Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique

Aide Multicritère à La Décision (AMCD)

Chapitre 2 (suite)

Méthodes d'AMCD utilisant un critère unique de synthèse

Octobre 2021

Exemple Problème de choix d'une voiture [Suite]

	v_{i1}	v_{i2}	v_{i3}	v_{i3}
Touristique	0.13	0.11	0.13	0.06
Luxe 1	0.19	0.11	0.16	0.16
Luxe 2	0.18	0.11	0.17	0.10
Economique	0.07	0.06	0.14	0.03

PIS= $\begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.11 \\ 0.13 \\ 0.16 \end{pmatrix}$ NIS= $\begin{pmatrix} 0.19 \\ 0.06 \\ 0.17 \\ 0.03 \end{pmatrix}$

$$d_i^* = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - v_j^*)^2} \qquad d_{i*} = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - v_{j*})^2}$$

$$\boldsymbol{S_i = \frac{d_i^*}{d_i^* + d_{i*}}}$$

7.VIKOR (Multicriteria Optimization and Compromise Solution)

- VIKOR (VIseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje)
- VIKOR utilise une **normalisation linéaire** (qui associe 0 à la meilleure alternative et 1 à l'alternative la moins bonne).
- Cette méthode renvoie les solutions qui assurent un **compromis** entre deux stratégies de décision:
  1. **Somme pondérée** (mesuré par l'indice S_i – tous les critères entrent dans l'évaluation de l'alternative)
  2. **Opérateur Disjonctif** (mesuré par l'indices R_i – un critère domine les autres dans l'évaluation de l'alternative)
- Sans perte de généralité, on suppose dans ce qui suit que tous les critères sont des **critères bénéfices.**

1. Déterminer a_j^+ et a_j^- pour tous les critères tel que :

$$a_j^+ = \max_i a_{ij} \quad \text{et} \quad a_j^- = \min_i a_{ij}$$

2. Calculer pour chaque alternative i :

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(\frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-} \right)$$

$$R_i = \max_j \ \omega_j \left(\frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-} \right)$$

3. Pour chaque alternative i combiner S_i *et* R_i comme suit :

$$Q_i = v \left(\frac{S_i - S^+}{S^- - S^+} \right) + (1 - v) \left(\frac{R_i - R^+}{R^- - R^+} \right)$$

$$S^+ = \min_i S_i \quad \text{et} \quad R^+ = \min_i R_i$$

$$S^- = \max_i S_i \quad \text{et} \quad R^- = \max_i R_i$$

$0 < v < 1$ tel que si $v > 0.5$: vote avec la règle de majorité

si $v \approx 0.5$: consensus

si $v < 0.5$: véto

Ordonner (du MIN au MAX) toutes les alternatives selon S_i , R_i et Q_i (il y aura 3 listes en résultat).

Choix des solutions de compromis

Proposer comme solution de compromis **a’** l’alternative classée première selon Q_i, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- ✓**C1(avantage acceptable)** $Q_i(a'') - Q_i(a') \geq \mathbf{DQ}$ où $\mathbf{DQ} = 1/m - 1$
- ✓**C2(stabilité dans la prise de décision)** **a’** est la meilleure alternative selon S_i et/ou R_i.

Si ces conditions sont violées alors proposer un ensemble de solutions de compromis, comme suit:

1. **Si seulement C2** n’est pas satisfaite alors renvoyer **a’ et a’’**
2. **Si C1 n’est pas satisfaite** alors renvoyer les M premières alternatives **a’ , a’’, …, a$^{(M)}$** la dernière alternative M doit vérifier la relation :

$$Q_i\left(a^{(M)}\right) - Q_i(a') < \mathbf{DQ}$$

TD 2

Exercice (TOPSIS vs VIKOR)

