Chapitre 4

Introduction aux signaux et systèmes numériques, transformée en Z et filtrage numérique

1. Introduction
2. Représentation des signaux numériques
3. Quelques signaux particuliers
4. Energie et puissance d'une séquence
5. Traitements possibles des séquences
6. Systèmes numériques
7. Transformée en Z
8. Transformée en Z inverse
9. Equations aux différences
10. Filtres numériques

1. Introduction

-Un signal continu est défini sur une variable continue t c'est-à-dire que le signal prend toutes les valeurs possibles d'un intervalle fini ou infini ; on parle dans ce cas d'un signal **continu** ou **analogique.**

-Si la variable t est représentée par des instants c'est-à-dire des valeurs discrètes t_1, t_2, ….t_n et si ces instants sont régulièrement espacés, alors le signal est dit échantillonné ou signal à temps discret.

-Un signal numérique est un signal discret (échantillonné) et quantifié.

2. Représentation des signaux numériques

Les signaux numériques sont mathématiquement représentés par des séquences de nombres notés x[n] pour $-\infty < n < +\infty$, on parle de séquence x[n].

- **Représentation fonctionnelle** : $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, 3 \\ 4 & \text{pour } n = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- **Représentation tabulaire**

n	….-2	-1	0	1	2	3	4……
X[n]	….0	0	0	1	4	1	0….

- **Représentation par séquence**

x[n] = {…..0, 0, 1, 4, 1, 0, 0,….}

↑ (n=0 origine)

➢ Séquence nulle pour n<0 (séquence causale)

x[n]= {0, 1, 4, 1, 0, 0, …}

↑

- Séquence de durée finie

  x[n]= {0, -1, -2, 5, 0, 4, -1} séquence 7 points

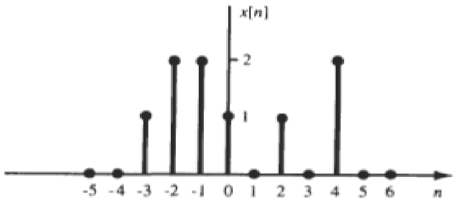
  $\uparrow$

- Séquence de durée finie causale

  x[n] = {0, 1, 4, 1}   séquence 4 points

  $\uparrow$

- **Représentation graphique**



$$\mathrm{x[n]} = \partial[n+3] + 2\partial[n+2] + 2\partial[n+1] + \partial[n] + \partial[n-2] + 2\partial[n-4]$$

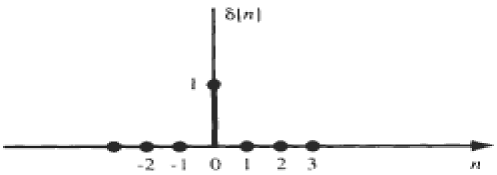
3. Quelques signaux particuliers

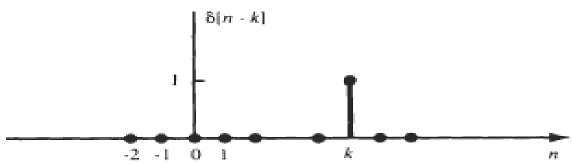
Parmi l'infinité de séquences qui existent, il y en a quelques-unes qui sont fondamentales pour l'analyse des signaux et systèmes. Ce sont

- **L'impulsion unité :** définie par

$$\partial[\mathrm{n}] = \begin{cases} 1 & \mathrm{n} = 0 \\ 0 & \mathrm{n} \neq 0 \end{cases}$$ et sa version décalée $$\partial[\mathrm{n}-\mathrm{k}] = \begin{cases} 1 & \mathrm{n} = \mathrm{k} \\ 0 & \mathrm{n} \neq \mathrm{k} \end{cases}$$

La représentation graphique de $\partial[\mathrm{n}]$ et sa version décalée $\partial[\mathrm{n}-\mathrm{k}]$ sont montrées sur la figure suivante





Un aspect important de cette séquence est qu'elle peut servir à définir n'importe quelle autre séquence. En effet, toute séquence peut être considérée comme une somme d'impulsions décalées $\partial[\mathrm{n}-\mathrm{k}]$ et d'amplitude x[k]. La suite x[n] peut donc etre définie par l'expression suivante : $\mathrm{x[n]} = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{x[k]}\ \partial[\mathrm{n}-\mathrm{k}]$.

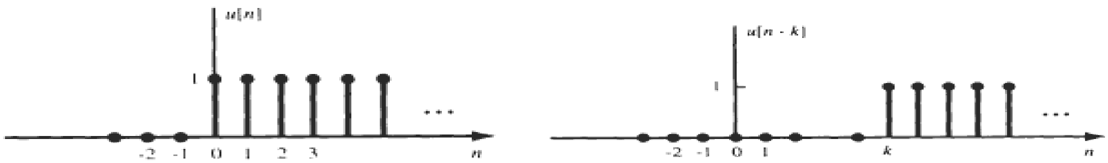
Exemple

$$x[n] = \sum_{k=-2}^{5} x[k]\ \partial[n-k] = -2\ \partial[n+2] - 2\ \partial[n+1] + 0.\partial[n] + 1.\partial[n-1] - 2.\partial[n-2] - 1.\partial[n-3] - 2.\partial[n-4] - 1.\partial[n-5].$$

- **Le saut unité :** défini par

  $U[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$ et sa version décalée $U[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}$

  Leurs représentations graphiques sont données par



Le saut unité peut être exprimé à partir de la somme d'une infinité d'impulsions unité décalées.

