

Matière : Mécanique des fluides

Cours : 1h30, TD : 1h30

Crédits : 4

Coefficient : 2

Contenu de la matière:

Chapitre 1 : Propriétés des fluides

Chapitre 2 : Statique des fluides

Chapitre 3 : Dynamique des fluides incompressibles parfaits

Chapitre 4 : Dynamique des fluides incompressibles réels

Responsable : Dr. BOUDJADJA Yazid

Chapitre I : Propriétés des fluides

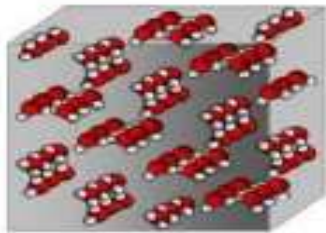
I.1. INTRODUCTION

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides lorsque ceux-ci subissent des forces. Elle est la base du dimensionnement des conduites et des mécanismes de transfert des fluides.

I.2. Définitions

I.2.1. Etats de la matière

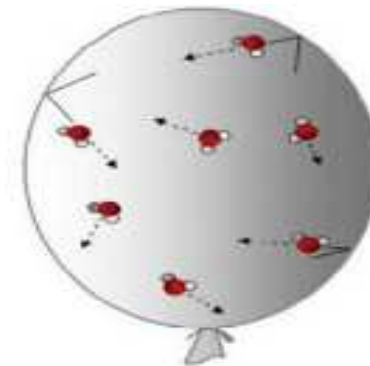
Ils sont : l'état gazeux ; l'état liquide ; l'état solide



Solide



Liquide



Gaz

I.2.2. Matière divisée

On distingue :

- * **les dispersions** : mélanges de particules très fines (taille $< 1\ \mu\text{m}$).

Exemple : argiles.

- * **les suspensions** : mélanges de particules grossières (taille $> 1\ \mu\text{m}$).

Exemple : sable + eau.

- * **les émulsions** : mélanges de fines gouttelettes d'un liquide dans un autre non mixible (exemple : lait.)

I.2.3. Qu'est ce qu'un fluide

Un fluide est un corps physique qui peut s'écouler, parfaitement déformable et ses propriétés varient d'une façon continue.

I.2.4. Classification des fluides

- * **Fluides "newtoniens"** (l'eau, l'air et gaz). Leur viscosité ne peut varier qu'en fonction de la T.

- * **Fluides "non newtoniens"** (le sang, les gels, les pâtes,...etc.). Leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes.

I.2.4.1. Fluide parfait : On décrit son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement.

I.2.4.2. Fluide réel : Contrairement à un fluide parfait.

I.2.4.3. Fluide incompressible : Lorsque le volume occupé ne varie pas en fonction de la pression extérieure (eau, huile...etc.).

I.2.4.4 Fluide compressible : Contrairement à un fluide incompressible (l'air, gaz...etc.).

I.3. Caractéristiques physiques d'un fluide

I.3.1. Masse volumique C'est une mesure de la concentration de la matière

([] massique), $\rho = \frac{dm}{dV}$ en Kg/m³.

I.3.2. Poids volumique Correspond à la force de gravité agissant sur la masse par unité de volume.

$$\varpi = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g \text{ en N/m}^3$$

I.3.3. Densité

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

cas des liquides $\rho_{ref} = \rho_{eau} = 10^3 \text{ Kg/m}^3$).

cas des gaz $\rho_{ref} = \rho_{air} = 1.20 \text{ Kg/m}^3$).

I.3.4. Débit d'un fluide

I.3.4.1. Débit volumique

$$q_v = V/t = S.l / t = S.v$$

V : Volume écoulé ; **t** : temps ; **v** : Vitesse ;

S : Section de canalisation.

I.3.4.2. Débit massique

$$q_m = m/t = \rho . S. l / t = \rho. S.v$$

$$q_m = \rho. q_v$$

1.4. Rhéologie, viscosité et tension de surface d'un fluide

1.4.1 Rhéologie d'un fluide

La **rhéologie** vient des mots grecs : **rheo** / **logos**

rheo : couler ; logos : science

sa plus simple définition est la science de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée.

1.4.2. Viscosité des fluides

Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement, qui permet de distinguer un fluide parfait (viscosité nulle) d'un fluide réel.

I.4.2.1 Viscosité dynamique

$$F = \mu . S . \frac{\Delta V}{\Delta Z}$$

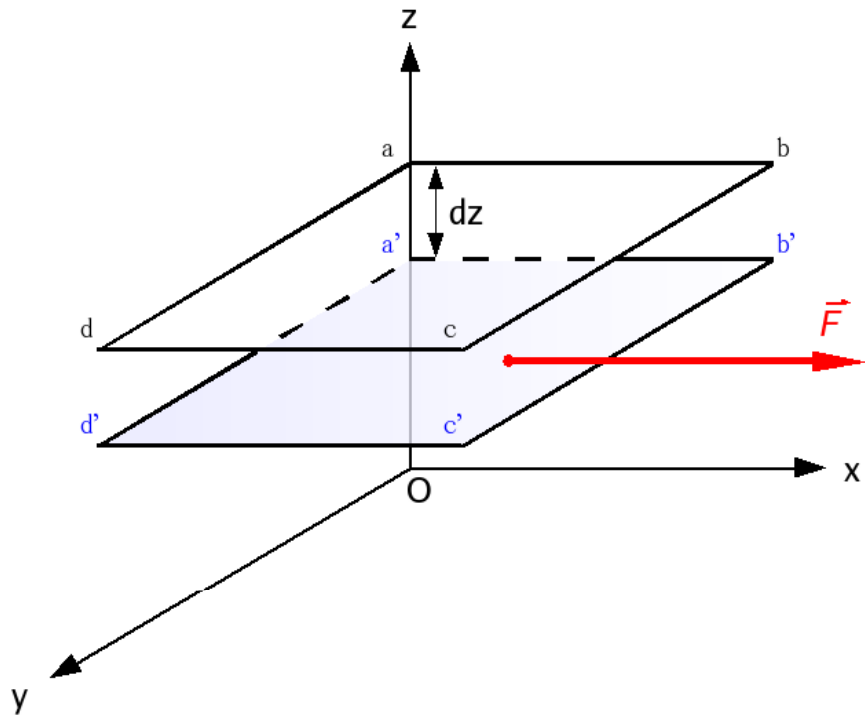
F : force de glissement entre les couches en (N),

μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s),

S : surface de contact entre deux couches en (m²),

ΔV : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),

ΔZ : Distance entre deux couches en (m).



I.4.2.2 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique ν s'obtient en divisant la viscosité dynamique par

la masse volumique : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ en [m².s⁻¹].

1.4.3. Tension de surface d'un fluide

La tension superficielle (γ) est la force qu'il faut exercer pour diminuer l'aire à l'interface de deux milieux, en N/m ou bien J/m².

Lamelle : $\gamma = F/l$

Tube : $\gamma = F/2\pi r$

Le système tend vers un équilibre qui correspond à la configuration de plus basse énergie, il modifie donc sa géométrie pour diminuer l'aire de cette interface.

