion

M_{fy} : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{y}

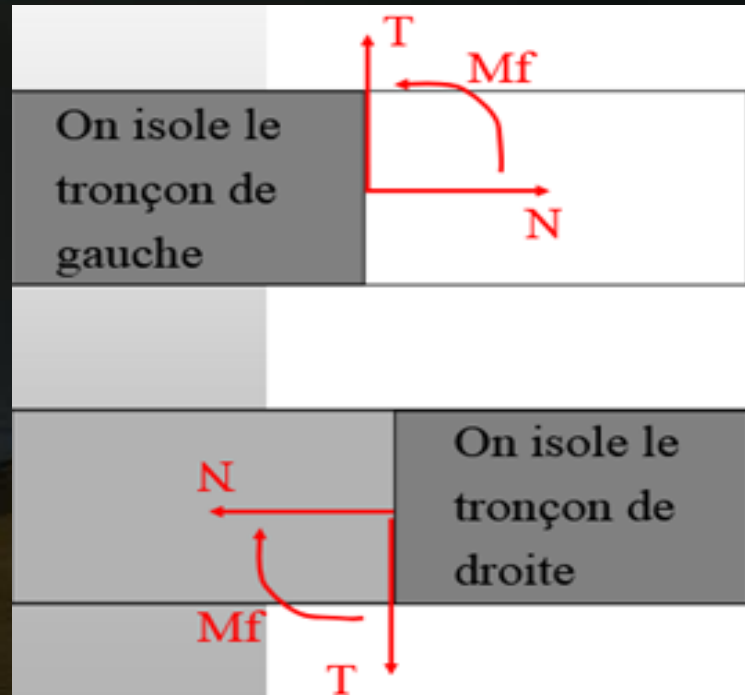
M_{fz} : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{z}



Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

- En 2D

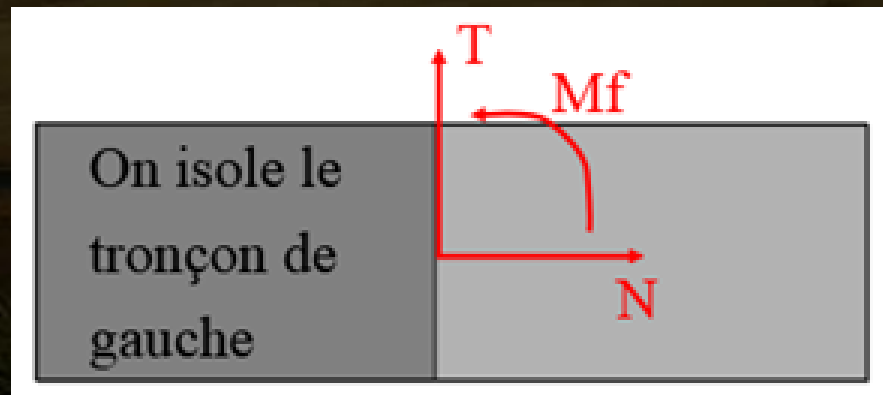


Les conventions de signe sont choisies arbitrairement celles présentées sont celles le plus couramment utilisées si $M_f > 0$, la fibre inférieure est tendue

Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Lorsqu'on a isolé le tronçon de gauche, on applique le principe fondamental de la statique : on écrit l'équilibre du tronçon de gauche soumis aux efforts extérieurs et aux efforts exercés par le tronçon de droite sur le tronçon de gauche



Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Remarque

- ❑ Il faut connaître les efforts extérieurs appliqués au solide, donc pour déterminer les EDR, il faut calculer les réactions d'appuis.
- ❑ A chaque discontinuité (de géométrie ou liée à l'apparition d'une nouvelle force), il faut faire une nouvelle coupure
- ❑ Les éléments de réduction étant des fonctions de x (abscisse du centre de gravité de la section ou on coupe), on peut tracer des diagrammes (de l'effort normal, de l'effort tranchant et du moment fléchissant).

Résistance des Matériaux-RDM1

III. Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Hypothèse de Barré de Saint Venant

L'état des sollicitations (les contraintes (et déformations)) dans une section suffisamment éloignée des points d'application des charges extérieures appliquées à la poutre ne dépend que du torseur associé à ces charges (ne dépendent que de la résultante et du moment résultant au centre de gravité de la section associés à ce système de forces.

Résistance des Matériaux-RDM1

Chapitre IV

Caractéristiques mécaniques des matériaux



Contraintes normales

➤ Enoncé du principe de NAVIER BERNOULLI

les sections normales (les sections droites), à la fibre moyenne avant déformation restent planes et normales à la fibre moyenne après déformation

➤ conséquence

La déformation est sous la forme d'un plan donc :

$$\epsilon_x = A + By + Cz$$

Calculs analytiques

$$\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z$$

- σ : contrainte normale [Pa]
- N : Effort normal [N]
- M_z : moment fléchissant autour de z [MN.m]
- M_y : moment fléchissant autour de y [MN.m]
- S : Surface [m²] , I_z : moment d'inertie selon z [m⁴]
- I_y : moment d'inertie selon y [m⁴]
- y et z : Coordonnées du point pour lequel on calcule la valeur de la contrainte à l'intérieur de la section [m]

Convention de signe

Effort normal (N en [N])	$N > 0$: compression supplémentaire NB : ça ne signifie pas que la section est complètement comprimée Puisque le moment fléchissant apporte de la traction et de la compression (selon la position du point pour lequel on calcule les contraintes). $N < 0$: traction
Contrainte normale (σ en [Pa])	$\sigma > 0$: point où il y a de la traction $\sigma < 0$: point où il y a de la compression $\sigma = 0$: point sans contrainte normale (ni tendu, ni comprimé) – définition de l'axe neutre -

- ❑ la convention de signe est différente entre l'effort normal N du diagramme de sollicitation et la contrainte normale σ pour la traction ou la compression

- Différents types de sollicitations

Type de sollicitation	N	M_y	M_z
Traction (si $N < 0$) ou compression pure (si $N > 0$)	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
Flexion simple autour de l'axe z	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$
Flexion simple autour de l'axe y	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$
Flexion composée autour de l'axe z	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$
Flexion composée autour de l'axe y	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$
Flexion déviée	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Flexion déviée composée	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

Axe neutre

- Axe neutre : ensemble des points dont la contrainte normale est nulle. C'est-à-dire que l'axe neutre est la droite d'équation

$$\sigma(y, z) = 0 \Leftrightarrow -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z = 0$$

- Il est la frontière entre la zone comprimée et zone tendue :
- Lorsque l'A.N. coupe la section : la section est partiellement comprimée
- Lorsque l'A.N. ne coupe pas la section :
 - La section est entièrement comprimée si $N > 0$
 - La section est entièrement tendue si $N < 0$

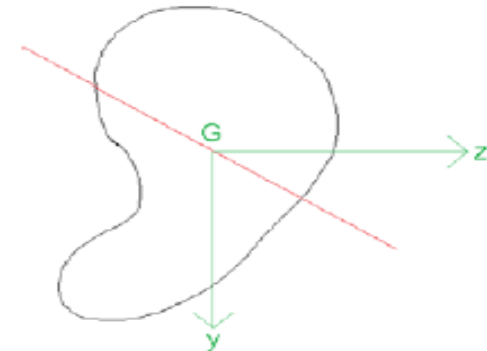
Position de l'axe neutre

- Influence de l'effort normal (PRINCIPE 1) :

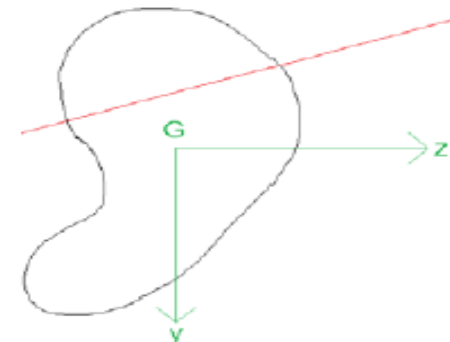
L'axe neutre passe par le centre de gravité G de la section si $N = 0$.

L'axe neutre ne passe pas par le centre de gravité G de la section si $N \neq 0$.

Exemple



Exemple



- Influence des moments fléchissants

L'axe neutre est parallèle à l'axe \vec{z} lorsque :

$$M_z \neq 0$$

$$M_y = 0$$

(cas de la flexion simple ou composée autour de l'axe \vec{z})

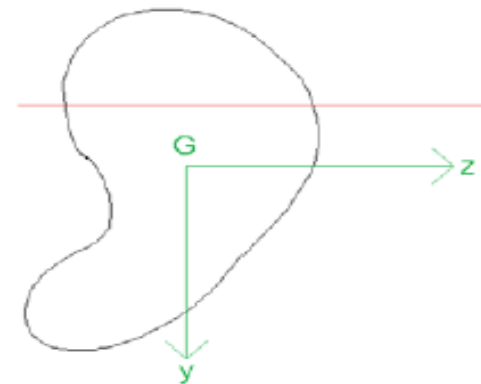
L'axe neutre est parallèle à l'axe \vec{y} lorsque :

$$M_z = 0$$

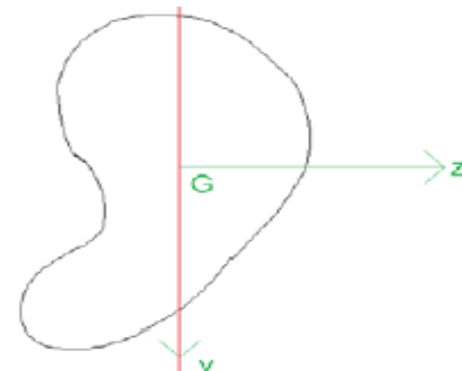
$$M_y \neq 0$$

(cas de la flexion simple ou composée autour de l'axe \vec{y})

Exemple



Exemple



L'axe neutre n'est pas parallèle, ni à l'axe \vec{z} , ni à l'axe \vec{y} lorsque :

$$M_z \neq 0$$

$$M_y \neq 0$$

(cas de la flexion déviée simple ou déviée composée)