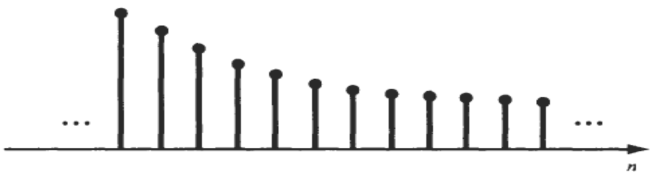
$$U[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \partial[n-k] = \partial[n] + \partial[n-1] + \partial[n-2] + \cdots$$

Inversement, l'impulsion unité peut être décrite par la différence de deux sauts unités : $\boldsymbol{\partial[n] = U[n] - U[n-1]}$.

- **L'exponentielle numérique a^n :** décrite par

  $x[n] = a^n.U[n]\ avec\ \ a < 1$ (exponentielle décroissante)

  $x(t) = e^{-\alpha t} \Longrightarrow x[nT] = e^{-\alpha nT} = a^n$ avec $a = e^{-\alpha T}$

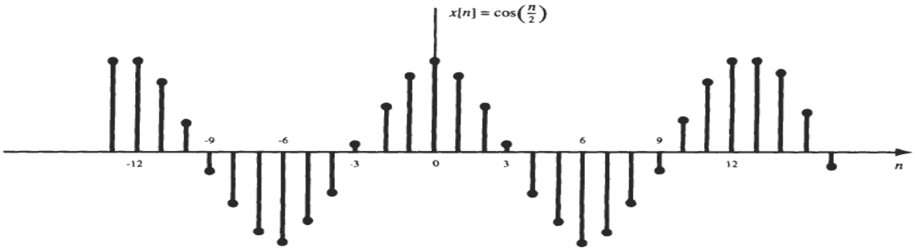


- **La rampe r[n] :** définie par

  $r[n] = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$

- **La séquence sinusoïdale :**

  $x[n] = \cos(n\omega_0 + \varphi)$ ω_0 = pulsation = $2\pi f_0 T_e$



- **La séquence périodique**

x[n]= x[n+N]   N = est un entier représentant la période de la séquence.

4. Energie et Puissance d'une séquence

- **Energie**

En continu : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \; dt$

En discret : $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$

Si E est finie, alors la séquence est à énergie finie.

Exemples

- $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$E = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n =$ série géométrique de raison r= $\frac{1}{4}$

$E = 1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} < \infty \Longrightarrow x[n] = (\frac{1}{2})^n . U[n]$ est à énergie finie.

- $x[n] = U[n]$

$E = \sum_{n=0}^{\infty} |U[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1^2 = 1 + 1 + 1 \ldots = \infty \Longrightarrow x[n] = U[n]$ est à énergie infinie.

- **Puissance**

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Si P<∞, alors la séquence est à puissance fini.

5. Traitements possibles des séquences

- **Produit de deux séquences**

$$x.y = \{x[n].y[n]\}$$

- **Somme de deux séquences**

$$x + y = \{x[n] + y[n]\}$$

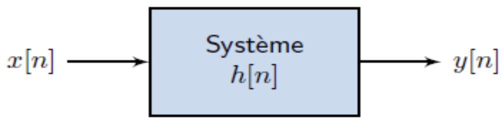
- **Multiplication par une constante**

$$\alpha . x = \{\alpha . x[n]\}$$

- **Retard** $\quad y[n] = x[n - n_0]$

6. Systèmes numériques

Un système est une opération ou un ensemble d'opérations effectuées sur un signal d'entrée x[n] pour produire un signal de sortie y[n]. Un tel système est défini mathématiquement comme un opérateur ou une transformation qui modifie une séquence d'entrée x[n] en une séquence de sortie y[n]. On peut représenter cette transformation par un opérateur T ou H tel que : y[n] = H[x(n)] ou y[n] = T[x(n)].



Exemples de systèmes numériques

Déterminer la réponse des systèmes suivants au signal d'entrée

$$x[n] = \begin{cases} |n| & -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. $y(n) = x(n)$
2. $y[n] = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$
3. $y[n] = \max[x(n+1); x(n); x(n-1)]$

solution

$$x(n) = \{0, 0, \ldots . 3, \quad 2, \quad 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots . \}$$

1. $y(n) = \{0, 0 \ldots . . , 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots . . \ldots 0\}$

2. $x(n) = \{0, 0, \ldots . 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots . \}$

$$x(n-1) = \{0\,,0\,,\ldots.3\,,\;2\,,\;1\,,\;0\,,\;1\,,\;2\,,\;3,\;0\,,\ldots.\;\}$$

$$\uparrow$$

$$x(n+1) = \{0\,,0\,,\ldots.3\,,\;2\,,\;1\,,\;0\,,\;1\,,\;2\,,\;3,\;0\,,\ldots.\;\}$$

$$\uparrow$$

$$x(n) + x(n-1) + x(n+1) = \{3\,,\;5\,,\;6\,,\;3\,,\;2\,,\;3\,,\;6\,,\;5\,,\;3\}$$

$$\uparrow$$

$$y(n) = \frac{1}{3}\{x(n) + x(n-1) + x(n+1)\;\} = \left\{1,\;\frac{5}{3},2\,,\quad 1\,,\quad \frac{2}{3}\,,1,\quad 2\,,\quad \frac{5}{3}\,,1\;\right\}$$

$$\uparrow$$

3. $y(n) = \max\quad \{x(n), x(n-1), x(n+1)\;\} = \{3,3\,,3\,,2\,,1\,,2\,,3\,,3\,,3\;\}$

$$\uparrow$$

Propriétés des systèmes

-Linéarité : un système est linéaire s'il satisfait au principe de superposition

$$y[n] = H\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1H[x_1(n)] + a_2H[x_2(n)] = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

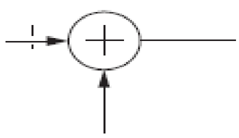
-Invariance temporelle : un système est invariant dans le temps si un décalage temporel sur le signal d'entrée conduit à un signal de sortie décalé de la même valeur : Si y[n] = H[x(n)] alors y[n+d] = H[x(n+d)].