Nom du liquide	Tension superficielle ($N \cdot m^{-1}$)
Mercure	$480 \cdot 10^{-3}$
Eau	$73 \cdot 10^{-3}$

I.4.3.1. Equation de Laplace-Young

Pour un système comportant deux milieux séparés par une interface courbée, il y a une différence de pression entre les deux milieux qui dépend elle-même de la tension superficielle γ .

a) Goutte sphérique

Cette loi peut s'écrire :

$$P_2 - P_1 = \frac{2\gamma}{R}$$

où :

- P_1 est la pression du côté extérieur (convexe) en pascals ;
- P_2 est la pression du côté intérieur (concave) en pascals ;
- R est le rayon de la goutte en mètre.

b) Bulle de savon

On a deux interfaces : une interface entre l'air à l'intérieur de la bulle et le liquide, puis une interface entre le liquide et l'air à l'extérieur de la bulle.

$$P_2 - P_{liq} = \frac{2\gamma}{R_{int}} \quad \text{et} \quad P_{liq} - P_1 = \frac{2\gamma}{R_{ext}}$$

P_1 : Pression à l'extérieur de la bulle

P_2 : Pression dans la bulle

P_{liq} : la pression dans le liquide

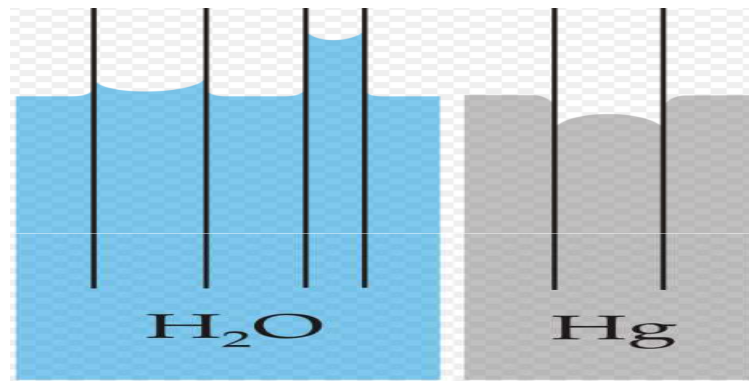
R_{int} et R_{ext} : les rayons intérieurs et extérieurs du film sphérique de liquide

L'épaisseur du film est très faible, on peut faire l'approximation : $R = R_{int} = R_{ext}$

$$P_2 - P_1 = \frac{4\gamma}{R}$$

I.4.3.2. Effet capillaire

La capillarité est le phénomène d'interaction qui se produit aux interfaces entre deux liquides non miscibles, due aux forces de tension superficielle entre les différentes phases en présence.



Lorsqu'un tube en verre est plongé dans de :

- ✓ l'eau, les molécules de **H₂O** sont plus attirées par le verre que par l'air, donc l'eau monte.
- ✓ le mercure, **Hg** descend dans les tubes, car il a plus d'affinité pour l'air que pour le verre.

I.4.3.3. Mouillabilité - Loi de Jurin

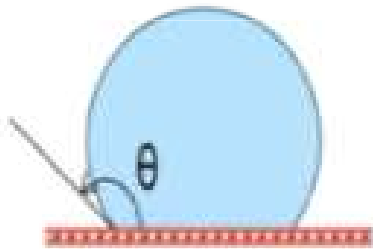
La mouillabilité est le comportement d'un liquide à la surface du solide, liée à l'angle de contact :

Mouillage parfait $\theta = 0^\circ$: le liquide s'étale totalement

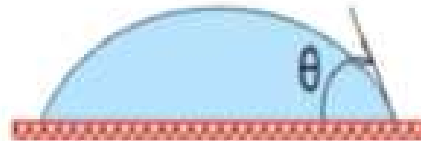


$\theta = 0$: mouillage total

Mouillage partiel $0^\circ < \theta < 180^\circ$: le liquide forme une goutte sur le solide



$\theta > 90^\circ$: hydrophobie



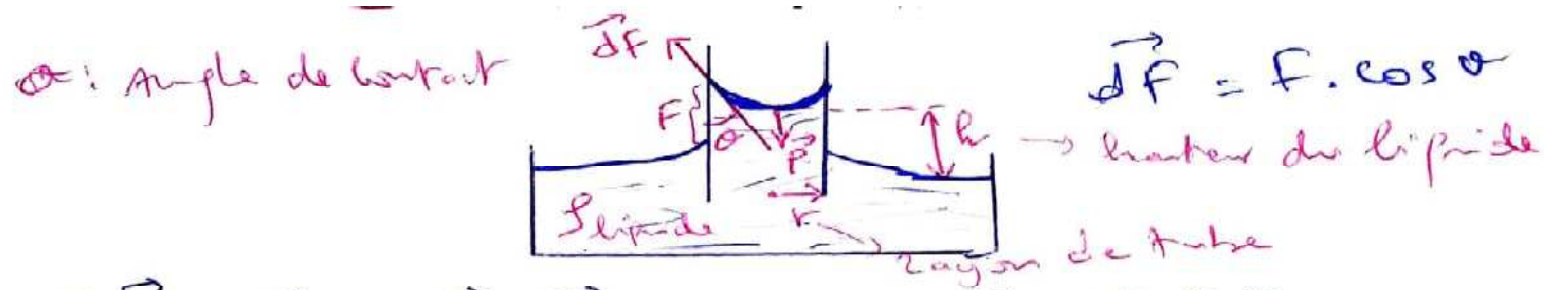
$\theta < 90^\circ$: hydrophilie

Mouillage nul $\theta = 180^\circ$: surface difficile à mouiller



$\theta = 180^\circ$: mouillage nul

* Démonstration de la loi de Jurin :



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{dF} = 0 \Rightarrow P - F \cdot \cos \theta = 0$$

$$P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g \quad \dots (1)$$

$$F = 2\pi r \cdot \gamma \quad \dots (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \gamma \cdot \cos \theta = \pi r^2 \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

$$\Rightarrow \left(h = \frac{2\gamma}{\rho \cdot g \cdot r} \cdot \cos \theta \right) \quad \begin{array}{l} \text{plus } r \text{ est faible, plus } h \text{ est important} \\ \sim \gamma \text{ est forte} \end{array}$$

Loi de Jurin

NB : $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow h = 0$ (pas de montée de liquide dans le tube)

$$\theta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta < 0 \Rightarrow h < 0$$

\Rightarrow le liquide ne mouille pas la paroi
(exp: le Mercure).

Chapitre 2 : Statique des fluides

La statique des fluides (ou l'hydrostatique) est la science de l'étude des fluides au repos.