Exemple

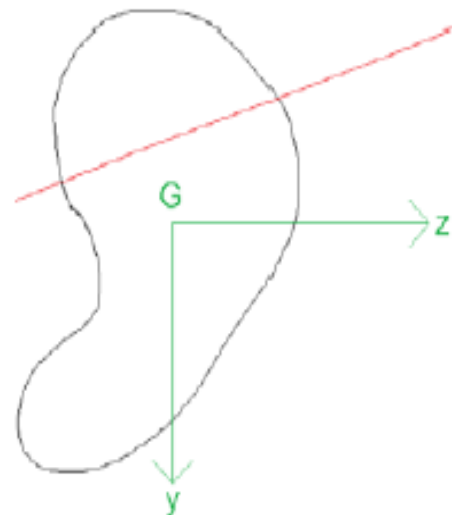
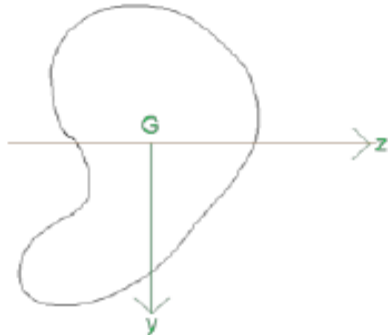
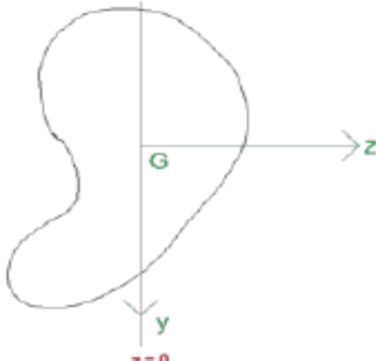
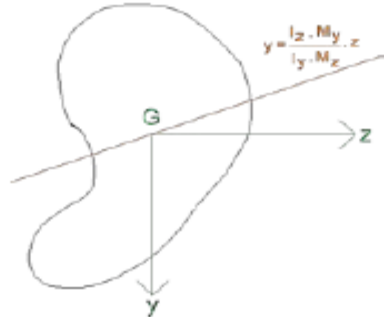
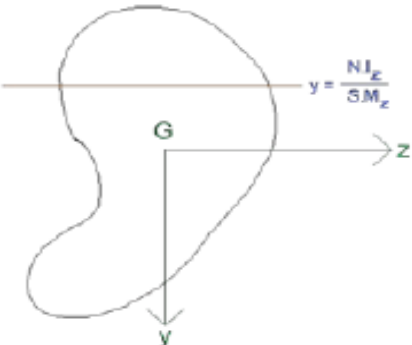
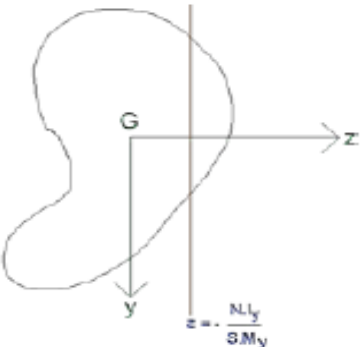
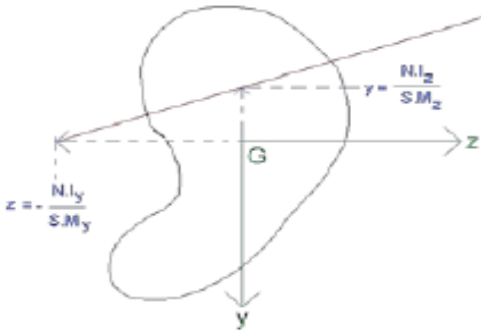


Tableau récapitulatif des 2 principes et de l'équation de l'axe neutre :

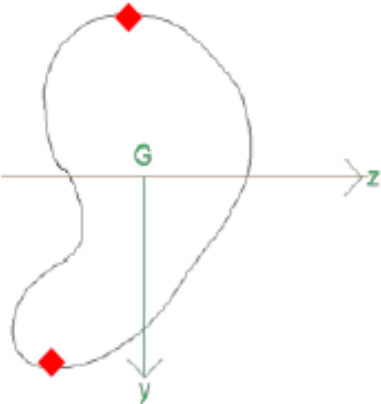
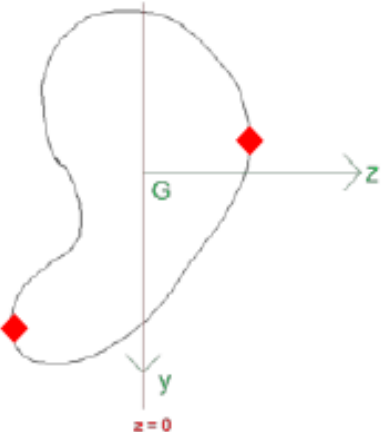
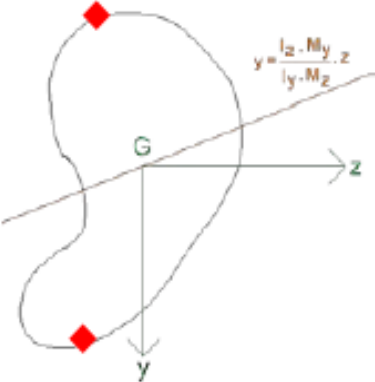
		$M_z = 0$	$M_z \neq 0$
$N = 0$	$M_y = 0$	Sans objet (pas de sollicitation)	<p>L'axe neutre est la droite d'équation :</p> $y = 0$ 
	$M_y \neq 0$	<p>L'axe neutre est la droite d'équation :</p> $z = 0$ 	<p>L'axe neutre est la droite d'équation :</p> $y = \frac{I_z \cdot M_y}{I_y \cdot M_z} z$ 

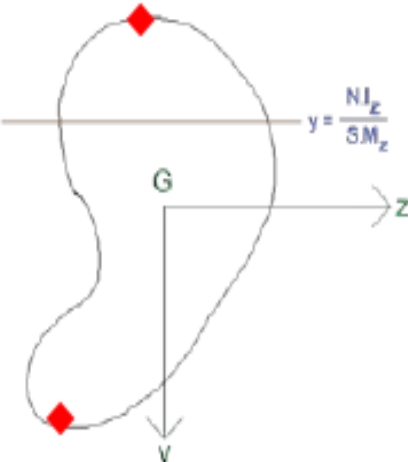
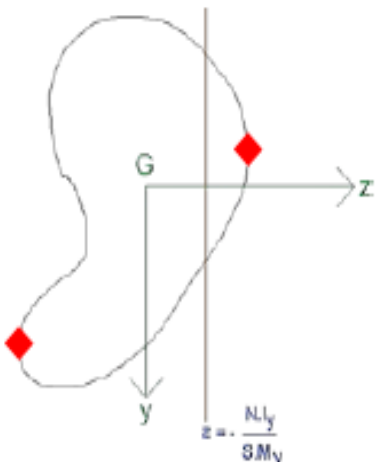
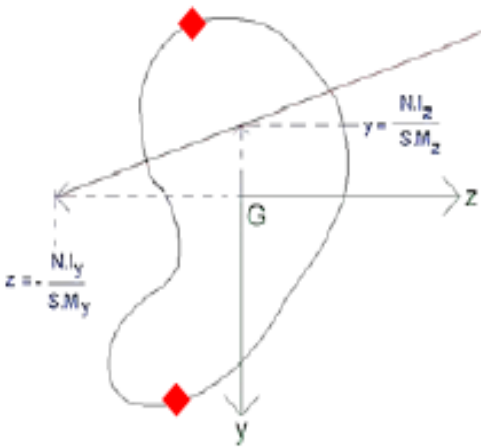
N ≠ 0	M _y = 0	<p>Il n'existe pas d'axe neutre. La section est</p> <ul style="list-style-type: none"> - soit entièrement tendue (si N < 0) - soit entièrement comprimée (si N > 0) 	<p>L'axe neutre est la droite d'équation :</p> $y = \frac{N \cdot I_z}{S \cdot M_z}$ 
	M _y ≠ 0	<p>L'axe neutre est la droite d'équation :</p> $z = -\frac{N \cdot I_y}{S \cdot M_y}$ 	<p>L'axe neutre est la droite passant par les points $\begin{pmatrix} \frac{N I_z}{S M_z} \\ 0 \end{pmatrix}_{G; \vec{y}; \vec{z}}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{N I_y}{S M_y} \end{pmatrix}_{G; \vec{y}; \vec{z}}$</p> 

Position des points les plus sollicités (pour lesquels il convient de calculer les contraintes)

- ❑ Les points les plus sollicités sont les points de la section les plus éloignés de l'axe neutre. Il convient donc de calculer les contraintes en ces points :



		$M_z = 0$	$M_z \neq 0$
$N = 0$	$M_y = 0$	Sans objet (pas de sollicitation)	
	$M_y \neq 0$		

$N \neq 0$	$M_y = 0$	<p>Il n'existe pas d'axe neutre. La section est</p> <ul style="list-style-type: none"> - soit entièrement tendue (si $N < 0$) - soit entièrement comprimée (si $N > 0$) 	 <p>A diagram of an irregular cross-section with a horizontal line representing the neutral axis. The centroid G is marked. The equation for the neutral axis is $y = \frac{N I_z}{S M_z}$. Two red diamonds are placed on the top and bottom edges of the section, indicating it is either entirely in tension or compression.</p>
	$M_y \neq 0$	 <p>A diagram of an irregular cross-section with a vertical line representing the neutral axis. The centroid G is marked. The equation for the neutral axis is $z = -\frac{N I_y}{S M_y}$. Two red diamonds are placed on the left and right edges of the section.</p>	 <p>A diagram of an irregular cross-section with a diagonal line representing the neutral axis. The centroid G is marked. The equation for the neutral axis is $y = \frac{N I_z}{S M_z}$. The equation for the perpendicular distance from the centroid to the neutral axis is $z = -\frac{N I_y}{S M_y}$. Two red diamonds are placed on the top and bottom edges of the section.</p>

Remarque : en flexion non déviée (c'est-à-dire simple ou composée), la position des points les plus sollicités est connue sans connaître la position exacte de l'axe neutre :

□ $M_z \neq 0$ et $M_y = 0$:

- Point(s) d'ordonnée y la plus grande (définition de la fibre inférieure)
- Point(s) d'ordonnée y la plus petite (définition de la fibre supérieure)

□ $M_z = 0$ et $M_y \neq 0$:

- Point(s) de coordonnée z la plus grande (point(s) « le(s) plus à droite »)
- Point(s) de coordonnée z la plus petite (point(s) « le(s) plus à gauche »)

Ainsi la position de l'axe neutre n'est importante que lorsque la flexion est déviée pour pouvoir positionner les points les plus sollicités en contraintes normales.

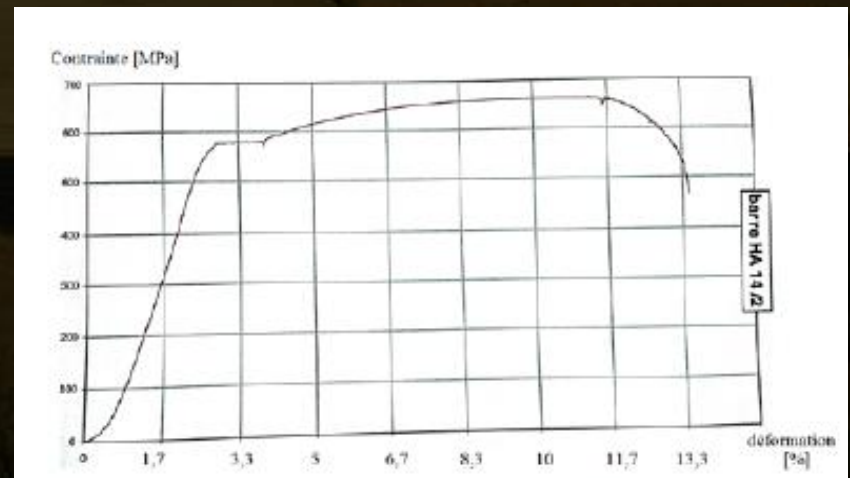
Les lois de comportement

Une loi de comportement est une relation liant les contraintes aux Déformations

Exemples :

Elle est obtenue par expérimentation : *loi de comportement réelle.*

barre acier HA14



Elle peut être modélisée mathématiquement : **loi de comportement modélisée.**

- Exemple : loi de Sargin du béton



Résistance des Matériaux-RDM1

Chapitre V

Sollicitation simple



Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Introduction

Ces deux sollicitations simples sont distinctes et un certain nombre de matériaux ont un comportement différent en traction et en compression (fonte, béton...). Cependant, dans les deux cas, nous arriverons aux mêmes relations de contraintes et de déformations.