-Causalité : un système est causal si la séquence de sortie ne dépend que des valeurs actuelles ou passées de la séquence d'entrée.

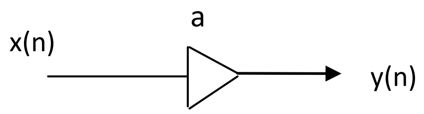
Schéma fonctionnel d'un système numérique

Un système numérique peut être décrit par une équation liant le signal de sortie au signal d'entrée. On peut également représenter ces systèmes à l'aide de diagrammes ou schémas fonctionnels. Ceux-ci illustrent alors graphiquement les opérations effectuées sur le signal d'entrée ainsi que les connexions les reliant. Les plus fréquentes sont

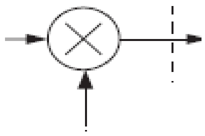
-Additionneur :



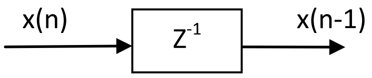
-Multiplication par une constante (gain) :



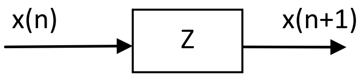
-Multiplication des signaux



-Elément de retard (Z^{-1})



-Elément d'avance (Z)



Exemples : Représenter $y(n) = {}^{1}/_{2}\, x(n) + {}^{1}/_{2}\, x(n-1)$

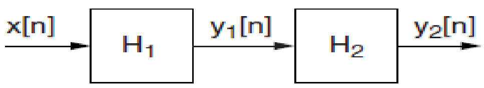
$$y(n) = {}^{1}/_{2}\; y(n-1) + 5x(n) + 3x(n-4)$$

Interconnexion des systèmes

Les systèmes numériques peuvent être interconnectés pour former des systèmes plus complexes : - connexion en cascade

- connexion en parallèle

- En cascade



$y_1(n) = H_1[x(n)]$

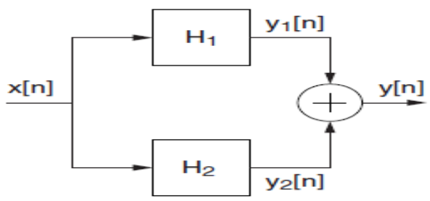
$y_2(n) = H_2[y_1(n)] = H_2[H_1x(n)] = H_2H_1[x(n)] = H_C[x(n)]$

$H_C = H_2H_1$

En général, $H_1H_2 \neq H_2H_1$

Si les systèmes H_1 et H_2 sont linéaires et invariants, alors H_C est invariant et $H_1H_2 = H_2H_1$

-En parallèle



$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = H_1[x(n)] + H_2[x(n)] = [H_1 + H_2]x(n) = H_P[x(n)]$

$H_P = H_1 + H_2$

Remarque

Les systèmes linéaires et temporellement invariants (Systèmes LTI) constituent une classe importante des systèmes et c'est seulement sur les systèmes LTI que l'on peut appliquer les notions de réponse impulsionnelle, de produit de convolution et de fonction de transfert.

7. Transformée en Z

La transformation en Z dans le domaine numérique joue le même rôle que la transformation de Laplace dans le domaine analogique. En particulier, elle permet la représentation des systèmes numériques linéaires à l'aide d'une fonction de transfert H(Z) dont les pôles sont les racines de l'équation caractéristique.

Pour les systèmes continus $\longrightarrow$ on utilise la TL.

Pour les systèmes numériques $\longrightarrow$ on utilise la TZ.

7.1 Définition

La TZ de la fonction x[n] est donnée par

$X(Z) = TZ\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].Z^{-n}$ (1)

Z est une variable complexe et X(Z) est une fonction complexe de la variable Z.

L'expression (1) est une transformée en Z bilatérale.

Pour les fonctions nulles pour n<0, on utilise la transformée unilatérale

$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n].Z^{-n}$

Dans ce cas, la transformation bilatérale et unilatérale se ramènent à la même expression pour la classe des fonctions causales c'est à dire si :

$$x[n] \text{ causal } \Rightarrow X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n].Z^{-n}$$

Exemples

- $x[n] = U[n] \Rightarrow X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} U[n].Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1.Z^{-n}$
  $= 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + \cdots + Z^{-n}$

X(Z) est constitué de termes qui sont en progression géométrique de raison Z^{-1}.
Sa somme vaut

$U(Z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-Z^{-n}}{1-Z^{-1}} = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1}$ $\qquad$ $U[n] \overset{TZ}{\rightarrow} \frac{Z}{Z-1}$

- $x[n] = \partial[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

$X[Z] = TZ\{\partial[n]\} = \sum_{n=0}^{0} 1.Z^{-n} = 1$ $\qquad$ $\partial[n] \overset{TZ}{\rightarrow} 1$