II.1. Définition de la pression

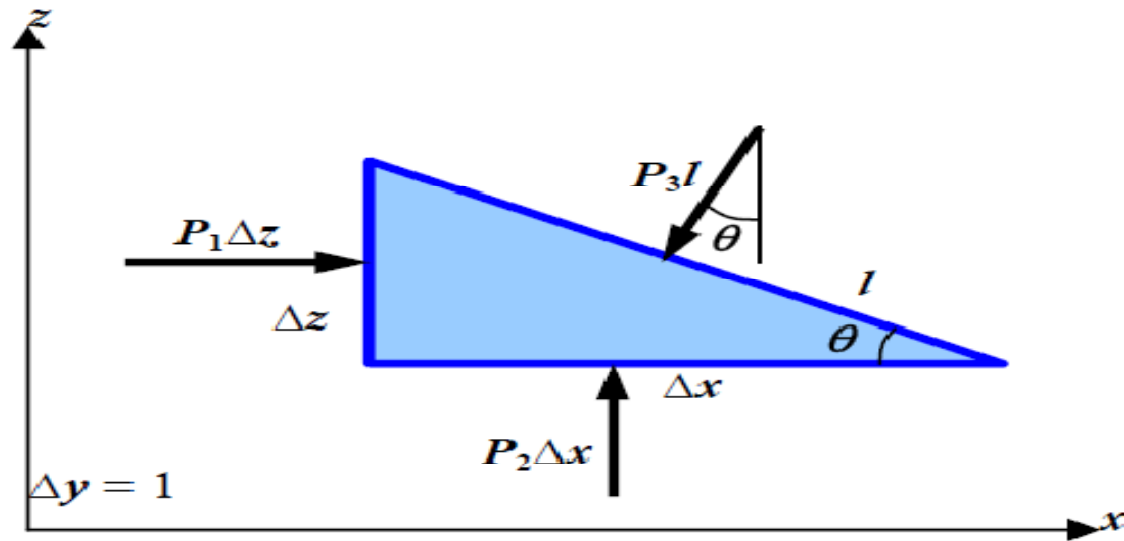
La pression est la force exercée par un fluide par unité de surface en N/m^2 ou bien en Pascal (Pa) :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (\text{N} : \text{Kg.m.s}^{-2}, \text{Pa} : \text{Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}).$$

$$1 \text{ atm} = 1,01325 \text{ bar} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = 9,81 \text{ N/cm}^2 = 9,81 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

II.2. Pression en un point d'un fluide



Les pressions moyennes aux 3 surfaces sont : P_1 , P_2 et P_3 .

La force agissant sur la surface = Pression \times l'aire de la surface.

l'équilibre des forces dans les directions x et z donne :

l'axe (ox) : $\sum F_x = 0 \rightarrow P_1 \cdot \Delta z - P_3 \cdot l \cdot \sin(\theta) = 0 \dots \dots \dots (1)$

l'axe (oz) : $\sum F_z = 0 \rightarrow P_2 \cdot \Delta x - P_3 \cdot l \cdot \cos(\theta) = 0 \dots \dots \dots (2)$

$\sin(\theta) = \Delta z / l$; $\cos(\theta) = \Delta x / l$

On remplace dans (1) : $P_1 = P_3$

(2) : $P_2 = P_3$

Alors : $P_1 = P_2 = P_3$

La pression en n'importe quel point d'un fluide est la même dans toutes les directions.

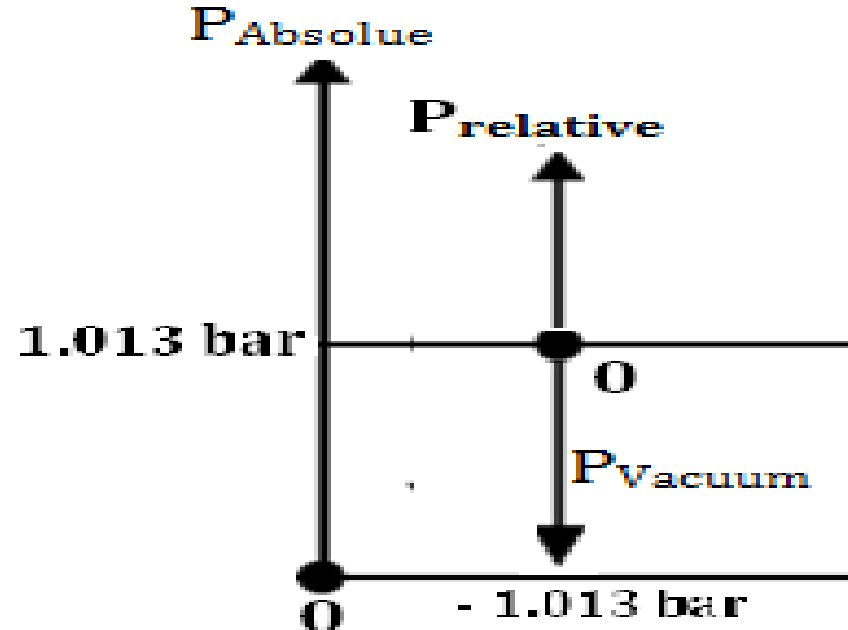
II.3. Différentes échelles de pression

a) Pression absolue (P_{abs}) : est la P mesurée par rapport au vide absolu (absence totale de matière).