Dans le repère (Gxyz) lié à la section, traction et compression se différencieront par le signe de l'effort normal $N > 0$ traction, $N < 0$ compression

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Hypothèses

Le solide est composé d'un matériau homogène et isotrope,

- ❑ Sa ligne moyenne est rectiligne,
- ❑ La section droite est constante sur toute la longueur,
- ❑ La résultante des actions extérieures au c.d.g. des sections extrêmes n'a qu'une composante dirigée selon la ligne moyenne.

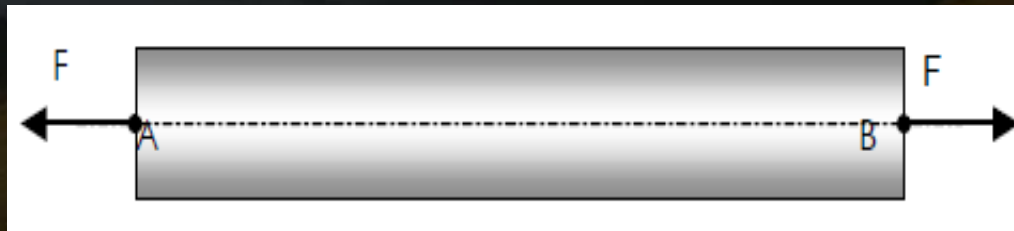


Résistance des Matériaux-RDM1

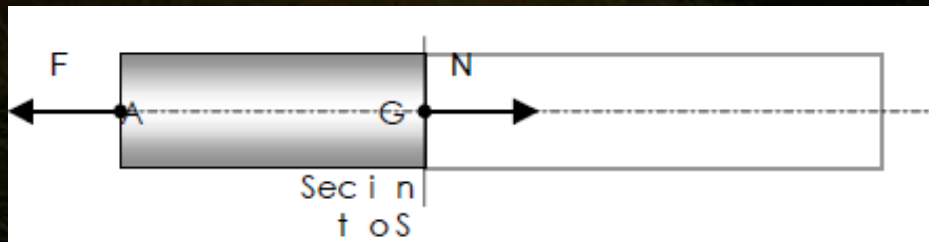
VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Définitions

Une poutre est sollicitée à **la traction simple** lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées qui tendent à l'allonger et appliquées au c.d.g des sections extrêmes.



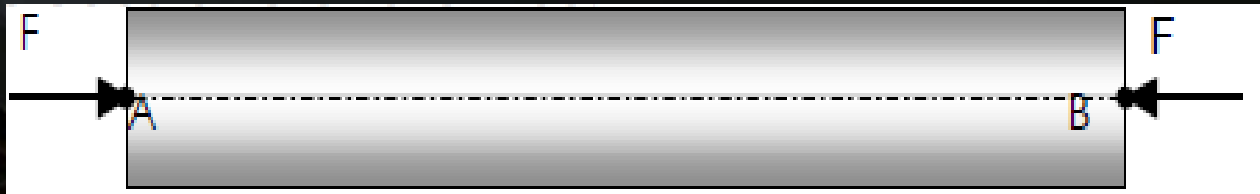
Dans ce cas, les forces de cohésion se réduisent à une composante normale $N > 0$.



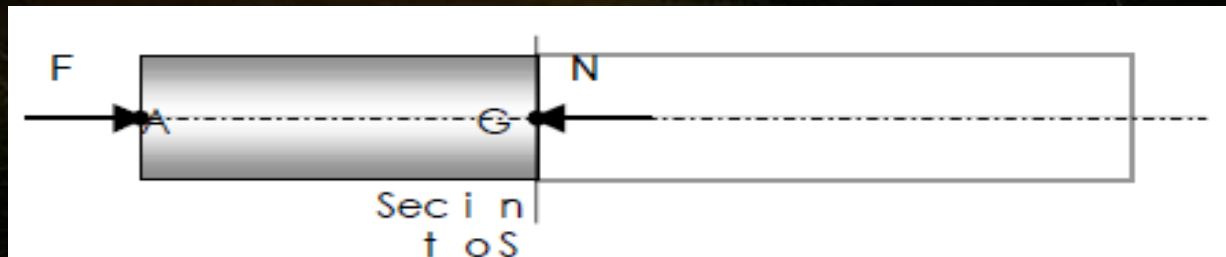
Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Une poutre est sollicitée à **la compression simple** lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées qui tendent à le raccourcir et appliquées au c.d.g des sections extrêmes.



Dans ce cas, les forces de cohésion se réduisent à une composante normale $N < 0$.



Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Dans le cas de la compression, si les dimensions longitudinales sont trop importantes (/ aux dimensions transversales), il y a risque de flambement (ou flambage).

Contraintes dans une section droite

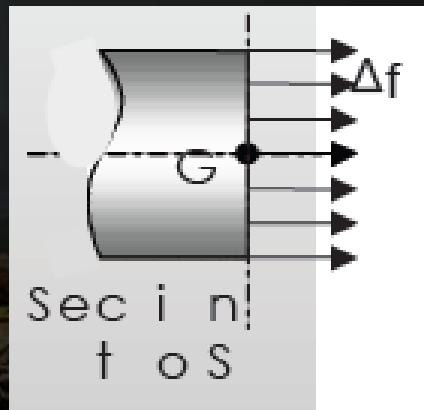
Pour les deux sollicitations, traction et compression, elles s'expriment de la même façon :

Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de traction Δf parallèle à la ligne moyenne.

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section .



$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : N/mm²

N : effort normal en N

S : aire de la section
droite en mm²

Traction $\Rightarrow N > 0, \sigma > 0$

compression $\Rightarrow N < 0, \sigma < 0$

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Etude des déformations

□ Déformations longitudinales

On se place dans le domaine élastique (petites déformations, réversibles), la loi de Hooke est donc valable

$$\sigma = E\varepsilon$$

Comme nous l'avons vu précédemment, ε est l'allongement unitaire et vaut

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Or on a

$$\sigma = \frac{N}{S} = E\varepsilon = E \frac{\Delta L}{L_0}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

On obtient donc :

$$\Delta L = \frac{NL_0}{ES}$$

ΔL : allongement de la poutre (mm)

L_0 : longueur initiale de la poutre (mm)

σ : contrainte normale (MPa)

N : effort normal en N

S : aire de la section droite en mm²

E : module de Young (MPa)

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

En traction, la poutre s'allonge ` $\Delta L > 0$

En compression, la poutre raccourcit ` $\Delta L < 0$

□ Effet thermique

Lorsqu'une poutre est soumise à une variation de température ΔT , elle subit une dilatation thermique ΔL_{Th} . Celle-ci est de la forme:

$$\Delta L_{Th} = \alpha L_0 \Delta T$$

Avec :

α : coefficient de dilatation thermique ($^{\circ}\text{C}^{-1}$),

L_0 : longueur initiale de la barre,

ΔT : variation de température ($^{\circ}\text{C}$).

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Remarque :

lorsqu'une barre est soumise à un effort normal N et à une variation de température ΔT , d'après le principe de superposition, on a:

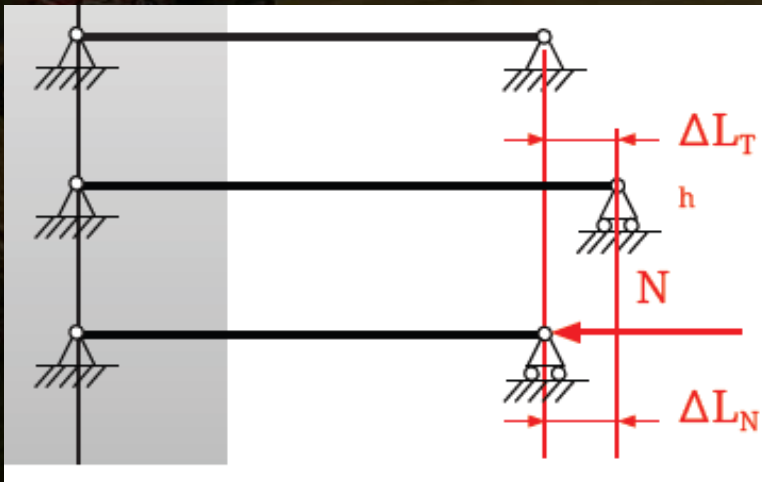
$$\Delta L_{Totale} = \Delta L_N + \Delta L_{Th}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Si la poutre est libre de se dilater, la variation de longueur se fait **sans contrainte**.

Si la dilatation est empêchée, il y a apparition d'une **contrainte normale de traction ou de compression** en fonction du signe de ΔT .



$$\Delta L_{Th} = \alpha L_0 \Delta T$$

$$\Delta L_N = \frac{NL}{ES}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

$$\Delta L_{Totale} = \Delta L_N + \Delta L_{Th} = 0$$

$$\Delta L_{Totale} = \frac{NL}{ES} + \alpha L_0 \Delta T = 0$$

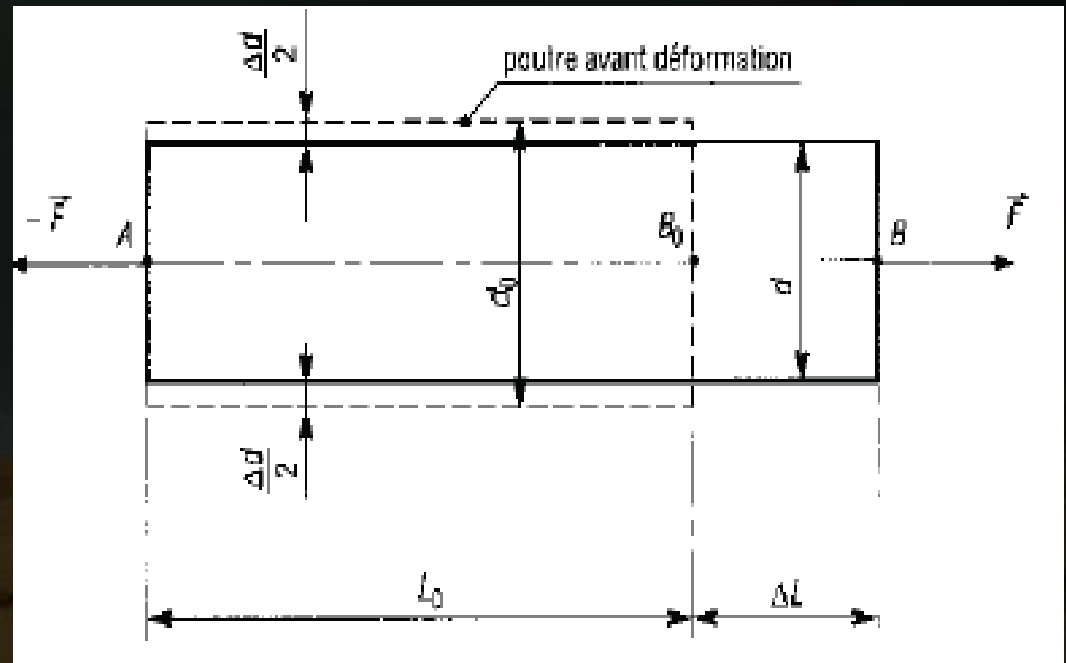
$$N = -\alpha ES \Delta T$$

Lorsqu'une poutre s'allonge dans la direction longitudinale sous l'effet de N , on observe une contraction dans la

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

$$\varepsilon_y = \frac{d - d_0}{d_0}$$



On constate une proportionnalité entre les déformations transversales et les déformations longitudinales.