1) Un alpiniste débutant doit choisir entre trois destinations possibles. Deux critères sont considérés le risque (C_1) et l'altitude (C_2) les deux ayant la même importance. Considérons les deux critères équivalents :

$$\boldsymbol{C_1' = C_1 + 5}$$

$$\boldsymbol{C_2' = \frac{C_2}{1000} - 1}$$

Soit la matrice des performances en termes des critères C_1 et C_2 :

	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$
Risque	1	2	5
Altitude	3000	3750	4500

1. Classer les alternatives avec TOPSIS, VIKOR (selon C_1/C_2 puis C_1'/C_2').
2. Commenter.

Table 3
Results obtained by VIKOR and TOPSIS

		Alternatives			Ranking
		A_1	A_2	A_3	
Linear normalization $d(f) = d(\phi)$	d_{1j}	0	0.25	1	A_1, A_2, A_3
	d_{2j}	1	0.5	0	A_3, A_2, A_1
VIKOR	S	0.5	0.375	0.5	$A_2, A_1 \approx A_3$
	R	0.5	0.25	0.5	$A_2, A_1 \approx A_3$
	Q	1	0	1	$A_2, A_1 \approx A_3$
TOPSIS vector normalization	$D^*(f)$	0.114	0.108	0.365	A_2, A_1, A_3
	$D^-(f)$	0.365	0.280	0.114	A_1, A_2, A_3
	$C^*(f)$	0.762	0.722	0.238	A_1, A_2, A_3
	$D^*(\phi)$	0.154	0.085	0.147	A_2, A_3, A_1
	$D^-(\phi)$	0.147	0.134	0.154	A_3, A_1, A_2
	$C^*(\phi)$	0.489	0.612	0.511	A_2, A_3, A_1

2) Vérifier si la normalisation linéaire et la normalisation vectorielle sont sensibles au changement de l'échelle de mesure.

Exercice (Ordre Lexicographique)

Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\geq_L$ est définie comme suit :

$$x = (x_1, x_2) \geq_L y = (y_1, y_2) \leftrightarrow \ x_1 > y_1 ou (x_1 = y_1 et\ x_2 \geq y_2)$$

Montrer que $\geq_L$ est une relation **d'ordre total.**

Exercice (Somme Pondérée)

Soit la matrice des performances ci-dessous pour trois alternatives et trois critères. Selon la méthode de la somme pondérée, est-il possible d'obtenir l'ordre de préférence suivant : $\boldsymbol{A\ P\ B\ et\ B\ P\ C}$?

	Critère1	Critère2	Critère3
A	1/2	1/4	1/2
B	9/10	1/4	1/5
C	1/5	1/4	9/10

Exercice (AHP+ TOPSIS)

Afin de choisir une école privée pour leur enfant (parmi les écoles A, B, C), les parents ont considéré trois critères : ***la réputation de l'école*** (C1), la ***proximité à la maison*** (C2) et bien sûr les ***frais de scolarité*** (C3). En discutons avec les parents, nous avons pu établir les matrices de comparaison des paires de critères et de paires d'alternatives ci-dessous.

	C1	C2	C3
C1	1	3	5
C2	1/3	1	2
C3	1/5	1/2	1

	C1		
	A	B	C
A	1	4	2
B	¼	1	½
C	½	2	1

	C2		
	A	B	C
A	1	1/6	1/2
B	6	1	4
C	2	1/4	1

	C3		
	A	B	C
A	1	1/9	1/2
B	9	1	4
C	2	1/4	1

Pour résoudre ce problème, on vous propose de suivre les étapes suivantes :

1. Fixer les poids et les performances partielles **normalisées** comme dans la méthode AHP.
2. Pour classer les écoles, **continuer** en utilisant TOPSIS.