b) Pression relative : se définit par rapport à la P_{atm}

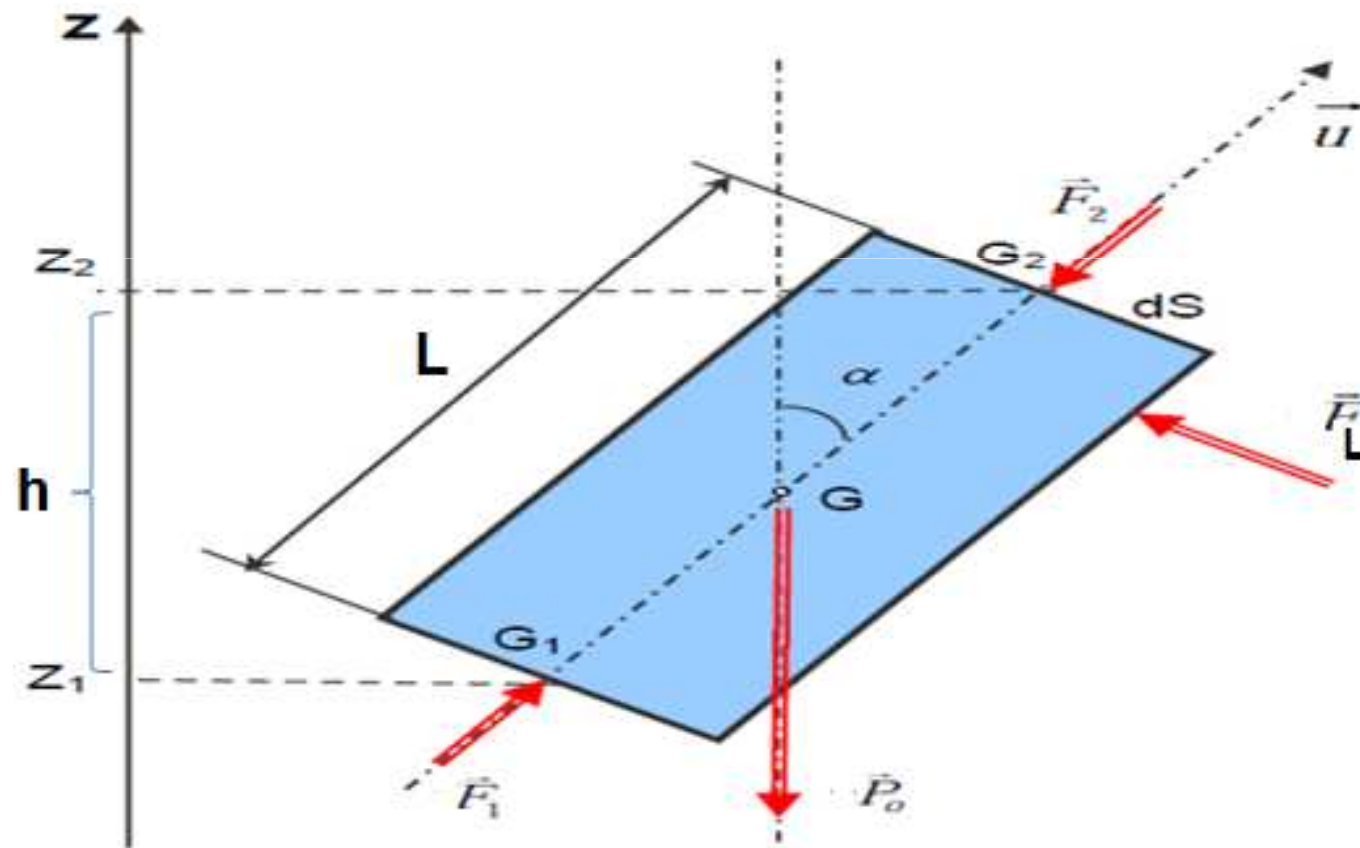
Si $P_{relative} < 0$, elle est désignée par « **Pression vacuum** ».

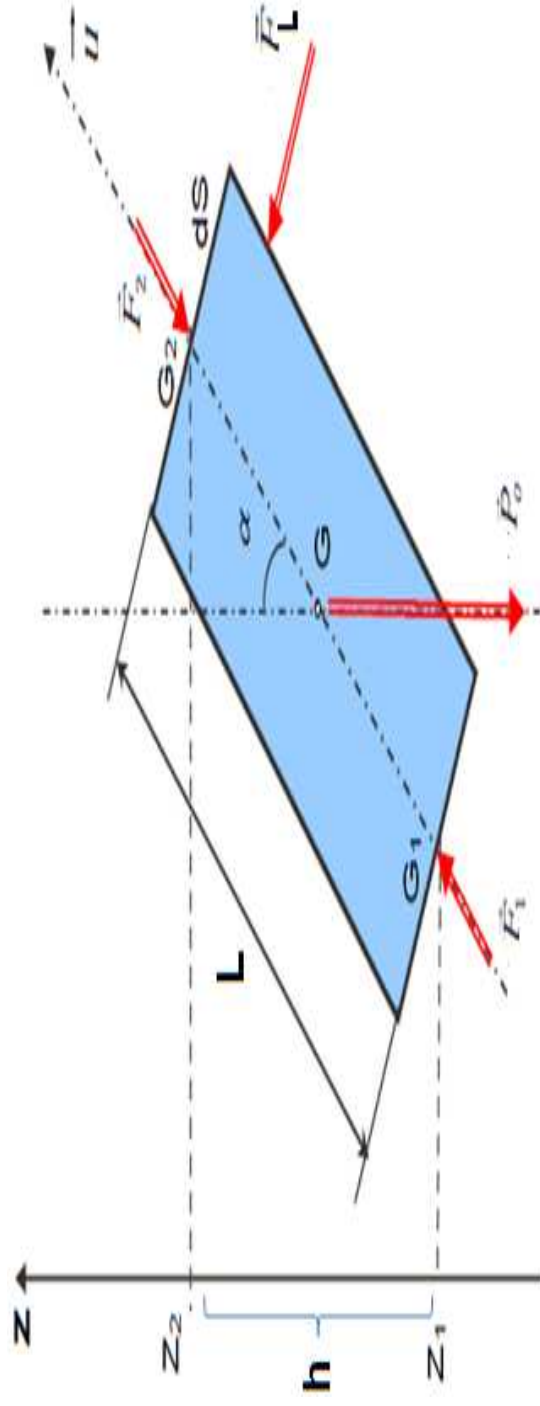
Nous avons : $P_{Absolue} = P_{Relative} + P_{Atmosphérique}$



II.4. Relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH)

Soit un élément d'un fluide a la forme d'un cylindre d'axe (G, \vec{u}) qui fait un angle α avec l'axe vertical (O, \vec{z}) . Soit L la longueur du cylindre et soit dS sa section droite. Soit G_1 d'altitude z_1 et G_2 d'altitude z_2 . P_1 et P_2 sont les pressions en G_1 et en G_2 .





Le cylindre élémentaire est soumis aux :

* **son poids** : $\vec{P}_0 = \omega \cdot dV \cdot \vec{Z} = \omega \cdot L \cdot dS \cdot \vec{Z}$

* **forces de pression s'exerçant sur** :

- La surface latérale : $\Sigma \vec{F}_L$

- Les deux surfaces planes extrêmes : $\vec{F}_1 = P_1 \cdot dS \cdot \vec{u}$; $\vec{F}_2 = P_2 \cdot dS \cdot \vec{u}$

Le cylindre élémentaire est en équilibre si : $\vec{P}_0 + \vec{F}_L + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

En projection sur l'axe de symétrie (G, u) du cylindre : $-\omega \cdot L \cdot dS \cdot \cos \alpha + P_1 \cdot dS - P_2 \cdot dS = 0$

En divisant par dS et sachant que : $L \cdot \cos \alpha = Z_2 - Z_1$

$\boxed{P_1 - P_2 = \omega \cdot (Z_2 - Z_1) = \rho g (Z_2 - Z_1)}$: Relation fondamentale de l'hydrostatique.. (RFH)

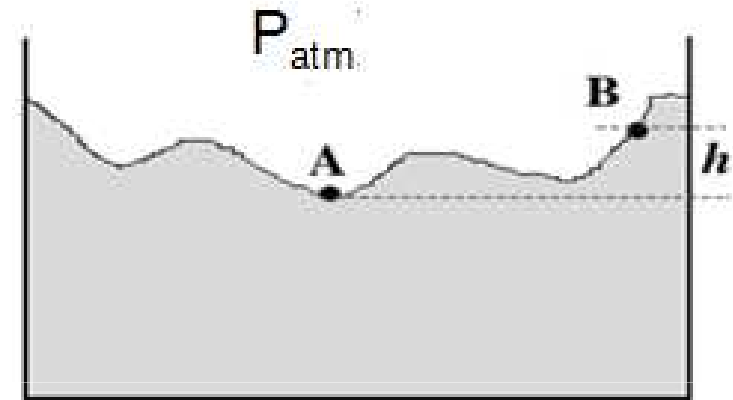
II.5. Surface de niveau

Elle se caractérise par une même **P** en chacun de ses points.