7.2 Quelques transformées en Z

X[n] n≥0	X(Z)	x(t) t>0	X(P)
$\partial[n]$	1	$\partial(t)$	1
$U[n]$	$\frac{Z}{Z-1}$	$U(t)$	$\frac{1}{P}$
n	$\frac{Z}{(Z-1)^2}$	t	$\frac{1}{P^2}$
a^n	$\frac{Z}{Z-a}$	e^{-at}	$\frac{1}{P+a}$
$\cos(n\omega_0)$	$\frac{Z^2 - Z\cos\omega_0}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 + 1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{P}{P^2+\omega_0^2}$
$\sin(n\omega_0)$	$\frac{Z\sin\omega_0}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 + 1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{P^2+\omega_0^2}$
$a^n\cos(n\omega_0)$	$\frac{Z^2 - a.Z.\cos\omega_0}{Z^2 - 2.a.Z\cos\omega_0 + a^2}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2+\omega_0^2}$
$a^n\sin(n\omega_0)$	$\frac{a.Z.\sin\omega_0}{Z^2 - 2.a.Z\cos\omega_0 + a^2}$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(P+a)^2+\omega_0^2}$

7.3 Relation entre la TZ et la TL

Dans le domaine continu, la TL est donnée par

$$X(P) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Dans le domaine discret, et en considérant que x[n] est la représentation échantillonnée de x(t), on peut remplacer l'∫ par une ∑. Cette formule devient

$$X(P) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kt)e^{-pkt}$$

En posant : T=1 et $Z = e^{PT} \Longrightarrow X(P) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k).Z^{-k}$

La TL signal échantillonné est la TZ du signal numérique correspondant lorsqu'on pose $Z = e^{PT}$. La TZ est une fonction de la variable Z qui est complexe

$Z = e^{PT} = e^{(\alpha+j\tau\omega)T} = e^{\alpha T}e^{j\omega T} = \rho e^{j\theta}$

$\begin{cases} \rho \geq 1 \ \text{si}\ \alpha \geq 0 \\ \rho < 1 \ \text{si}\ \alpha < 0 \end{cases}$

L'axe imaginaire du plan « P » est transformé en un cercle de rayon unité.

- Le demi-plan gauche correspond à l'intérieur du cercle.
- Le demi-plan droit correspond à l'extérieur du cercle.

7.4 Domaine de convergence DCV

Le domaine de convergence DCV est l'ensemble des valeurs de la variable complexe pour lesquelles X(Z) converge. Pour trouver la région de CV, on peut utiliser le critère de Cauchy pour la convergence des séries de puissances.

Existence de X(Z)

$$X(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]Z^{-n} = X_1(Z) + X_2(Z)$$

$X_1(Z) = \sum_{-\infty}^{-1} x[n]Z^{-n}$ et $X_2(Z) = \sum_{0}^{\infty} x[n]Z^{-n}$

Critère de CAUCHY

La série $\sum_0^\infty U_n = U_0 + U_1 + U_2 \ldots\ldots$ converge si $\lim_{n\to\infty}|U_n|^{\frac{1}{n}} < 1$

D'où $X_2(Z)$ converge si : $\lim_{n\to\infty}|x(n)Z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1$ c à d $\lim|x(n)|^{\frac{1}{n}}\ |Z^{-1}| < 1$

Soit R_x^- la limite : $\lim|x(n)|^{\frac{1}{n}} = R_x^-$

$X_2(Z)$ converge alors pour : $\frac{R_x^-}{|Z|} < 1 \implies |Z| > R_x^-$

Le domaine de convergence, dans ce cas, est le plan extérieur au cercle de rayon R_x^-.

Avec le changement de variable l= -n, on peut montrer d'une façon similaire que la série X1(Z) converge pour $|Z| < R_x^+$ ou $R_x^+ = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{|x(-l)|^{\frac{1}{l}}}$

Le domaine de convergence, dans ce cas, correspond à l'intérieur du cercle de rayon R_x^+.

En général, la série $x(Z)=X_1(Z) + X_2(Z)$ converge dans un anneau du plan complexe de Z donné par

$$0 \leq R_x^- < |Z| < R_x^+ \leq +\infty$$

Le domaine de convergence DCV de $X(Z)=X_1(Z) + X_2(Z)$ correspond à la consonne comprise entre les cercles de rayons R_x^- et R_x^+.

Exemples

$x[n] = a^n . U[n] \Rightarrow X(Z) = \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}$

X(Z) converge si $|a\, Z^{-1}| < 1 \Rightarrow |Z| > |a|$ d'où $R_x^- = |a|$

Cas particuliers

- Si $x[n] \neq 0$ uniquement pour $n_1 \leq n \leq n_2$ (séquence de durée finie)
  $X(Z) = \sum_{n1}^{n2} x[n]Z^{-n} \Rightarrow DCV : 0 < |Z| < \infty$

- Si $x[n] = 0$ pour $n < n_1$ (séquence tournée à droite)
  $X(Z) = \sum_{n1}^{\infty} x[n]Z^{-n} \Rightarrow DCV : |Z| > R_x^-$ (extérieur du cercle)

- Si $x[n] = 0$ pour $n > n_2$ (séquence tournée à gauche)
  $X(Z) = \sum_{-\infty}^{n2} x[n]Z^{-n} \Rightarrow DCV : |Z| < R_x^+$ (intérieur du cercle)

- Si $x[n] \neq 0$ pour $-\infty < n < +\infty$ (séquence bilatérale)
  $X(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]Z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]Z^{-n}$

  $\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\, Z^{-n} \Rightarrow DCV : |Z| < R_x^+$

  $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, Z^{-n} \Rightarrow DCV : |Z| > R_x^-$

Si $R_x^- < R_x^+$; il y a un domaine en commun et le DCV sera : $R_x^- < |Z| < R_x^+$

Si $R_x^- > R_x^+$; X(Z) diverge.