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$$

ν : Coefficient de Poisson
(entre 0.1 et 0.5, 0.3 pour les aciers)

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Dimensionnement

Afin de tenir compte d'incertitudes concernant les charges appliquées au solide, les conditions d'utilisation ou les caractéristiques mécaniques du matériau, on introduit un **coefficient de sécurité s**.

Le dimensionnement des pièces mécaniques se fera en limitant la valeur de la contrainte normale à une valeur notée R_{pe} (résistance pratique à l'extension) définie par :

$$R_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

On doit vérifier

$$\sigma \leq R_{pe}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

De même en compression, on doit vérifier :

$$\sigma \leq R_{pc}$$

Avec,

$$R_{pc} = \frac{\sigma_c}{S}$$

R_{pc} la résistance pratique à la compression :

S : Coefficient de sécurité

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

□ Condition de déformation

Pour des raisons fonctionnelles, il est parfois important de limiter l'allongement à une valeur ΔL_{lim} . On obtient donc l'inéquation:

$$\Delta L \leq \Delta L_{lim}$$

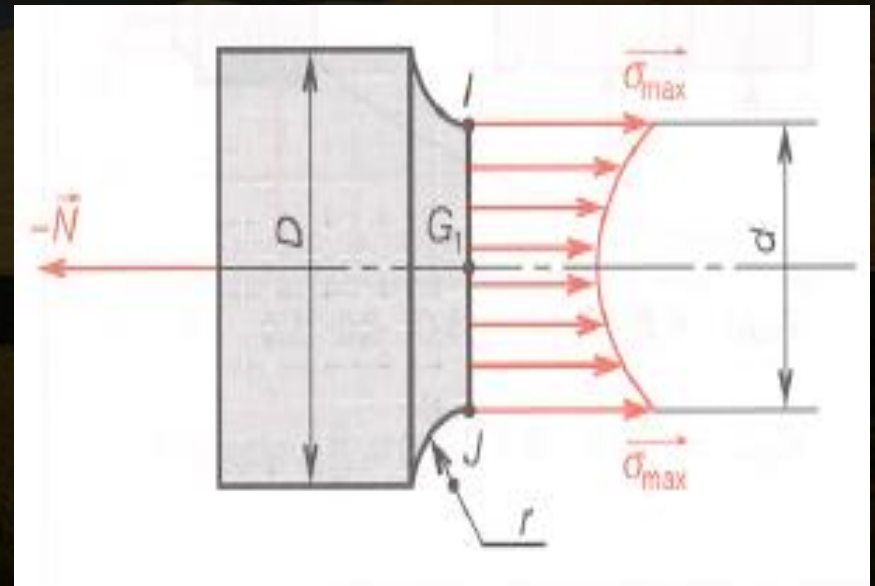
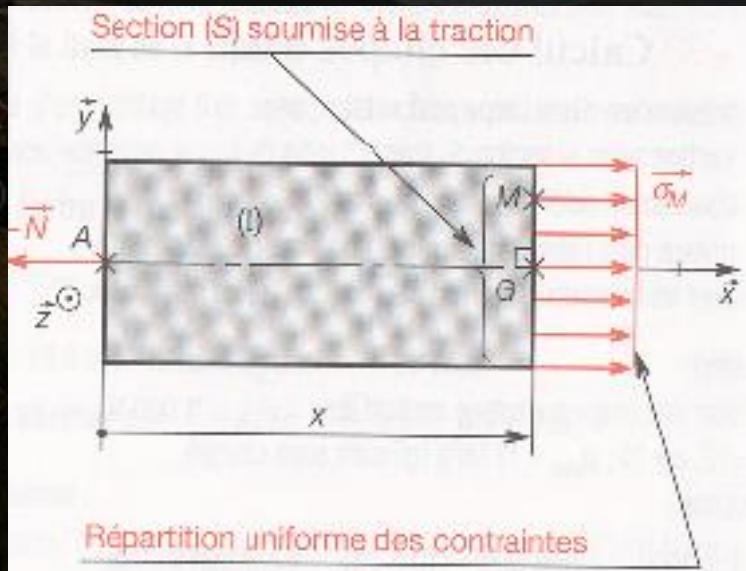


Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Concentration de contraintes

Lorsqu'une poutre possède une variation brusque de sa section, la répartition de la **contrainte normale** n'est plus uniforme à **Proximité** de la discontinuité de section.



Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom}$$

Avec

$$\sigma_{nom} = \frac{N}{S}$$

K_t : coefficient de concentration de contrainte (il est fonction de la forme de la pièce et de la nature du changement de section).

σ_{nom} : contrainte nominale

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Les treillis

On appelle **treillis** (ou **système triangulé** ou **structure réticulée**) un ensemble d'éléments assemblés les uns aux autres à leurs extrémités par des articulations.

Ces éléments sont appelés **barres**. Le point de rencontre des barres d'un treillis s'appelle **un noeud**.

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Hypothèses

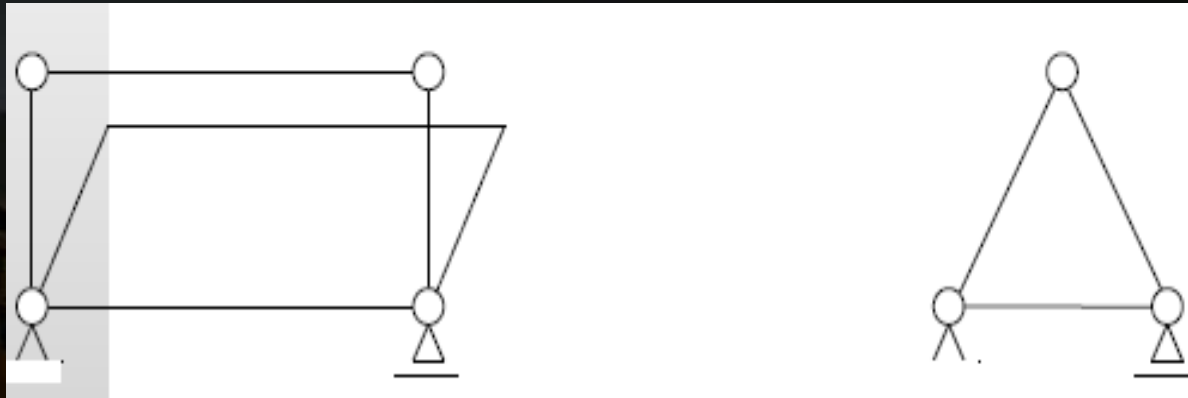
- ❑ Les assemblages sont géométriquement invariables.
- ❑ Les forces sont **ponctuelles et contenues dans le plan de la structure.**
- ❑ Le poids des barres est négligé.
- ❑ Les forces agissent aux noeuds qui sont des articulations.
- ◊ **Compte tenu des hypothèses, les barres sont soumises soit à de la traction, soit à de la compression**

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Stabilité d'un treillis

Considérons les deux cas suivants:



Un treillis rectangulaire n'est pas stable.

3 barres formant un triangle forment une structure stable qui ne peut s'aplatir. Le triangle est donc la cellule de base d'un treillis.

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (tracion-compression)

Isostatisme d'un treillis

Les inconnues de notre problème sont les **b efforts** normaux dans les barres et les **r réactions d'appuis**.

L'étude d'un treillis se fait par **l'équilibre de chaque noeud**.

Les équations d'équilibre de la statique sont au nombre de deux (résultantes sur x et sur y, pas d'équation de moments puisque les barres sont concourantes au noeud).

L'équilibre des **n noeuds du treillis** donne donc **$2n$** équations.

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (Tracion-compression)

Soit h , le degré d'hyperstatisme du treillis, défini de la manière suivante:

$$h = b + r - 2$$

- ❑ Si $h=0$, le treillis est isostatique.
- ❑ Si $h>0$, le treillis est hyperstatique.
- ❑ Si $h<0$, le treillis est hypostatique

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Méthode des noeuds

On peut résoudre un treillis en procédant progressivement, noeud par noeud, c'est à dire en écrivant l'équilibre d'un noeud préalablement isolé

Méthode de Ritter

Cette méthode consiste à réaliser une coupe dans le treillis qui ne sectionne que trois barres dont deux sont concourantes en un point appelé point de Ritter. On isole ainsi le treillis en deux parties. Il suffit d'isoler une de ces deux parties et d'exprimer l'équilibre de ce système soumis à l'action des forces qui le sollicitent directement et aux efforts normaux qui naissent dans les barres coupées.