Corrigé (AHP)

Poids

0,64842048
0,22930283
0,12227669

Performances Partielles

0,57142857	0,10655575	0,08529169
0,14285714	0,69994058	0,7373222
0,28571429	0,19350366	0,17738611

~~**Etape 1** : **Normalisation Vectorielle** des performances partielles~~

$$\cancel{r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_i a_{ij}^2}} \quad \forall\, i = 1, \dots, m \; j = 1, \dots, n}$$

Etape 2: Multiplication par les poids

$$\boldsymbol{v_{ij} = \omega_j\, r_{ij}} \quad \forall\, i = 1, \dots, m \; j = 1, \dots, n$$

Etape 3: Identification des solutions PIS et NIS

PIS = { v_1^*, …, v_j^*,…, v_n^* } = {($\max_i \boldsymbol{v_{ij}}$/ $j \in J_1$), ($\min_i v_{ij}$/ $j \in J_2$)}

NIS = {v_{1*}, …, v_{j*}, …, v_{n*} } = {($\min_i \boldsymbol{v_{ij}}$/ $j \in J_1$), ($\max_i v_{ij}$/ $j \in J_2$)}

J_1 : ensemble des critères bénéfice $\qquad$ J_2 : ensemble des critères coût

Etape 4: Calcul des distances par rapport à PIS et NIS

$$d_i^* = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - v_j^*)^2} \qquad d_{i*} = \sqrt{\sum_j (v_{ij} - v_{j*})^2}$$

Etape 5: Calcul de l'indice de similarité à la solution idéale

$$\boldsymbol{S_i = \frac{d_{i*}}{d_i^* + d_{i*}}}$$

Etape 6 : Ordonner les actions par ordre décroissant des indices de similarité

Corrigé (TOPSIS)

PIS
0,3705
0,161
0,0888

distance ideal			distance anti-ideal	
A	0,15712139		0,2795	
B	0,2795		0,15712139	
C	0,23196418		0,09361389	

indice
0,64014272
0,35985728
0,28753131

Classement des écoles par ordre de préférence : **A, B, C**

8. Méthode EVAMIX(Voogd, 1983)

- EVAMIX (Evaluation of Mixed Criteria)
- Cette méthode a la particularité qu’elle permet de traiter des critères mixtes:
  - Ordinaux (qualitatifs) : l’ensemble de ces critères est noté O
  - Cardinaux (quantitatifs) : l’ensemble de ces critères est noté C
- Elle repose sur la comparaison des paires d’alternatives:
  - Un indice de dominance pour les critères O
  - Un indice de dominance pour les critères C
  - Un score globale est obtenu en combinant les deux indices de dominance.

Etape 1:
Normalisation linéaire des performances

- Pour les critères bénéfice:

$$r_{ij} = \left(\frac{a_{ij} - \min_i a_{ij}}{\max_i a_{ij} - \min_i a_{ij}} \right)$$

- Pour les critères coût:

$$r_{ij} = \left(\frac{\max_i a_{ij} - a_{ij}}{\max_i a_{ij} - \min_i a_{ij}} \right)$$

NB. À la meilleure performance va correspondre la valeur 1

À la plus mauvaise performance va correspondre la valeur 0

Exercice

Le choix d'un robot industriel se fait selon les critères suivants:

- $C_1(kg)$: Charge max ($w_1 = 0.036$)
- $C_2(mm)$: Répétabilité ($w_2 = 0.192$)
- $C_3(mm/s)$: Vitesse max ($w_3 = 0.326$)
- $C_4(points)$: Mémoire max ($w_4 = 0.326$)
- $C_5(mm)$: Portée du bras manipulateur ($w_5 = 0.120$)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Modèle 1	60	0.4	2540	500	990
Modèle 2	6.35	0.15	1016	3000	1041
Modèle 3	6.8	0.1	1727.2	1500	1676
Modèle 4	3	0.1	177	1000	920

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Modèle 1	60	0.4	2540	500	990
Modèle 2	6.35	0.15	1016	3000	1041
Modèle 3	6.8	0.1	1727.2	1500	1676
Modèle 4	3	0.1	177	1000	920

Après la normalisation linéaire on obtient :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Modèle 1	1	0	1	0	
Modèle 2				1	
Modèle 3		1			1
Modèle 4	0	1	0		0