7.5 Propriété de la TZ

Linéarité $x[n] \xrightarrow{TZ} X(Z)$ et $y[n] \xrightarrow{TZ} Y(Z)$

$$a\, x[n] + b\, y[n] \xrightarrow{TZ} a\, X(Z) + b\, Y(Z)$$

Décalage temporel $x[n+n_0] \overset{TZ}{\rightarrow} Z^{n0}X(Z)$

Cette propriété est essentielle pour la réalisation des filtres numériques. On représente schématiquement l'opérateur retard par Z^{-1}.

Exemples

$$U[n-3] \overset{TZ}{\rightarrow} Z^{-3}\frac{Z}{Z-1} = \frac{Z^{-2}}{Z-1}$$

$$\partial[n-1] \overset{TZ}{\rightarrow} Z^{-1} = \frac{1}{Z}$$

$$\partial[n+1] \overset{TZ}{\rightarrow} Z$$

Amortissement ou changement d'échelle

$$a^n \overset{TZ}{\rightarrow} X(a^{-1}Z) = X(\frac{Z}{a})$$

Dérivation $n\,x[n] \overset{TZ}{\rightarrow} -Z\,\frac{d}{dZ}X(z)$

Séquence conjuguée $x^*[n] \overset{TZ}{\rightarrow} X^*(Z^*)$

$$x^*[-n] \overset{TZ}{\rightarrow} X^*(Z^{-1})^*(Z^*)$$

Théorème de la valeur initiale

$$x[n] \text{ causal : } x[0] = \lim_{Z\to\infty} X(Z)$$

Théorème de la valeur finale

$$x[\infty] = \lim_{Z\to 1}(1-Z^{-1})X(Z)$$

Exemple

$$F(Z) = \frac{Z^2+4Z-2}{(Z-1)(Z^3+2Z+4)}$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{Z^2+4Z-2}{(Z-1)(Z^3+2Z+4)} = \frac{3}{7}$$

TZ du produit de convolution

$$x[n] \overset{TZ}{\rightarrow} X(Z) \quad \text{et} \quad y[n] \overset{TZ}{\rightarrow} Y(Z)$$

$$w[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \overset{TZ}{\rightarrow} W(Z) = X(Z).Y(Z)$$

Exemple

$$y[n] = a^n U[n] \xrightarrow{TZ} Y(Z) = \frac{Z}{Z-a} \quad |Z| > |a|$$

$$x[n] = U[n] \xrightarrow{TZ} X(Z) = \frac{Z}{Z-1} \quad |Z| > 1$$

$$W(Z) = X(Z).Y(Z) = \frac{Z^2}{(Z-a)(Z-1)} \Rightarrow \frac{W(Z)}{Z} = \frac{Z}{(Z-a)(Z-1)} = \frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-1}$$

$$A = \frac{a}{a-1} \; ; \; B = \frac{1}{1-a}$$

$$W(Z) = \frac{a}{a-1}\frac{Z}{Z-a} + \frac{1}{1-a}\frac{Z}{Z-1} \xrightarrow{TZ^{-1}} w[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} U[n]$$

8. Transformée en Z inverse

Méthodes indirectes pour le calcul de la TZ inverse

- **Division Polynomiale**

C'est le principe de la division de deux polynômes. La TZ est une fraction rationnelle en Z. Si on écrit F(Z) sous la forme d'un rapport de deux polynômes en Z^{-k}, la division de ces deux polynômes donne encore un polynôme en Z^{-k}.

Exemple

$$F(Z) = \frac{1}{1-a\,Z^{-1}} \quad |Z| > |a|$$

$$\frac{1}{1-a\,Z^{-1}} = 1 + aZ^{-1} + a^2Z^{-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- **Développement en fractions rationnelles**

F(Z) peut être présenté sous forme de puissance en Z

$$F(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \frac{C_0\,Z^l + C_1\,Z^{l-1} + \cdots . + C_l}{Z^n + d_1\,Z^{n-1} + \cdots . + d_n} = \frac{C_0\,Z^l + C_1\,Z^{l-1} + \cdots . + C_l}{\prod_{m=1}^{n}(Z - Z_m)}$$

Z_m : représentent les pôles de F(Z) et la TZ^{-1} dépend de la nature de ses pôles. Le cas le plus courant est celui ou tous les pôles sont simples. On exprime F(Z) sous la forme suivante

$$\frac{F(Z)}{Z} = \frac{A_1}{Z - Z_1} + \frac{A_2}{Z - Z_2} + \cdots + \frac{A_k}{Z - Z_k}$$ avec Z_k : pôles de F(Z).

Les coefficients A_k sont déterminés par la méthode des résidus.

$$A_k = (Z - Z_k)\frac{F(Z)}{Z}\Big|\; Z = Z_k \quad \Rightarrow y(n) = \sum_k A_k\,(Z_k)^n$$

Si les pôles sont multiples

$$F(Z) = \sum_k \frac{C_k}{(Z - Z_i)^s} \quad \text{et } C_k = \frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-k}}{dZ^{s-k}}\left[(Z - Z_i)^s \; F(Z)\right\}Z = Z_i\right.$$

Z_i est le pôle multiple et s est l'ordre du pôle multiple.

Si les pôles sont complexes, les coefficients A_k se présentent sous forme complexe.