Résistance des Matériaux-RDM1

VI. Sollicitation simple (traction-compression)

Résolution d'un treillis

1. Déterminer h le degré d'hyperstatisme de la structure,
2. Si $h=0$, structure isostatique, on peut la résoudre,
3. Calcul des réactions d'appuis,
4. Détermination des efforts et de la nature des sollicitations dans toutes les barres. On pourra employer la méthode des noeuds ou celle de Ritter.
5. On pourra récapituler les résultats dans un tableau

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion simple)

Une section droite est sollicitée en flexion simple si et seulement si un unique moment fléchissant est non nul et que l'effort normal est nul. C'est-à-dire que :

□ M_z ou M_y non nul et $N = 0$





Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

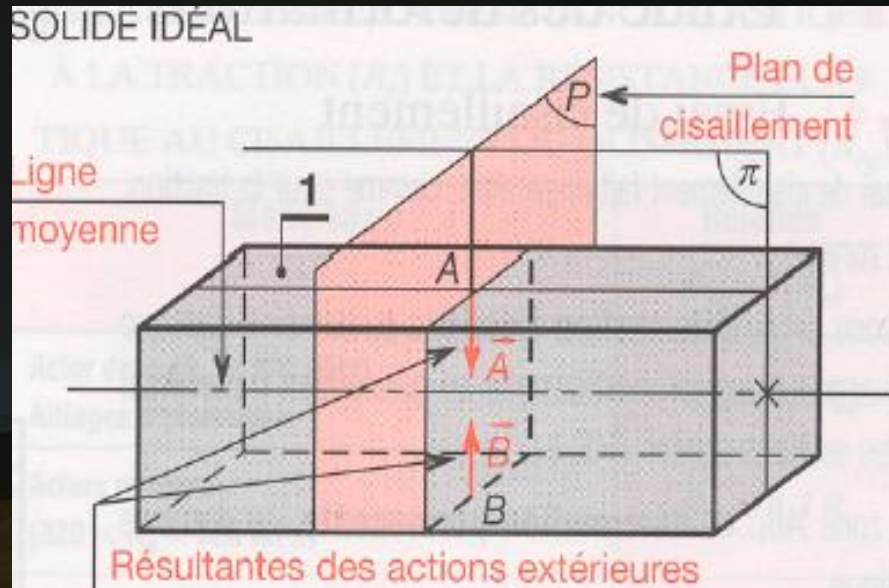
Hypothèses

Le solide est composé d'un matériau homogène et isotrope,

- ☐ Sa ligne moyenne est rectiligne,
- ☐ La section droite est constante sur toute la longueur,
- ☐ Le solide a un plan de symétrie vertical,
- ☐ Les actions extérieures sont modélisables en A et B, situés dans le plan de symétrie, par deux résultantes verticales, directement opposées, situées dans le plan de cisaillement (P) perpendiculaire à la ligne moyenne

Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)



Définition

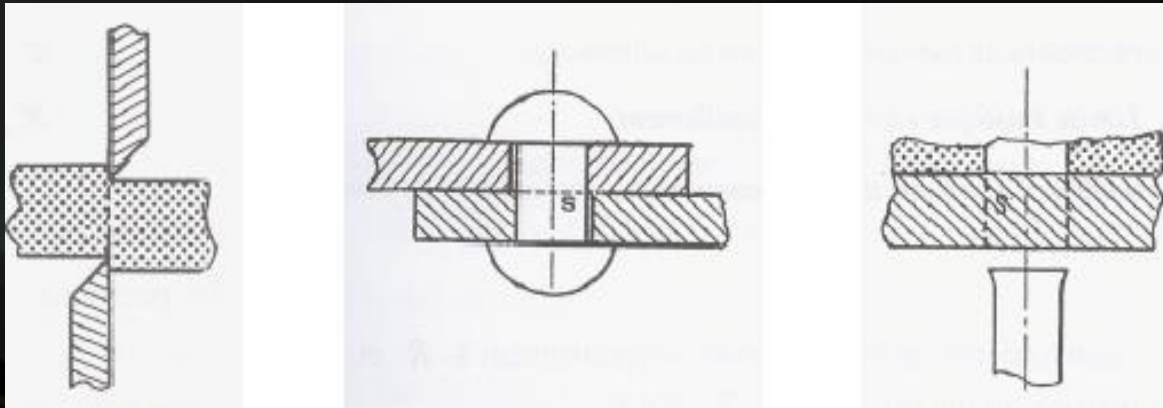
Une poutre est sollicitée **au cisaillement simple** si les forces de cohésion n'ont qu'une composante tangentielle (effort tranchant).

$$N = 0, M_t = M_{fy} = M_{fz} = 0$$

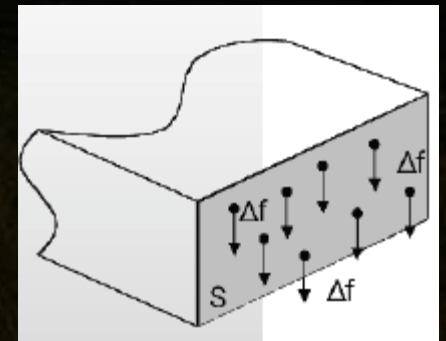
Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

- De plus, dans les cas que nous étudierons, $T_z=0$



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S) . On considère qu'il y a répartition uniforme des contraintes dans La section droite



Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

La contrainte de cisaillement τ est en Mpa ou N/mm²

$$\tau = \frac{T}{S}$$

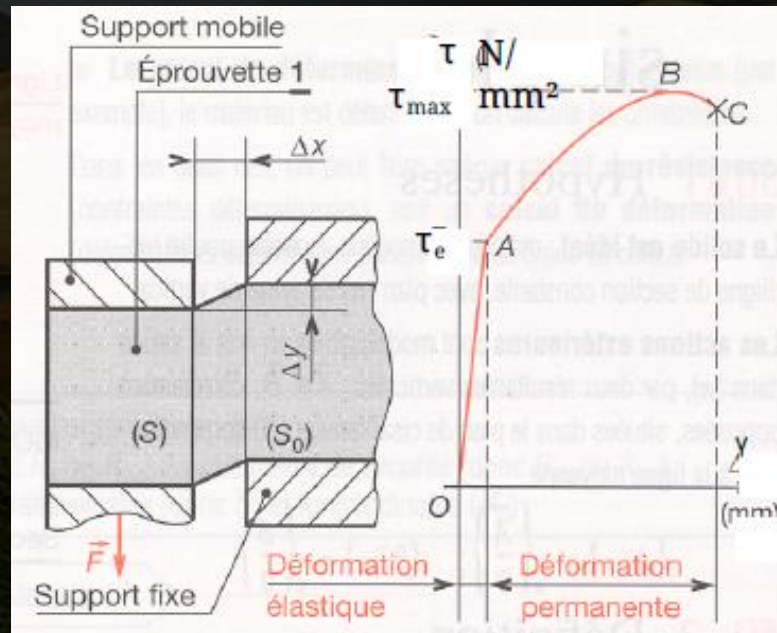
T : effort tranchant en N

S : aire de la section droite cisailée en mm² . (*S représente l'aire totale soumise au cisaillement. Cela signifie que s'il y a plusieurs plan de cisaillement, il faut considérer l'aire de la section droite, multipliée par le nombre de plans de cisaillement*).

Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

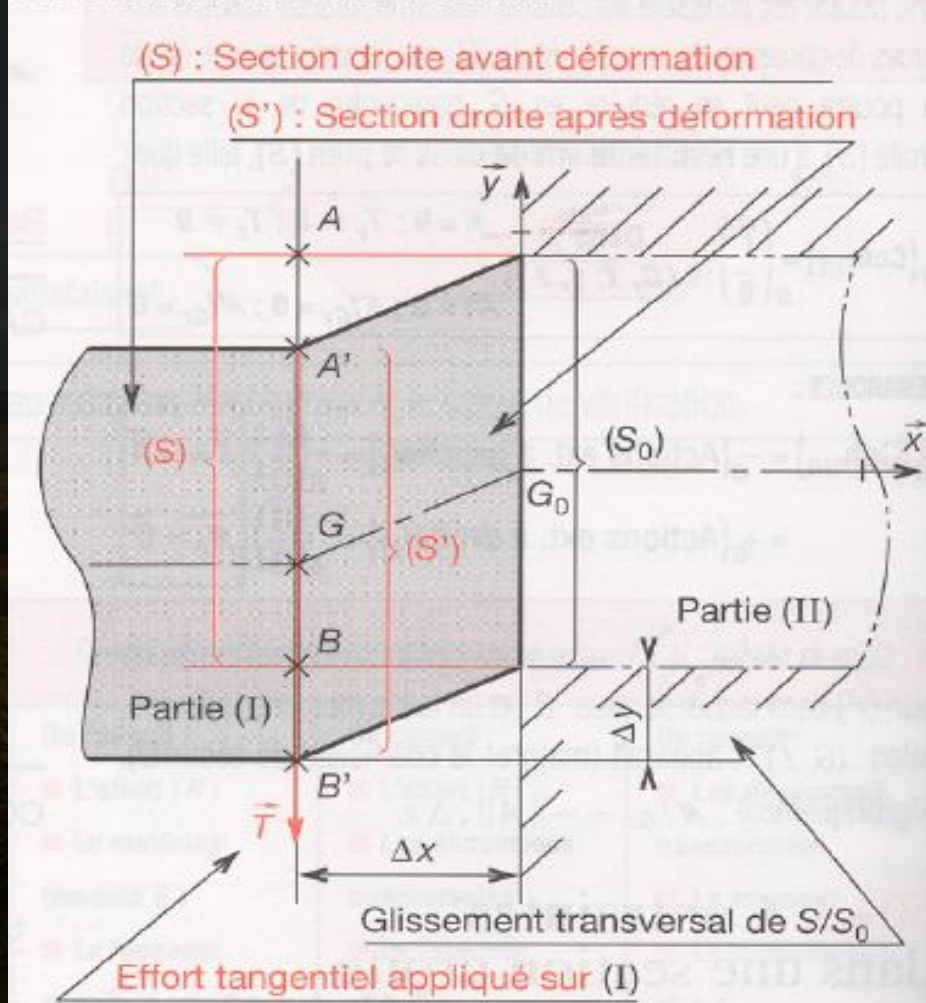
Le diagramme de l'essai de cisaillement à la même allure que celui de l'essai de traction. Pour l'essai de cisaillement, l'abscisse représente l'angle de glissement γ (en radians) de la section S par rapport à la section S0 et l'ordonnée la contrainte de cisaillement.



Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

DÉFORMATION D'UNE POUTRE



$$\tan \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\gamma \text{ est petit} \Rightarrow \tan \gamma = \gamma$$

on obtient

$$\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

Loi de HOOKE

Comme pour l'essai de traction, l'expérience montre que, dans le domaine élastique, il y a proportionnalité entre la contrainte et les déformations.

La loi de HOOKE en cisaillement s'écrira :

$$\tau = G.\gamma$$

Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

G représente le module d'élasticité transversale (ou module de cisaillement ou de Coulomb) et est exprimé en MPa (N/mm²). Comme E, G est une caractéristique du matériau, déterminée expérimentalement. Il existe une relation entre G, E et ν :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Résistance des Matériaux-RDM1

V.sollicitation simple (Cisaillement simple)

Condition de résistance

Le dimensionnement des solides soumis au cisaillement se fera en limitant la valeur de la contrainte tangentielle à une valeur notée R_{pg} (résistance pratique au glissement = contrainte tangentielle admissible τ_{adm}) définie par :

$$R_{pg} = \frac{\tau_e}{s}$$

On doit vérifier que

$$\tau = \frac{T}{S} \leq R_{pg}$$



Résistance des Matériaux

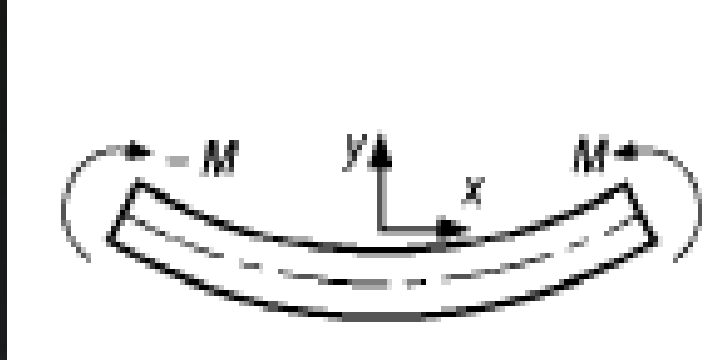
sollicitation simple (Flexion pure)

I. Hypothèses

- ☐ Le solide est composé d'un matériau homogène et isotrope
- ☐ Sa ligne moyenne est rectiligne,
- ☐ La section droite est constante et possède un plan de symétrie,
- ☐ Les actions extérieures dans les sections extrêmes sont modélisables par deux moments opposés contenus dans le plan de symétrie

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)



Flexion pure

Une poutre est sollicitée à la flexion pure si **le seul élément de réduction au centre de gravité de chaque section des forces de cohésion est un moment perpendiculaire au plan de symétrie appelé moment de flexion.**

$$N=T_y=T_z=0, M_t=0, M_{fy} \text{ et/ou } M_{fz} \neq 0$$

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

Observation

Les sections droites de la poutre ne se déforment pas,
Elles se déplacent en restant perpendiculaires à **la ligne moyenne qui s'incurve mais ne s'allonge pas.**

Par conséquent, deux sections droites voisines tournent l'une par rapport à l'autre d'un angle élémentaire $\Delta\alpha$ autour de l'axe z , normal au plan de symétrie.

