Université Mohammed Seddik BENYAHIA de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Master 2 : Analyse Fonctionnelle
Module : Introduction à l'Analyse Multivoque
Pr. Dalila. Azzam-Laouir

TD
25/11/2021

Exercice n°1.
Soit $(A_n)_n \subset \mathbb{R}^2$ tel que

$$A_n = \begin{cases} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] & si\ n \text{ est pair} \\ \{\frac{1}{n}\} \times [-1,0] & si\ n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculer $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n$.

Exercice n°2.
Soient $F, H : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ les multi-applications définies par

$$F(x) = \{x^2, x^2+1\}, \quad H(x) = \{\sqrt{|x|}, \sqrt{|x|}+1\}.$$

Calculer $H \circ F$.

Exercice n°3.
1) Soient $F, H : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ les multi-applications définies par

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & si\ x \leq 0 \\ [0,2] & si\ x > 0. \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} [0,1] & si\ x < 0 \\ [0,2] & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que F est s.c.i et que H n'est pas s.c.i au point $x_0 = 0$.
2) Soit $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par

$$G(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\} & si\ x \neq 0 \\ \mathbb{R} & si\ x = 0. \end{cases}$$

Montrer que G est s.c.s.

Exercice n°4.
Soit $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ la multi-application définie par

$$G(t) = \Big\{(t, \alpha t);\ \alpha \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Montrer que G est s.c.i sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°5.
Soit $F : [0,2] \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & si\ x \in [0,1[\\ [0,1] & si\ x = 1 \\ \{1\} & si\ x \in]1,2]. \end{cases}$$

Montrer que F est s.c.s.

Exercice n°6.
Soit la multi-application

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \rightrightarrows & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & F(t) = \{t\} \times [t, +\infty[= \{(t,x) :\ x \geq t\}. \end{array}$$

En utilisant l'ensemble

$$V = \Big\{ \big(x, \frac{1}{x}\big) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0 \Big\},$$

montrer que F n'est pas s.c.s.

Exercice n°7.
1) Soient X, Y deux espaces toplogiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Donner la définition de la s.c.s et la s.c.i de F au point $x_0 \in X$.
2) Considérons la m-a $G : X \rightrightarrows Y$ définie par $G(x) = \overline{F(x)}$. Montrer que si F est s.c.i alors G est s.c.i.
3) Soit $F : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par

$$F(x) = \begin{cases} \{x\} & si\ x \in [0,1[\\ [0,1] & si\ x = 1. \end{cases}$$

3.1) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que si $V \cap [0,1[= \emptyset$ alors $1 \notin V$.
3.2) Montrer que F est s.c.i sur $[0,1]$.
3.3) Calculer $F_+^{-1}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$, en déduire que F n'est pas s.c.s.