Si $Z_k = |Z_k| \, \theta_k$ et $A_k = |A| \, \varphi_k$

$$f(n) = A_k \left(Z_{k)}\right)^n + A_k^* (Z_k^*)^n = 2\,|A_k|\,(Z_k)^n \cos(n\theta_k + \varphi)$$

Exemples

1- $F(Z) = \frac{Z^2}{(Z-1)(Z-0.5)} \Rightarrow \frac{F(Z)}{Z} = \frac{Z}{(Z-1)(Z-0.5)} = \frac{A_1}{(Z-1)} + \frac{A_2}{(Z-0.5)}$

$A_1 = (Z-1)\,\frac{F(Z)}{Z}|(Z=1) = 2$

$A_2 = (Z-0.5)\,\frac{F(Z)}{Z}|(Z=0.5) = -1$

$$\frac{F(Z)}{Z} = \frac{2}{(Z-1)} - \frac{1}{(Z-0.5)} \Rightarrow F(Z) = 2\,\frac{Z}{(Z-1)} - \frac{Z}{(Z-0.5)} \xrightarrow{TZ^{-1}} f(n) = 2U(n) - (0.5)^n U(n)$$

2- $F(Z) = \frac{Z(Z+1)}{Z^2 - Z + 0.5} \Rightarrow \frac{F(Z)}{Z} = \frac{Z+1}{Z^2 - Z + 0.5} = \frac{A_1}{(Z-P_1)} + \frac{A_2}{(Z-P_2)}$

Les pôles sont : $P_1 = 0.5 + j\,0.5$ et $P_2 = 0.5 - j\,0.5 = P_1^*$

$A_1 = (Z - P_1)\frac{H(Z)}{Z}\Big|\, Z = P_1 = 0.5 - j1.5$

$A_2 = (Z - P_1^*)\frac{H(Z)}{Z}\Big|\, Z = P_1^* = 0.5 + j1.5 = A_1^*$

$$F(Z) = (0.5 + j\,0.5)\,\frac{Z}{Z - P_1} + (0.5 - j\,0.5)\,\frac{Z}{Z - P_2}$$

$$f(n) = (0.5 + j\,0.5)\,(P_1)^n\,U(n) + (0.5 - j\,0.5)\,(P_2)^n\,U(n)$$

Règle : Pour la décomposition en éléments simples

- Plutôt que F(Z), on décompose $\frac{F(Z)}{Z}$ en éléments simples.
- On multiplie par Z chaque terme du développement.
- On prend la transformée inverse de chacun des éléments simples.

- **Méthode directe : Intégration directe par les résidus**

La TZ^{-1} de F(Z) est donnée par $f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} F(Z)\, Z^{n-1}\, dZ$

(C) est un contour fermé appartenant au domaine de convergence.

Le théorème des résidus permet d'écrire

$f(n) = \sum$ { résidus de $F(Z)Z^{n-1}$ aux pôles intérieurs à (C)} $Z = Z_i$

$F(Z)Z^{n-1} = \frac{\varphi(Z)}{(Z-Z_0)^s}$; Z_0 est un pôle d'ordre s de $F(Z)Z^{n-1}$

- Si Z_0 est un pôle multiple d'ordre s de $F(Z)Z^{n-1}$
  $\mathrm{Res}\,\{F(Z)\,Z^{n-1}\}\ Z_0 = \frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{dZ^{s-1}}\ \varphi(Z)\right\}Z = Z_0$

- Si s = 1 (pôle simple) $F(Z)Z^{n-1} = \frac{\varphi(Z)}{(Z-Z_0)}$
  $\mathrm{Res}\,\{F(Z)\,Z^{n-1}\ \text{en}\ Z = Z_0\} = \varphi(Z_0)$

Exemple

$F(Z) = \frac{Z^2}{(Z-1)(Z-0.5)} \Longrightarrow f(n) = \sum \text{des résidus} \left\{Z^{n-1}\frac{Z^2}{(Z-1)(Z-0.5)}\right\} Z = Z_i$

$$f(n) = \sum \text{des résidus} \left\{\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)}\right\} Z = Z_i$$

Les pôles sont $Z_1 = 1$ et $Z_2 = 0.5$

Calculons les résidus en ces pôles

- res $\left\{\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)}\right\}Z_{=1} = \left\{\frac{Z^{n+1}}{Z-0.5}\right\} = 2$

- res $\left\{\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)}\right\}Z_{=0.5} = \left\{\frac{Z^{n+1}}{Z-1}\right\} = -(0.5)^n$

$$f(n) = \sum \text{des résidus} = (2 - (0.5)^n)U(n)$$

9. Equations aux différences

Les systèmes vérifient une équation appelée équation aux différences (ou équations de récurrence ou équations récurrentes) qui relie l'entrée à la sortie du système.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) \qquad a, b \in \mathcal{R} \ \text{ et } \ a_0 = 1$$

Les coefficients a_k et b_k sont les coefficients du système. N est l'ordre du système. Le système est réalisable si $N \geq M$. On utilise plus fréquemment l'écriture suivante

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\ x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k\ y(n-k)$$

9.1 Fonction de transfert et réponse fréquentielle d'un système

$x[n] \xrightarrow{TZ} X(Z)$; $y[n] \xrightarrow{TZ} Y(Z)$ et $h[n] \xrightarrow{TZ} H(Z)$

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] \quad \xrightarrow{TZ} Y(Z) = X(Z).H(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \text{Fonction de transfert.}$$

Pour un système d'ordre N

Un système d'ordre N peut être décrit par une équation aux différences de la forme

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k \; y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; x(n-k) \qquad \xrightarrow{TZ}$$

$$Y(Z) + \sum_{k=1}^{N} a_k Z^{-k} Y(Z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; Z^{-k} X(Z)$$

$$Y(Z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \; Z^{-k}\right] = X(Z) \sum_{k=0}^{M} b_k \; Z^{-k}$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k Z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k Z^{-k}} (**)$$

Exemple : Système d'ordre 2

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \quad \xrightarrow{TZ}$$

$$Y(Z) + a_1 Z^{-1} Y(Z) + a_2 Z^{-2} Y(Z) = b_0 X(Z) + b_1 Z^{-1} X(Z) + b_2 Z^{-2} X(Z)$$

$$Y(Z)[1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}] = X(Z)[b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}]$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}$$

- **Réponse fréquentielle d'un système**

$$H(f) = H(e^{j\omega}) = H(e^{j2\pi f}) = H(Z = e^{j\omega})$$

Pour un système d'ordre N

$$H(f) = H(Z = e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \, e^{-j\omega k}}$$

- **Stabilité**

Le domaine de H(Z) doit contenir le cercle unité.