II.5.1. Surface libre d'un liquide

$P_A = P_B = P_{\text{atm}}$ donc $\Delta P = \rho \cdot g \cdot h = 0$: d'où $h = 0$

→ La surface libre d'un liquide au repos est :
plane et horizontale



II.5.2. Surface de séparation de deux liquides (I et II) non miscibles

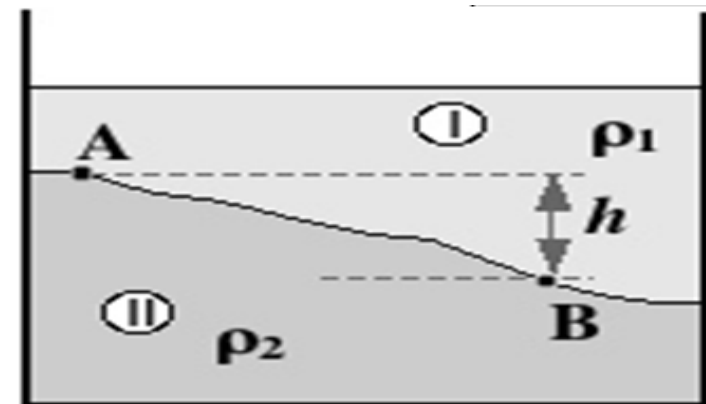
Fluide I, $P_B - P_A = \rho_1 g h$

Fluide II, $P_B - P_A = \rho_2 g h$

d'où $\rho_1 g h = \rho_2 g h \Rightarrow g h \cdot (\rho_1 - \rho_2) = 0$

On a : $g \neq 0$ et $(\rho_1 - \rho_2) \neq 0 \Rightarrow h = 0$.

→ La surface de séparation de deux liquides non miscibles au repos est **horizontale**.



II.5.3. Vases communicants : contenant plusieurs formes du récipient

$$P_A = P_B = P_C = P_D = P_{\text{atm}}$$

$$P_{A'} - P_{\text{atm}} = \rho gh \rightarrow P_{A'} = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

$$P_{B'} - P_{\text{atm}} = \rho gh \rightarrow P_{B'} = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

$$P_{C'} - P_{\text{atm}} = \rho gh \rightarrow P_{C'} = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

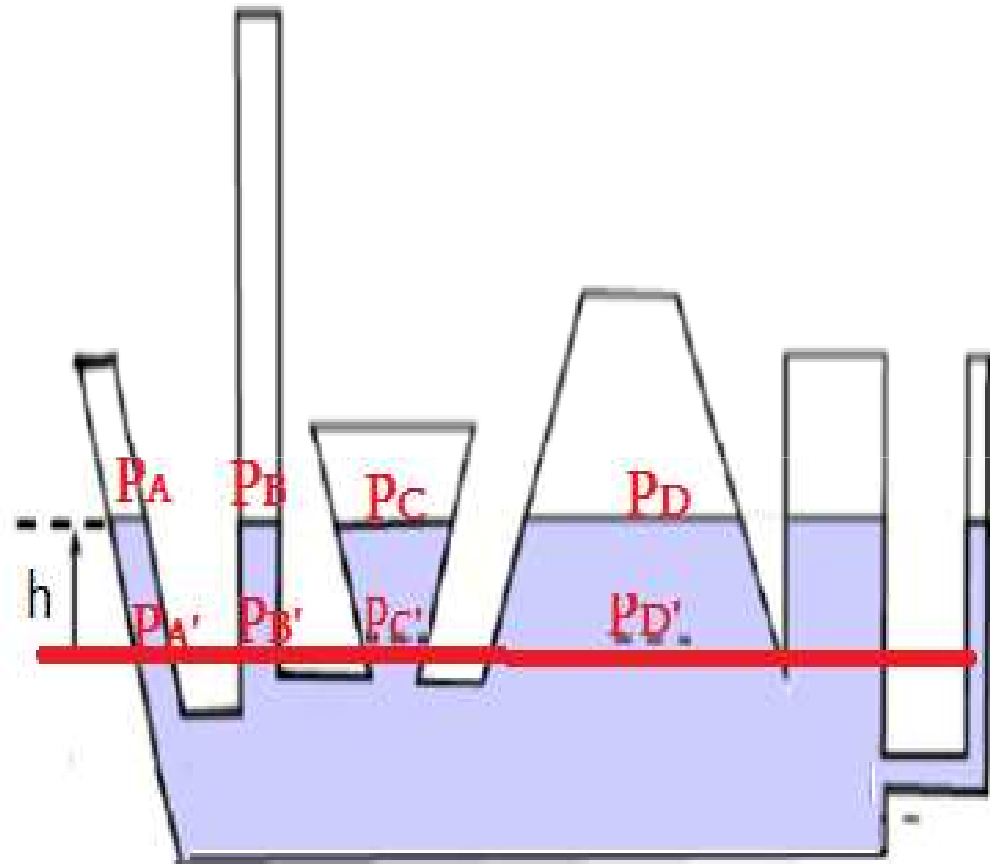
$$P_{D'} - P_{\text{atm}} = \rho gh \rightarrow P_{D'} = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

$$\rightarrow P_{A'} = P_{B'} = P_{C'} = P_{D'}$$

La pression dans un fluide est :

indépendante de la **taille**

ou de la **forme** du récipient.



II.6. Théorème de Pascal

a) Enoncé

Pour un fluide incompressible en équilibre, toute ΔP en un point entraîne la même ΔP en tout autre point.

b) Démonstration

- Au point G_1 nous avons ΔP_1

- Au point G_2 nous avons ΔP_2

Appliquons la RFH entre G_1 et G_2 pour le fluide :

à l'état initial: $P_1 - P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1)$ (1)

à l'état final : $(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \varpi.(Z_2 - Z_1)$ (2)

En faisant la différence entre les équations (2) et (1) on obtient : $\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$

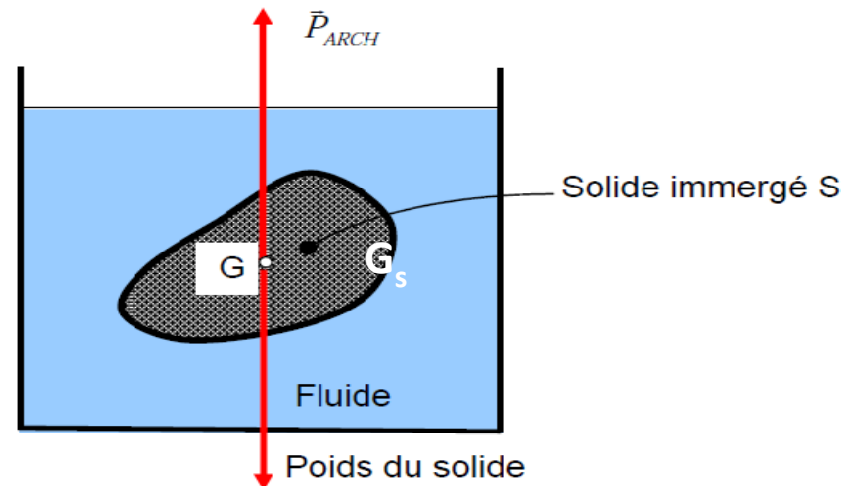
D'où $\boxed{\Delta P_1 = \Delta P_2}$

II.6. Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale orientée vers le haut , **c'est la poussée d'Archimède** : $P_{ARCH} = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{immergé}}$

G : centre de poussée d'Archimède.