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Modèle 1	60	0.4	2540	500	990
Modèle 2	6.35	0.15	1016	3000	1041
Modèle 3	6.8	0.1	1727.2	1500	1676
Modèle 4	3	0.1	177	1000	920

Après la normalisation linéaire on obtient :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Modèle 1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0.092**
Modèle 2	**0.059**	**0.833**	**0. 355**	**1**	**0.160**
Modèle 3	**0.067**	**1**	**0.656**	**0.4**	**1**
Modèle 4	**0**	**1**	**0**	**0.2**	**0**

Etape 2 :

Calcul des indices de dominance pour chaque paire d'alternatives :

- pour les critères ordinaux

$$\alpha_{ik} = \sum_{j \in O} \omega_j sgn(r_{ij} - r_{kj})$$

$$sgn(r_{ij} - r_{kj}) = \begin{cases} +1 & si\ r_{ij} > r_{kj} \\ 0 & si\ r_{ij} = r_{kj} \\ -1 & si\ r_{ij} < r_{kj} \end{cases}$$

- pour les critères cardinaux

$$B_{ik} = \sum_{j \in C} \omega_j (r_{ij} - r_{kj})$$

$$B_{ik} = \sum_{j \in C} \omega_j (r_{ij} - r_{kj})$$

$$w_1 = 0.036$$
$$w_2 = 0.192$$
$$w_3 = 0.326$$
$$w_4 = 0.326$$
$$w_5 = 0.120$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Modèle 1	1	0	1	0	0.092
Modèle 2	0.059	0.833	0. 355	1	0.160
Modèle 3	0.067	1	0.656	0.4	1
Modèle 4	0	1	0	0.2	0

β_{12}= $0.036 \times (1 - 0.059)$+$0.192 \times (0 - 0.833) + 0.326 \times (1 - 0.355)$
$+ 0.326 \times (0 - 1) + 0.120 \times (0.092 - 0.160) = - 0{,}24995$

β_{ik}	M1	M2	M3	M4
M1	-			
M2		-		
M3			-	
M4				-

β_{ik}	M1	M2	M3	M4
M1	-	-0.249	-0.286	0.116
M2		-	-0.036	0.366
M3			-	0.401
M4				-

β_{ik}	M1	M2	M3	M4
M1	-	-0.249	-0.286	0.116
M2	0.249	-	-0.036	0.366
M3	0.286	0.036	-	0.401
M4	-0.116	-0.366	-0.401	-

Etape 3 :
Normalisation des indices de dominance

$$\gamma_{ik} = \left(\frac{\alpha_{ik} - \min\limits_{k} \alpha_{ik}}{\max\limits_{k} \alpha_{ik} - \min\limits_{k} \alpha_{ik}} \right) - 0.5$$

$$\delta_{ik} = \left(\frac{\beta_{ik} - \min\limits_{k} \beta_{ik}}{\max\limits_{k} \beta_{ik} - \min\limits_{k} \beta_{ik}} \right) - 0.5$$

NB. À l'indice max de dominance va correspondre la valeur 0.5
À l'indice min de dominance va correspondre la valeur -0.5

$$\delta_{ik} = \left(\frac{\beta_{ik} - \min_k \beta_{ik}}{\max_k \beta_{ik} - \min_k \beta_{ik}} \right) - 0.5$$

β_{ik}	**M1**	**M2**	**M3**	**M4**
M1	-	-0.249	-0.286	0.116
M2	0.249	-	-0.036	0.366
M3	0.286	0.036	-	0.401
M4	-0.116	-0.366	-0.401	-

δ_{ik}	**M1**	**M2**	**M3**	**M4**
M1	-		-0.5	0.5
M2		-	-0.5	0.5
M3		-0.5	-	0.5
M4	0.5		-0.5	-

$$\delta_{ik} = \left(\frac{\beta_{ik} - \min_k \beta_{ik}}{\max_k \beta_{ik} - \min_k \beta_{ik}} \right) - 0.5$$