La condition de stabilité : les pôles doivent appartenir à l'intérieur du cercle unité.

Pour un système d'ordre N (relation (**)), on déduit qu'un système de fonction de transfert rationnelle H(Z) est stable si les racines de l'équation caractéristique sont dans le cercle unité.

$$1+\sum_{k=1}^{N} a_k\, Z^{-k}=0$$

Exemple: Système d'ordre 1

$\mathrm{y(n) = a\,y(n-1) + x(n)}$ avec $\mathrm{a} \neq 1 \xrightarrow{\mathrm{TZ}}$

$\mathrm{Y(Z) = a}Z^{-1}\mathrm{Y(Z) + X(Z)} \;\Rightarrow\; \mathrm{Y(Z)[1 - a}Z^{-1}\mathrm{] = X(Z)}$

$$\mathrm{H(Z)} = \frac{\mathrm{Y(Z)}}{\mathrm{X(Z)}} = \frac{1}{1-\mathrm{a}Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-a} = \text{fonction de transfert}$$

9.2 Réponses temporelles

1. Réponse impulsionnelle du système

La réponse impulsionnelle peut être obtenue de deux façons : soit par calcul direct soit par TZ^{-1}.

Le calcul direct consiste à utiliser l'équation aux différences et à remplacer x(n) par l'impulsion unité $\delta(n)$. On a alors :

$\forall\, n < 0, \quad y(n) = 0.$

$n = 0, \quad y(0) = a\,y(-1) + x(0) = \delta(0) = 1$

$n = 1, \quad y(1) = a\,y(0) + x(1) = a\,y(0) = a$

$n = 2, \quad y(2) = a\,y(1) + x(2) = a\,y(1) = a^2$

$\forall\, n > 0, \quad y(n) = a^n.U(n).$

On peut obtenir ce résultat directement en calculant la TZ^{-1} inverse de H(Z).

$$\mathrm{x(n) = \delta(n)} \xrightarrow{\mathrm{TZ}} \mathrm{X(Z) = 1} \Longrightarrow \mathrm{Y(Z) = H(Z).X(Z)} = \frac{1}{1-\mathrm{a}Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-a} \xrightarrow{TZ^{-1}} \mathrm{y(n) = a^n U(n)}$$

Graphe

2. Réponse indicielle

On procède de la même façon c à d soit par calcul direct en remplaçant x(n) par U(n), soit par TZ^{-1} inverse

$$Y(Z) = H(Z).X(Z) = \frac{Z}{Z - a}.\frac{Z}{Z-1} = \frac{1}{1-a}[\frac{Z}{Z-1} - a\frac{Z}{Z-a}]$$

$$\xrightarrow{TZ^{-1}} y(n) = \frac{1}{1-a}[1 - a^{n+1}].U(n)$$

-Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} y(n) = +\infty$

-Si $a < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} y(n) = \frac{1}{1-a}$

3. réponse à une entrée quelconque

De manière générale et pour une entrée x(n) quelconque, on peut calculer soit par calcul direct soit pat transformée inverse.

Stabilité

On peut étudier la stabilité du système à partir de la position des pôles de H(Z).

$1 - aZ^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{Z}{Z-a} = 0 \Rightarrow Z = a$; Le filtre est stable si $a < 1$.

4. réponse fréquentielle du système

$$H(Z = e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}\Big|Z = e^{j\omega} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a(\cos\omega - j\sin\omega)}$$

$$= \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + aj\sin\omega}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$

$$\phi(\omega) = \mathrm{arctg}(\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega})$$

Figures

Remarques

- On s'intéresse aux systèmes LTI ou les séquences d'entrée et de sortie sont liées par une équation aux différences linéaires à coefficients constants (ils constituent une excellente modélisation de nombreux systèmes naturels).
- La fonction de transfert d'un système d'ordre N est une fraction rationnelle.
- Les coefficients ai et bi sont les coefficients du système. Certains coefficients sont nuls.
- h(n) est la TZ^{-1} de H(Z), elle est appelée réponse impulsionnelle du système.
- Si h(n) est de durée finie, alors le système est dit à réponse impulsionnelle finie (système **RIF**) (système non récursif : aucun bouclage de la sortie).
- Si h(n) est de durée infinie, alors le système est dit à réponse impulsionnelle infinie (système **RII**) (système récursif : bouclage de la sortie sur l'entrée.

10. Les filtres numériques

Introduction

En traitement numérique du signal, on classe les filtres en deux grandes familles suivant la durée de leur réponse impulsionnelle

-les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF).

-Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII).

1-le filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Le filtre RIF (en Anglais Finite Impulse Response filter) est un filtre numérique linéaire caractérisé par une réponse uniquement basée sur un nombre fini de valeurs du signal d'entrée. Par conséquent, quel que soit le filtre, sa réponse impulsionnelle sera stable et de durée finie qui dépend du nombre de coefficients du filtre. Il est aussi appelé filtre non récursif.