La déformation d'ensemble observée résulte de la composition de toutes les rotations relatives de toutes les sections.

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

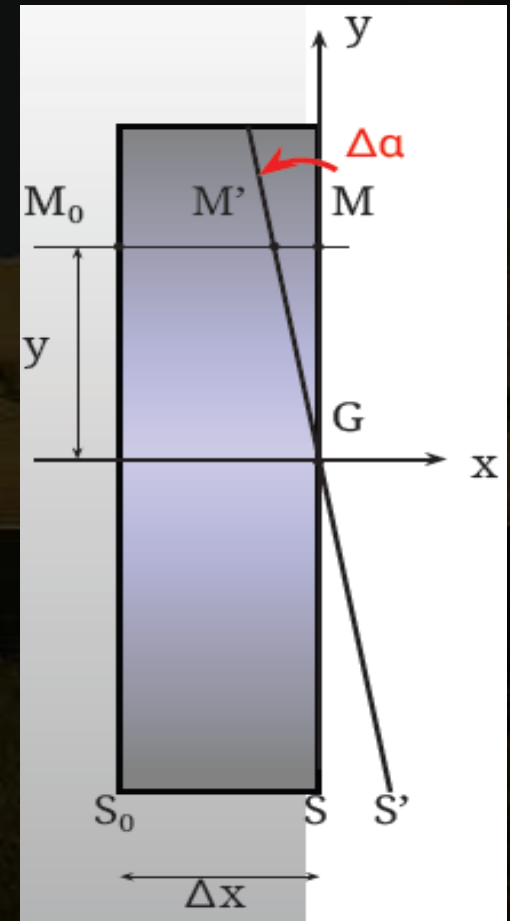
On considère un élément de longueur Δx , délimité par les sections S_0 et S . M_0M est une fibre de cet élément située à une distance y de la ligne moyenne.

Si on soumet la section S à la flexion, Elle tourne d'un angle $\Delta\alpha$ autour de Gz .

On appelle S' la section déformée et M' représente la position de M après déformation

D'après la loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta\ell}{\ell}$$



Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

On a $\ell = \Delta X$ et $-\frac{MM'}{y} = \frac{\Delta \ell}{y} = \tan \Delta \alpha \approx \Delta \alpha$

D'où

$$\Delta \ell = -y \Delta \alpha$$

Finalement, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma = -E y \frac{\Delta \alpha}{\Delta X}$$

y: position de la fibre étudiée par rapport à la ligne

- moyenne

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

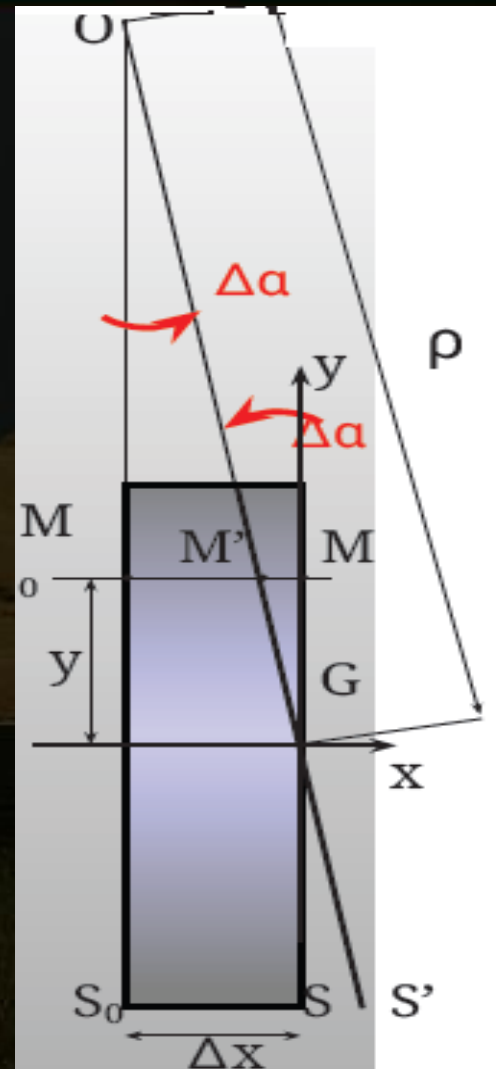
Si on prolonge toutes les sections déformées, elles concourent toutes en un point O, appelé centre de courbure. La distance OG est appelée ρ , rayon de courbure

On a

$$\frac{\Delta X}{\rho} = \tan \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$$

d'où

$$\sigma = - \frac{E y}{\rho}$$



Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

Détermination de l'axe neutre ($\sigma = 0$)

La force normale élémentaire agissant sur chaque dS vaut :

$$dN = \sigma dS$$

On sait que l'effort normal N est nul, on peut donc écrire :

$$N = \iint -\frac{Ey}{\rho} dS = \frac{-E}{\rho} \iint y dS = 0$$

On a donc le moment statique nul \Rightarrow l'axe neutre passe par le centre de gravité G de S

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

Relation entre contrainte et moment de flexion On coupe la poutre en une section (S) et on exprime que la partie isolée est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs et des forces de cohésion dans la section (S).

On sait que la force normale élémentaire

$$dN = \sigma dS$$

Et le moment élémentaire s'écrit

$$dM = y\sigma dS$$

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

L'équilibre de la partie isolée s'écrit

$$M_f = - \iint y \sigma dS$$

$$M_f = - \iint -\frac{E}{\rho} y^2 dS = \frac{E}{\rho} \iint \underline{y^2 dS}$$

$$M_f = \frac{E}{\rho} I_{Gz}$$

→

$$\rho = -\frac{E}{\sigma} y$$

→

$$M_f = -\frac{I_{Gz}}{y} \sigma$$

Résistance des Matériaux

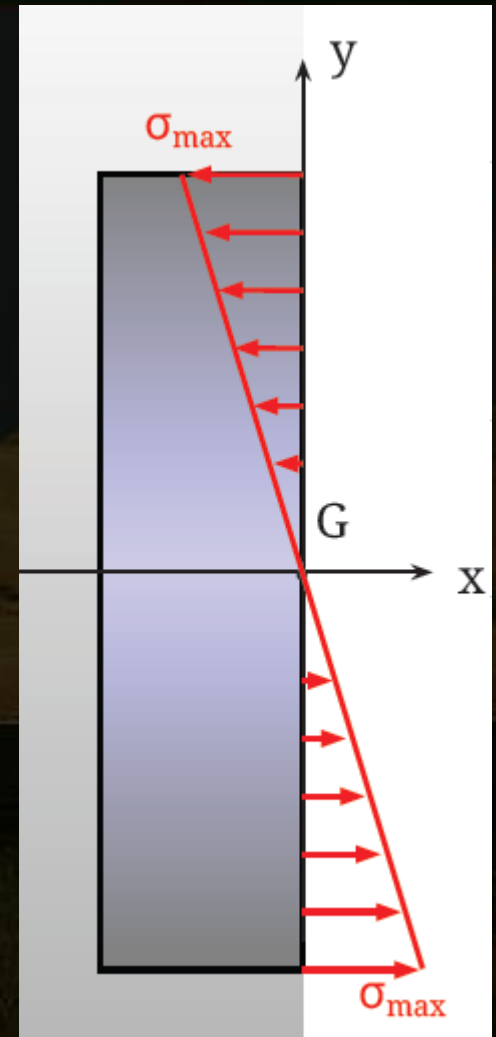
sollicitation simple (Flexion pure)

Finalement, on obtient:

$$\sigma = -\frac{M_f}{I_{Gz}}y$$

Remarques:

- ❑ *la distribution de la contrainte normale dans une section est **linéaire**,*
- ❑ *l'axe neutre ($\sigma=0$) passe par le centre de gravité des sections,*
- ❑ *la contrainte normale est maximale (σ_{max}) pour la fibre la plus éloignée de c.d.g. ($y_{max}=h/2$)*



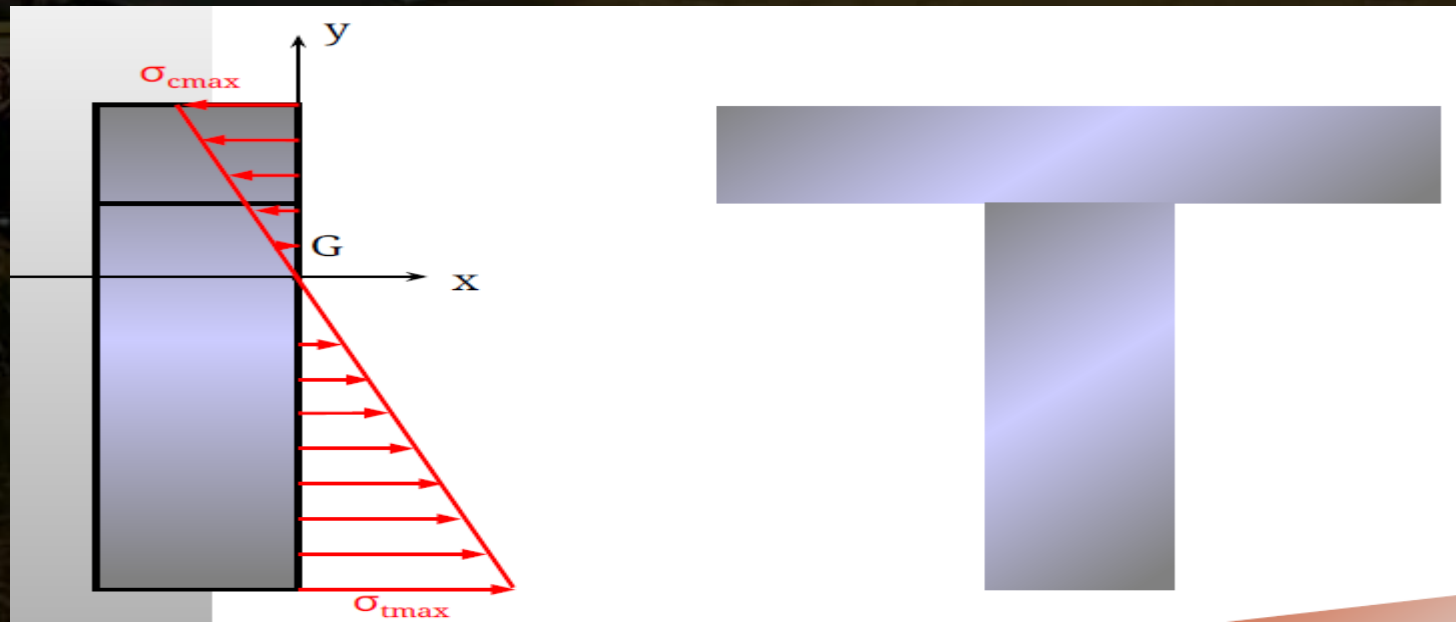
Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