β_{ik}	M1	M2	M3	M4
M1	-	-0.249	-0.286	0.116
M2	0.249	-	-0.036	0.366
M3	0.286	0.036	-	0.401
M4	-0.116	-0.366	-0.401	-

δ_{ik}	M1	M2	M3	M4
M1	-	-0.408	-0.5	0.5
M2	0.209	-	-0.5	0.5
M3	0.185	-0.5	-	0.5
M4	0.5	-0.377	-0.5	-

Etape 4 :

Sommer les indices de dominance

$$D_{ik} = \omega_O \gamma_{ik} + \omega_C \delta_{ik}$$

$$\omega_O = \sum_{j \in O} \omega_j$$

$$\omega_C = \sum_{j \in C} \omega_j$$

=1

D_{ik}=δ_{ik}	M1	M2	M3	M4
M1	–	-0.408	-0.5	0.5
M2	0.209	–	-0.5	0.5
M3	0.185	-0.5	–	0.5
M4	0.5	-0.377	-0.5	–

Etape 5 :

Calcul du score globale pour chaque alternative i

$$S_i = \frac{1}{m}\sum_k D_{ik}$$

- La meilleure alternative est celle avec un score global maximal
- m est le nombre des alternatives
- Ici m=4

D_{ik}=δ_{ik}	M1	M2	M3	M4
M1	-	-0.408	-0.5	0.5
M2	0.209	-	-0.5	0.5
M3	0.185	-0.5	-	0.5
M4	0.5	-0.377	-0.5	-

S_i
-0,102
0,052
0,046
-0,094

9. Intégrale de Choquet

Les opérateurs d'agrégation additifs tels que la somme pondérée sont basés sur l'hypothèse d'indépendance entre les critères. En pratique, cette hypothèse est rarement vérifiée.

Exemple :

Un ensemble de cuisiniers sont évalués selon leur aptitude à préparer trois plats : P1, P2, P3 leurs évaluations sur l'échelle [0..20] sont :

Cuisinier	C1	C2	C3
a	18	15	19
b	15	18	19
c	15	18	11
d	18	15	11

- Imaginons le raisonnement du décideur suivant :
    1. Lorsque le cuisiner est reconnu pour sa préparation du P3, il est préférable qu'il prépare mieux P1 que P2.
    2. Sinon, il est préférable qu'il prépare mieux P2 que P1.
- On dit que C1 et C2 sont ***préférentiellement dépendant*** de C3.
- Selon ce raisonnement, les cuisiniers **seront classés : a, b, c, d.**
- La somme pondérée **ne permet pas** de représenter ces préférences

L'idée est d'attribuer les poids plutôt aux **sous-ensembles de critères**.

Mesure floue (capacité)

Soit $F = \{1, \ldots, n\}$ la famille de tous les critères. Une mesure floue sur F est définie comme suit $v\colon 2^F \rightarrow [0,1]$ elle doit vérifier :

- ✓ $v(\emptyset) = 0$
- ✓ $v(F) = 1$
- ✓ Si $S \subseteq T$ alors $v(S) \leq v(T)$ (monotonie)

Pour tout $S \subseteq F$, $\mathbf{v(S)}$ représente l'importance de la combinaison des critères : autrement « sa capacité » dans la prise de décision sans considérer le reste des critères.

Définition de l'intégrale de Choquet

C'est un opérateur d'agrégation qui permet de tenir compte des **interactions entre critères**. Il se calcule, respectivement, à une **mesure floue**.

L'intégrale de Choquet est une fonction :

$$C_v: \quad \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$$

$$C_v(a) = \sum_{j=1}^{m} a_{\sigma(j)}[v(\{\sigma(j), \dots, \sigma(m)\}) - v(\{\sigma(j+1), \dots, \sigma(m)\})]$$

Où $\sigma(.)$ est une permutation telle que:

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq a_{\sigma(m)}$$

Fin Chapitre II