Description

De façon générale, le filtre à réponse impulsionnelle finie est décrit par la combinaison linéaire suivante

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \cdots . b_M x(n-M)$$

$x(k) \quad 1 \le k \le n$ représente les valeurs du signal d'entrée et

$y(k) \quad 1 \le k \le n$ les valeurs du signal de sortie.

Sa réponse impulsionnelle est égale aux coefficients de l'équation de récurrence. En effet, on d'une part :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k) x(n-k)$$

et d'autre part $\quad y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad$ d'où $b_k = h(k)$

Exemples

1. $h(k) = \{3, -1, 2, 1\}$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{3} h(k) x(n-k) = 3x(n) - x(n-1) + 2x(n-2) + x(n-3)$$

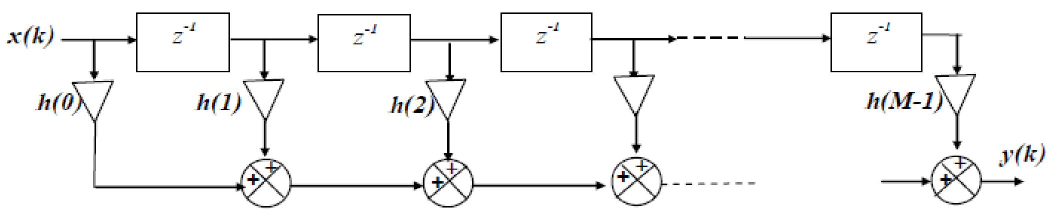
2. Si y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 2x(n-2) + x(n-3), alors

h(0)=1 ; h(1)=2 ; h(2)=2 ; h(3)=1. $\forall\, n \neq 0, 1, 2, 3$

graphe

Réalisation

Les filtres numériques peuvent être réalisés à l'aide de trois éléments ou opérations de base. Soit : l'élément de gain, l'élément de sommation et le retard unitaire. Ces éléments sont suffisants pour réaliser tous les filtres linéaires possibles. La réalisation suivante est une réalisation directe de type 1 du filtre RIF.



Propriétés

-Les filtres RIF sont forcément stables, peu importe les coefficients utilisés.

-La complexité d'un filtre RIF est moindre que celle d'un filtre RII du même ordre.

-Généralement, les filtres RIF sont moins sensibles aux erreurs de quantification que les filtres RII.

-Un filtre RIF est moins sélectif qu'un filtre RII du même ordre c à d que la transition entre la bande passante et la bande rejetée est moins rapide que dans le cas du filtre RII.

-Un filtre RIF est entièrement déterminé si l'on connait l'ensemble de ses coefficients.

-Un filtre RIF est toujours stable. Sa fonction de transfert $\mathrm{H(Z)} = \frac{\mathrm{Y(Z)}}{\mathrm{X(Z)}} = \sum_{k=0}^{M} b_k Z^{-k}$.

2-Le filtre à réponse impulsionnelle infinie

Un filtre à réponse impulsionnelle infinie ou filtre RII (en Anglais Infinite Impulse Response filter) est un type de filtre électronique caractérisé par une réponse basée sur les valeurs du signal d'entrée ainsi que les valeurs antérieures de cette même réponse.

Il est nommé ainsi parce que dans la majorité des cas, la réponse impulsionnelle de ce type de filtre est de durée théoriquement infinie. Ce type de filtre est linéaire, il est aussi désigné par filtre récursif.

La plupart des filtres analogiques peuvent également être considérés comme des filtres à réponse impulsionnelle infinie.

Description

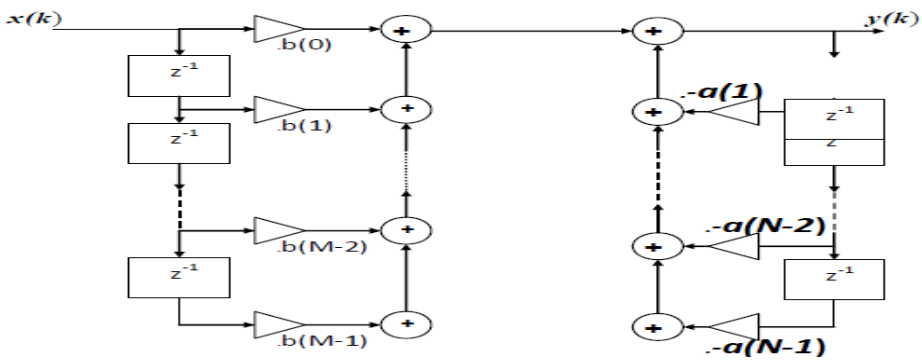
Le filtre à réponse impulsionnelle infinie est décrit par l'équation aux différences suivante ou x représente les valeurs du signal d'entrée et y les valeurs du signal de sortie.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots b_M (x-M) - a_1 y(n-1) - \cdots - a_N y(n-N)$$

$$\mathrm{H(Z)} = \frac{\mathrm{Y(Z)}}{\mathrm{X(Z)}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k Z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \cdots b_M Z^{-M}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \cdots b_N Z^{-N}} \quad \text{avec } a_0 = 1$$

Réalisation

La réalisation suivante est une réalisation directe de type 1 du filtre RII.



Propriétés

-Les filtres RII ne sont pas forcément stables. La stabilité dépend de la position des pôles dans le plan complexe.

-La complexité d'un filtre RII est supérieure à celle d'un filtre RIF du même ordre.

-Généralement, les filtres RII sont plus sensibles aux erreurs de quantification que les filtres RIF.

-Un filtre RII est plus sélectif qu'un filtre RIF du même ordre c à d que la transition entre la bande passante et la bande rejetée est plus rapide que dans le cas des filtres RIF.