dans le cas des sections symétriques par rapport au Gz

$$\sigma_{max} = - \frac{M_f}{I_{Gz}} y_{max}$$

Cas d'une section non symétrique par rapport au Gz



Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

Etude des déformations

Nous avons montré que :

$$\sigma = - \frac{Ey}{\rho}$$

Or :

$$\sigma = - \frac{M_f}{I_{Gz}} y$$

L'expression analytique du rayon de courbure d'une courbe d'équation $y=f(x)$ est :

$$\rho = \frac{(1 + v'^2)^{\frac{3}{2}}}{v''}$$

Comme v' est petit (petites déformations), v'^2 négligeable / 1, il vient :

$$\rho \approx \frac{1}{v''}$$

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

On obtient donc l'équation différentielle de la déformée

$$v'' = -\frac{M_f}{EI_{Gz}}$$

Remarques :

- v représente la flèche de la poutre,
- v' représente la rotation de la section.
- On a une équation différentielle donnant l'expression de v'' , pour trouver la flèche v , il faut donc intégrer deux fois. On obtient donc des constantes d'intégration. Pour connaître leurs valeurs, il faut appliquer les conditions aux limites de la poutre étudiée.

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

Dimensionnement

Condition de résistance

On limitera la valeur de la contrainte normale à une valeur notée R_{pe} (résistance pratique à l'extension = contrainte normale admissible σ_{adm}) définie par :

$$R_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

Limite élastique à l'extension

Coefficient de sécurité

On obtient ainsi l'inéquation suivante:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_f|}{I_{Gz}} y_{max} \leq R_{pe}$$

Résistance des Matériaux

sollicitation simple (Flexion pure)

Condition de déformation

On peut limiter la flèche maximale (v_{max}) à une valeur limite (v_{lim}) imposée par le type de construction ou les contraintes technologiques.

On obtient ainsi l'inéquation suivante:

$$V_{max} = V_{lim}$$

TD N°1**Résultante des forces et du moment****Exercice 1 :**

Déterminer la résultante des forces parallèles de la figure 1

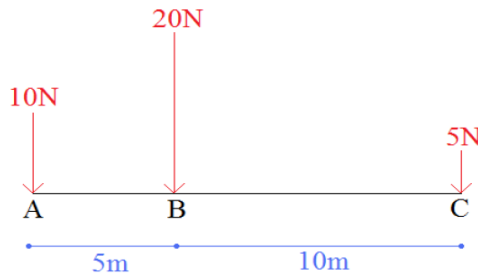


Fig 1

Exercice 2 :

Déterminer algébriquement la résultante des trois forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ appliquées sur un objet indéformable de centre de gravité G (voir la figure 2)

On prendra : $F_1 = 5N, F_2 = 2N, F_3 = 4N$ et $\alpha = 30^\circ$

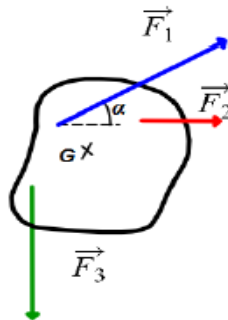


Fig 2

Exercice 3 :

Calculer la résultante R des 4 forces appliquées comme le montre la figure 3

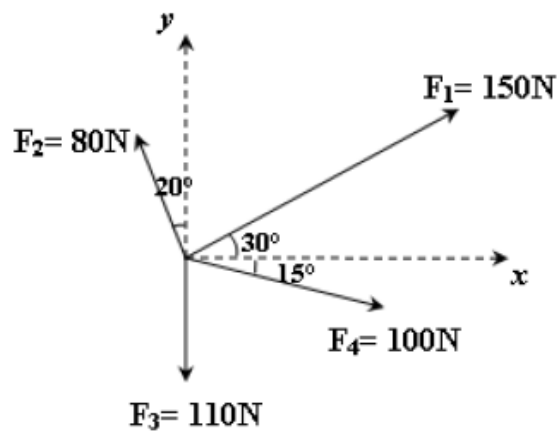


Fig 3

Exercice 4 :

Un manchon qui peut glisser dans un axe vertical est sollicité par les trois forces représentées dans la figure 4. La direction de F peut varier. Dites s'il est possible que F forme avec les deux autres forces une résultante R horizontale, sachant que la grandeur de F est :

- a) 2135 N,
- b) 1245 N.

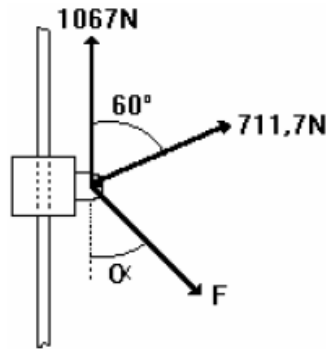


Fig 4

Exercice 5 :

Soit un repère orthonormé XOY dans le plan. Déterminer la force résultante et le moment résultant par rapport à O des forces F_1 et F_2 (voir la figure 5)

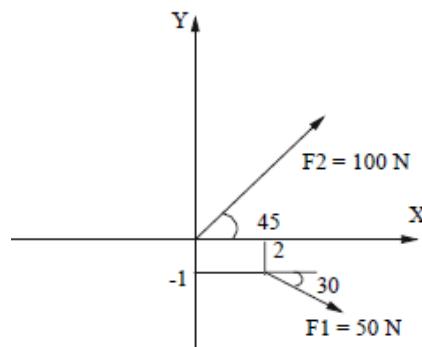


Fig 5

Exercice 6 :

Quel est le module minimal de F_2 et l'angle correspondant pour que le moment résultant par rapport à O soit nul ? (voir la figure 6)

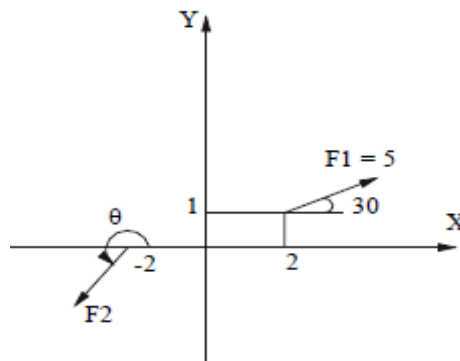


Fig 6

Exercice 7 :

Calculer la résultante des forces et du moment du système de la figure ci-dessous et déterminer des points d'intersection de la ligne d'action de la résultante avec AB et CD (voir la figure 7).

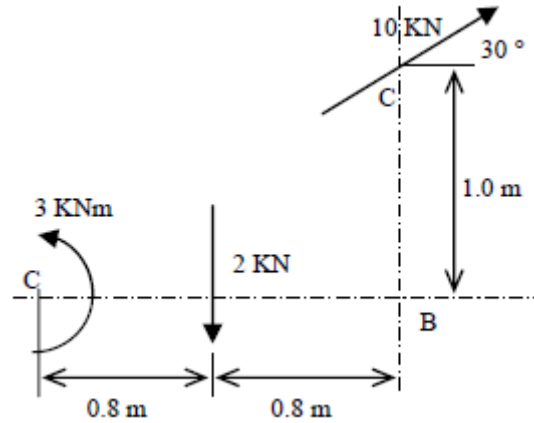


Fig 7

TD N°2**Réaction d'appui****Exercice 1**

Calculer les réactions d'appui de la poutre montée dans la figure 1

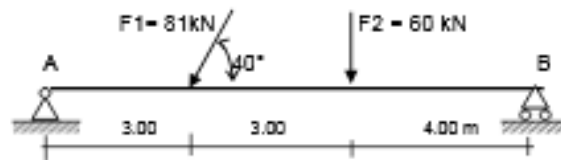


Fig 1

Exercice 2

Soit la poutre encastree en A et supportant un effort incliné \vec{F} (voir la figure 2). Donner les réactions d'appui au point A

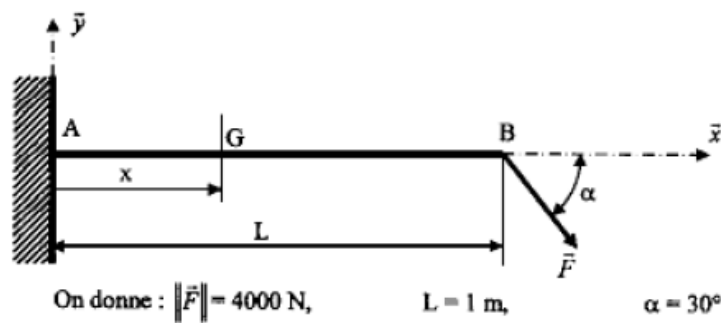


Fig 2

Exercice 3

Calculer les réactions d'appui de l'arc à trois articulations montré dans la figure 3

Données : $F=80$ kN, $L = 40$ m , $h = 20$ m

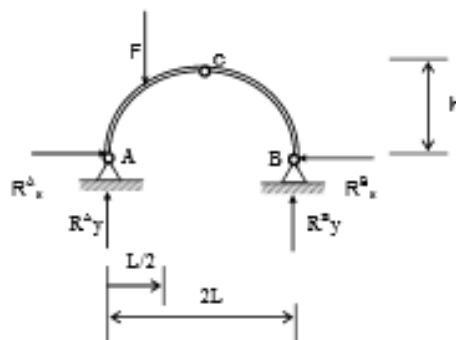


Fig 3

Exercice 4

Soit le système réticulé montré par la figure 4. Il est soumis à une force horizontale $F_1=30 \text{ kN}$, et une force verticale $F_2=40 \text{ kN}$. Toutes les barres du système ont la même section $A=100 \text{ cm}^2$. On demande de déterminer les réactions d'appui aux points A et D