G_s : centre de gravité du solide.



Remarques:

- **1^{er} cas** : Si le solide immergé est homogène : **G** est confondu avec **G_s**.
- **2^{ième} cas** : Si le solide immergé est hétérogène **G** n'est pas confondu avec le **G_s**

II.7. Calcul des forces de pression

II.7.1. Cas de surface plane verticale

$$F = P_C \cdot S$$

P_C : la pression relative à h_C de profondeur

C : c'est le centre de gravité

$$F = (P_{\text{absolue}} - P_{\text{atm}}) \cdot S$$

$$\text{Donc : } F = \rho g h_C \cdot S$$

II.7.2. Cas de surface plane inclinée

$$F = P_C \cdot S$$

P_C : la pression relative à h_C de profondeur

$$F = (P_{\text{absolue}} - P_{\text{atm}}) \cdot S$$

$$F = \rho g \cdot h_C \cdot S$$

$$\text{Donc : } F = \rho g \cdot y_C \sin\theta \cdot S$$

II.7.3. cas de surface courbe

$$\mathbf{F} = P_c \cdot S$$

$$F_x = \rho g h_c S$$

$$\tan \theta = F_z / F_x$$

$$F_z = \tan \theta \cdot F_x$$

$$F_z = \tan \theta \cdot \rho g \cdot h_c \cdot S$$

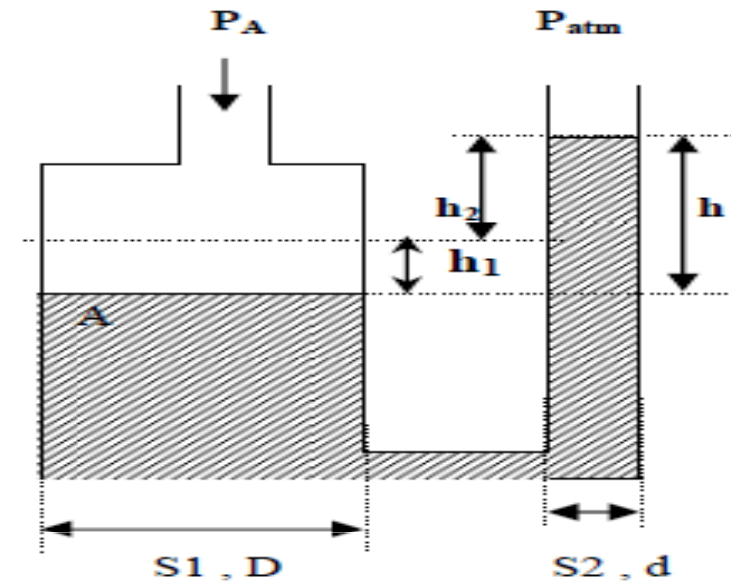
$$\text{Donc : } F = (F_x^2 + F_z^2)^{1/2}$$

II.8. Instruments de mesure de la pression statique

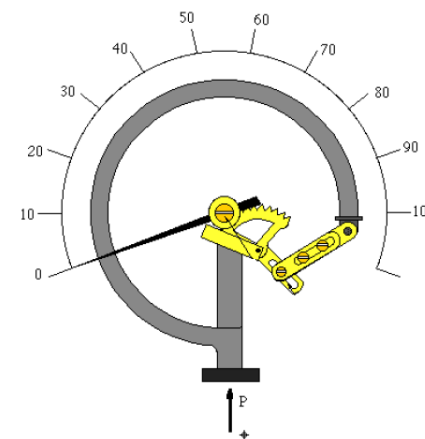
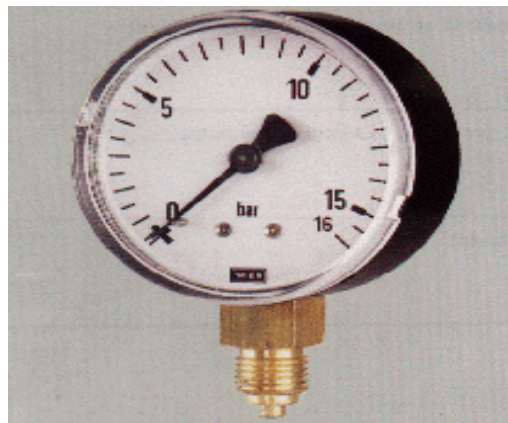
Il existe 02 catégories principales d'instruments :

* Les manométrique en forme de " U " :

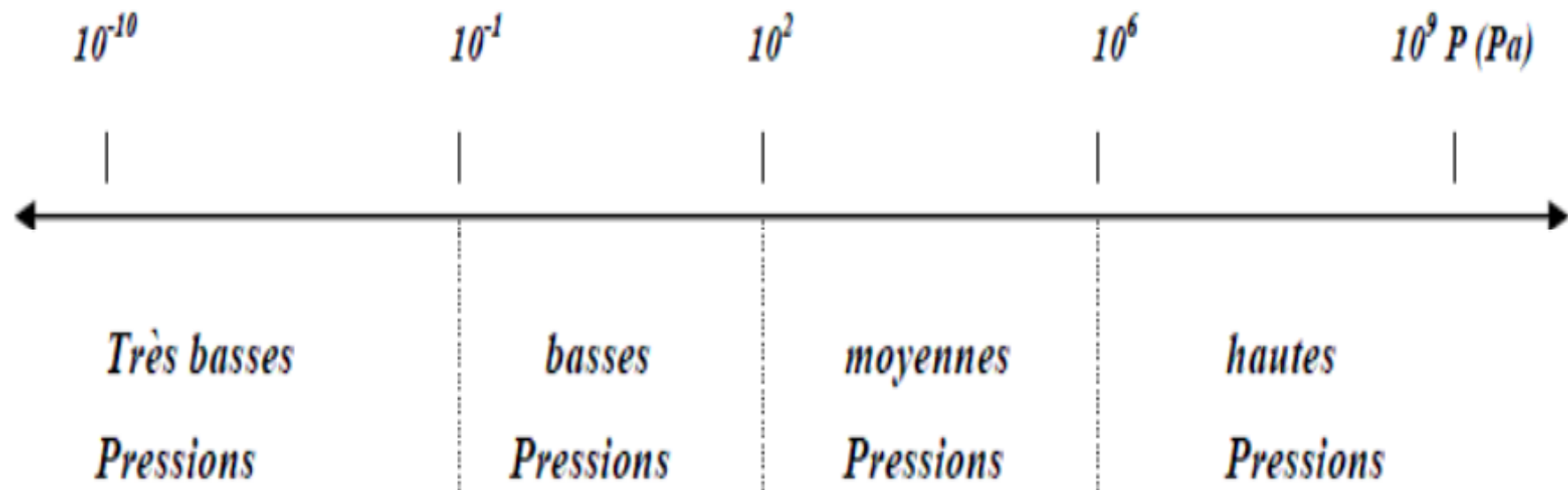
Il s'agit d'un dispositif utilisé pour la mesure des pressions dans les liquides et les gaz.