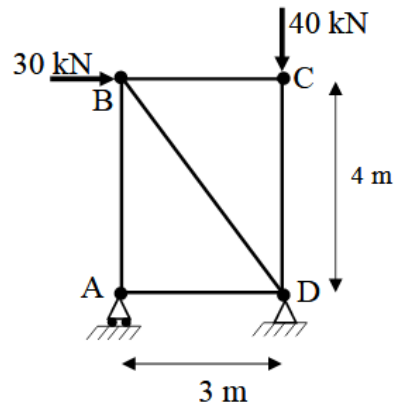


Fig 4

Exercice 5

Déterminer les réactions d'appui de ce système (voir la figure 5)

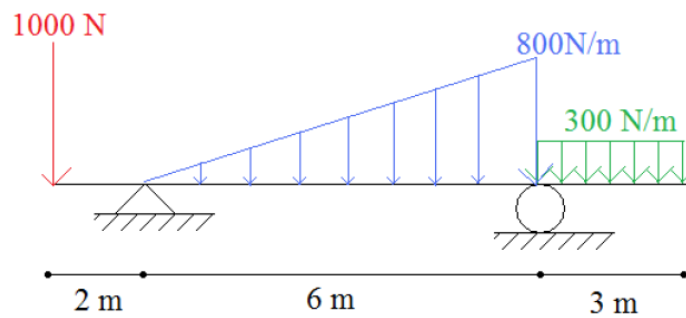
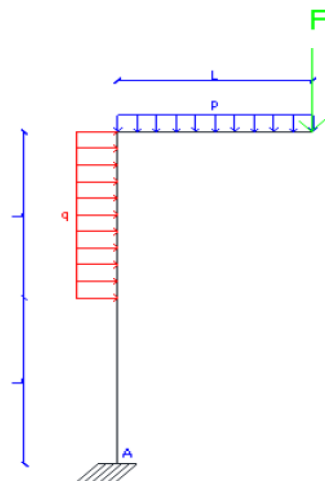


Fig 5

Exercice 6

Donner les réactions d'appui au point A



Module : Résistance des matériaux RDM 1

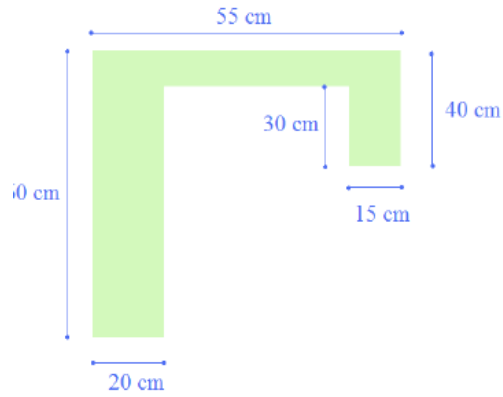
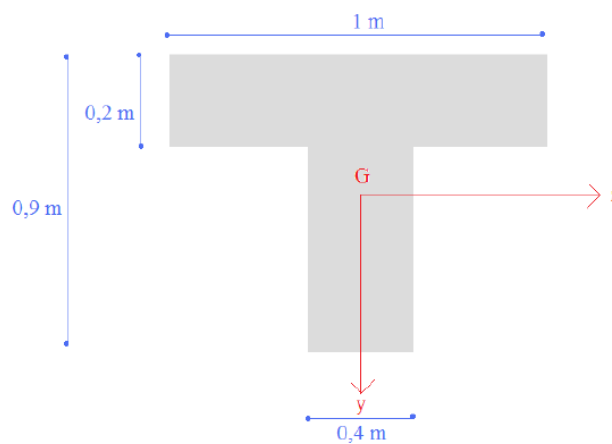
Département de l'architecteur

Université de Seddik Benyahia- Jijel

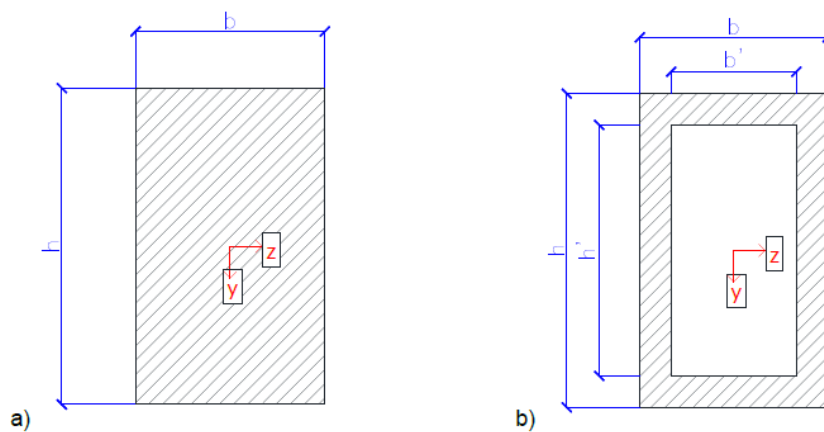
Année universitaire : 2019-2020

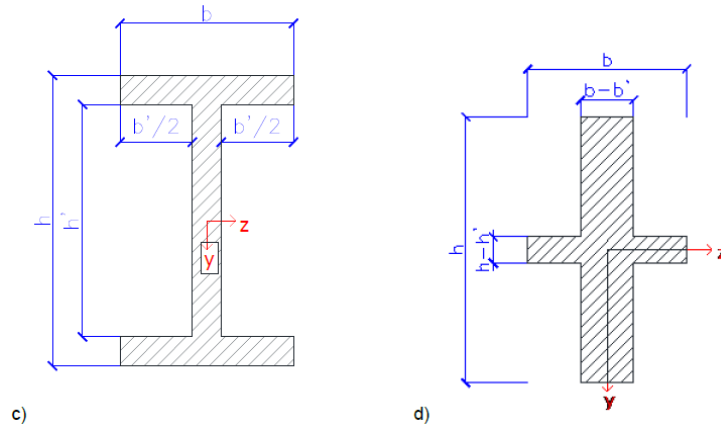
TD N°3**Caractéristiques des sections droites****Exercice 1**

Déterminer la position du centre de gravité de cette section

**Exercice 2**Calculer le moment d'inertie I_{GZ} **Exercice 3**

Calculer les moments d'inertie des sections suivantes

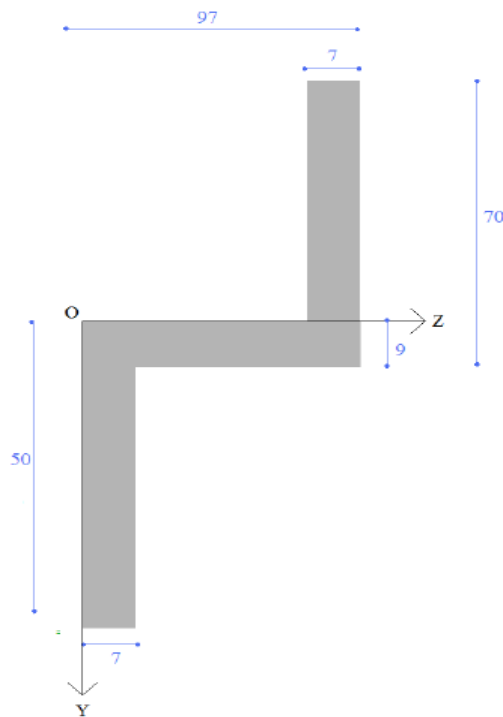




Applications numériques : $h = 1,2\text{ m}$; $b = 0,7\text{ m}$; $b' = 0,3\text{ m}$; $h' = 0,9\text{ m}$

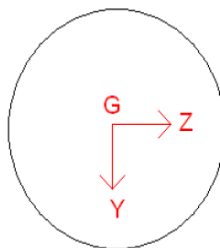
Exercice 4

Calculer les moments d'inertie I_{GZ} et I_{GY} de la cornière suivante. Déterminer les axes principaux et les moments d'inertie principaux



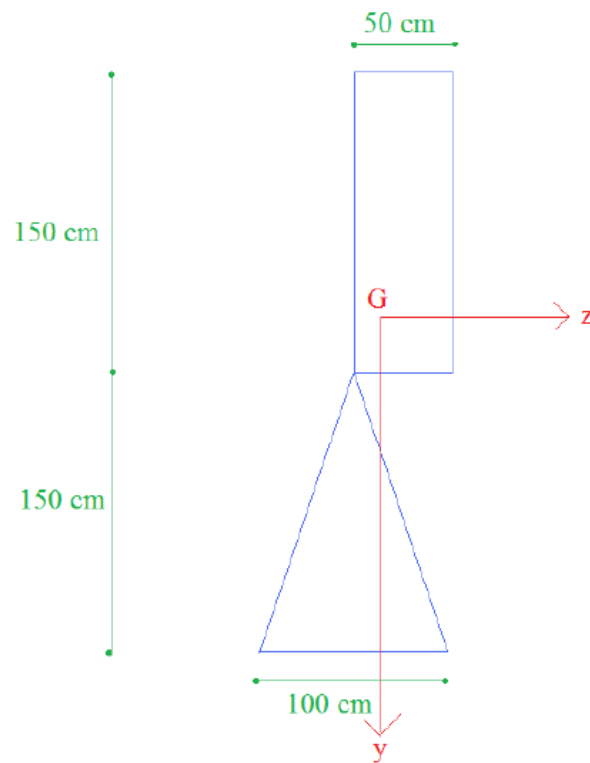
Exercice 5

Calculer I_z avec un rayon égal à R



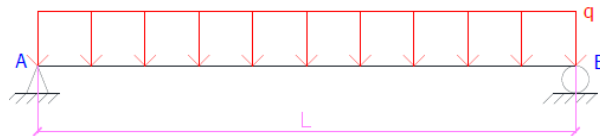
Exercice 6

Déterminer les inerties principales et les directions principales de la section suivante :

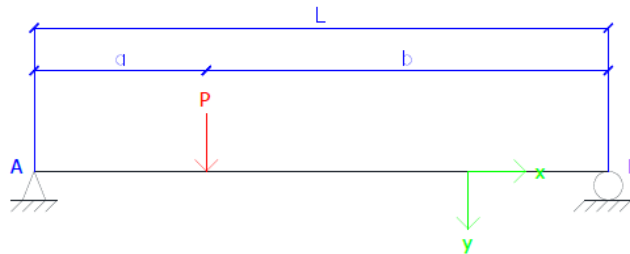


TD N° 4**Calculs des diagrammes de sollicitations par
La méthode des coupures****Exercice 1**

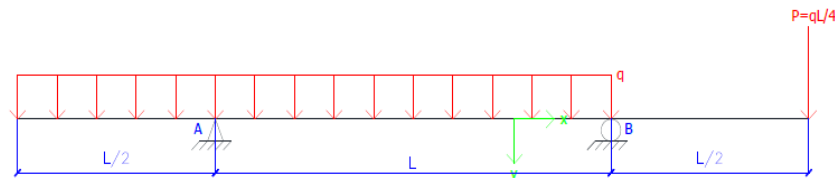
Donner les diagrammes des sollicitations

**Exercice 2**

Donner les diagrammes des sollicitations

**Exercice 3**

Donner les diagrammes des sollicitations

**Exercice 4**

Donner les diagrammes des sollicitations