* **Les manomètres mécaniques** : utilisés pour la mesure de pressions relativement plus élevées.



II.8. Domaines de mesure de pression



II.9. Baromètre de Torricelli (1644)

Torricelli remplit de **Hg** un tube de verre fermé à une extrémité. Il le retourne et le plonge dans une cuvette remplie de Hg. Il constate que le niveau de Hg dans le tube s'abaisse, laissant un espace de vide au dessus de lui. Il vient de découvrir la P_{atm} .

$$P_B - P_C = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h = P_B = P_A = P_{\text{atm}}$$

$$\Rightarrow P_C = 0.$$

$$P_{\text{atm}} = h \cdot \rho_{\text{Hg}} \cdot g$$

$$\rho_{\text{Hg}} = 13546 \text{ Kg/m}^3, \quad h = 762 \text{ mm}$$

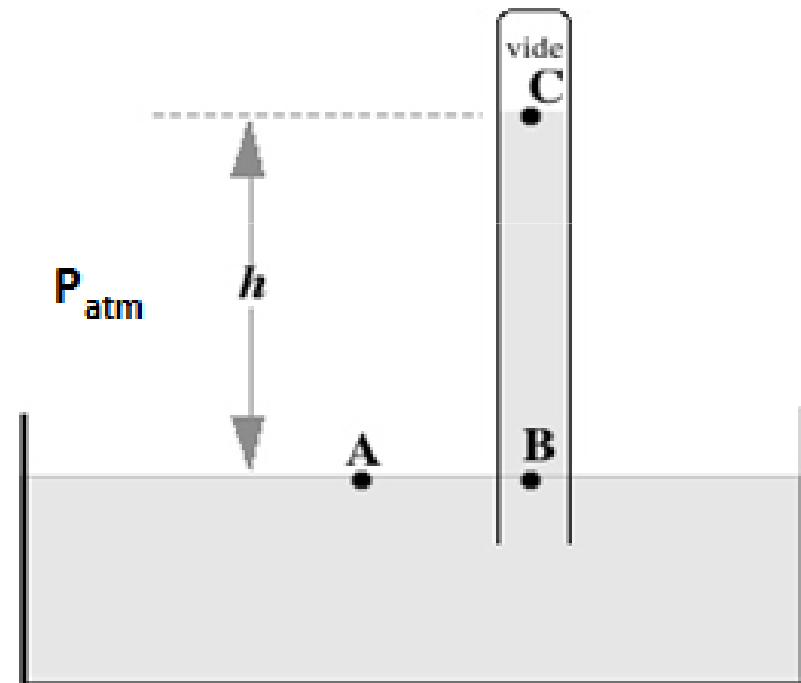
$$\Rightarrow P_{\text{atm}} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Donc : 762 mmHg = 1 atm.

Cas d'une colonne d'eau équivalente :

$$h_{\text{eau}} = P_{\text{atm}} / \rho_{\text{eau}} \cdot g, \quad \rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$h_{\text{eau}} = 10,33 \text{ m}$$



Chapitre 3 :

Dynamique des fluides incompressibles parfaits

Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement.

III.1. DEFINITIONS

III.1.1. Débit massique (q_m) et débit volumique (q_v)

➤ q_m : m de fluide / t qui traverse une S de la conduite.

$$q_m = dm/dt = \rho \cdot dV/dt = \rho \cdot S \cdot dx/dt$$

$$q_m = \rho \cdot S \cdot v \dots\dots(1)$$

➤ q_v : v de fluide / t qui traverse une S de la conduite

$$q_v = dV/dt = S \cdot dx/dt$$

$$q_v = S \cdot v \dots\dots(2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \rightarrow q_m = \rho \cdot q_v$$

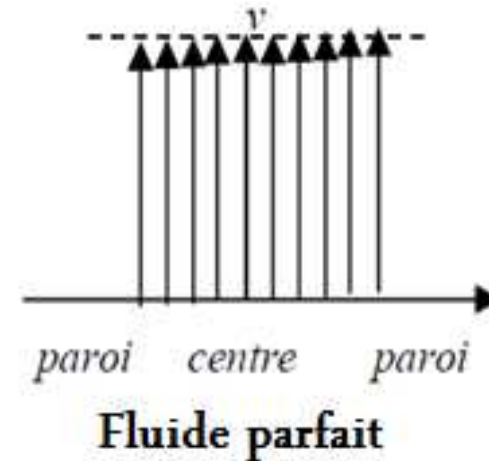
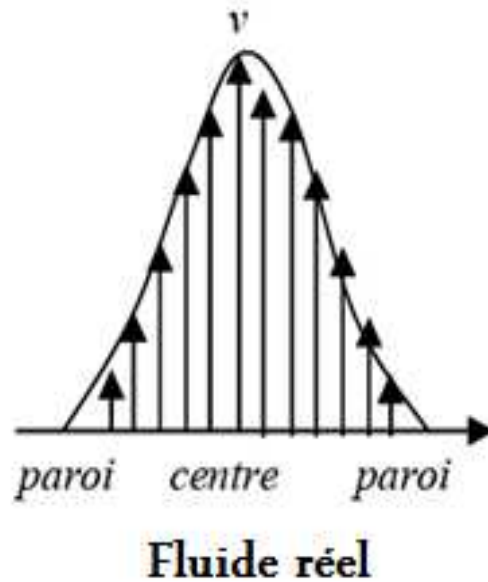
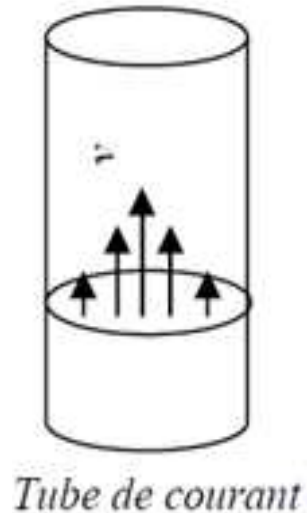
III.1.2. Écoulements permanents (ou stationnaires)

Un régime d'écoulement est dit permanent si les paramètres qui le caractérisent (P , T , v , ρ , ...), ont une valeur constante au cours du temps.

.

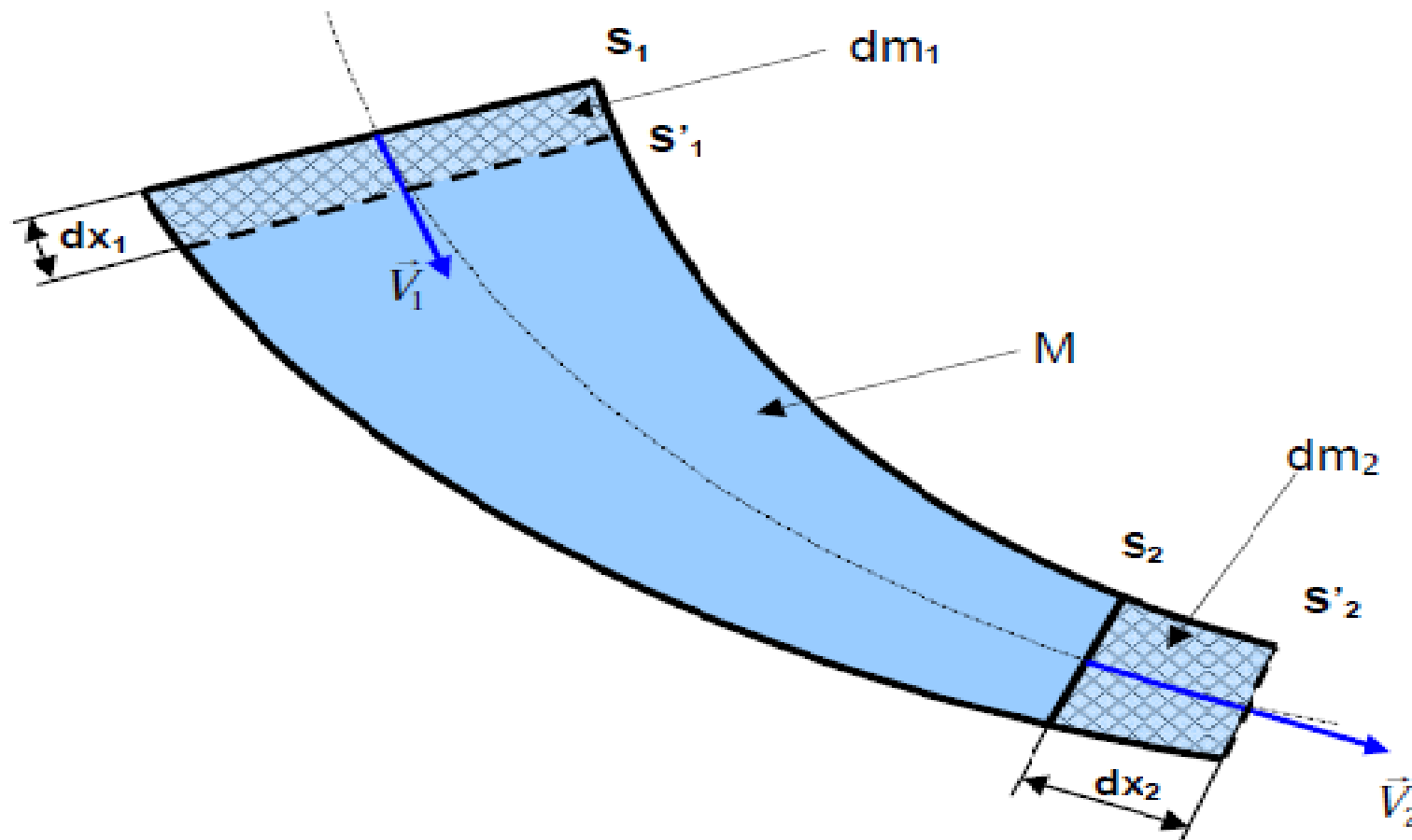
III.1.3. Profil de vitesse

- **fluides réels**, la v est quasi-nulle sur la paroi et maximale au centre. Effet de frottement sur les parois et entre les particules.
- **fluides parfaits**, la v est constante sur toute la section.



III.2. Equation de continuité (*Conservation de la masse*) :

Soit une conduite d'un fluide incompressible animée d'un écoulement permanent :

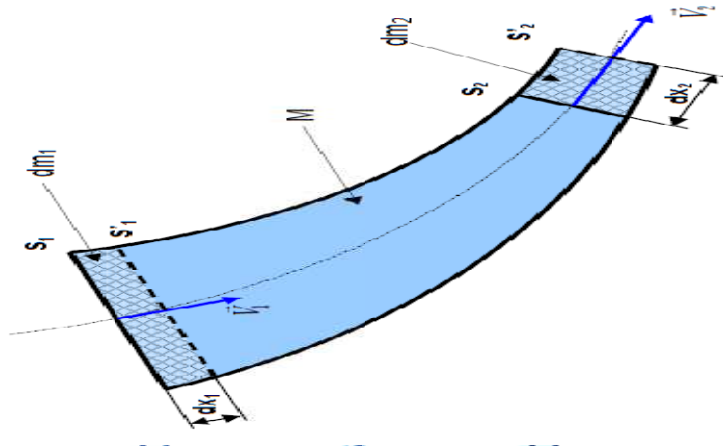


On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t ,
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$,
- \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ,
- M : masse comprise entre S_1 et S_2 ,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1 + M)$

A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M + dm_2)$.



Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura

$$dm_1 = dm_2 \text{ Donc } \rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2 \text{ ou encore } \rho_1 S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2,$$

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

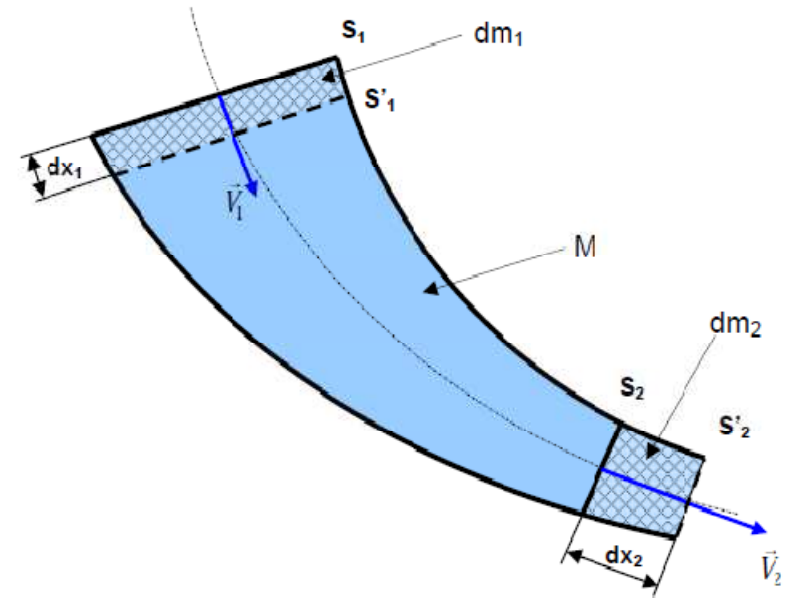
Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à

l'équation de continuité suivante :

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2 \dots\dots(I)}$$

$$q_{v1} = q_{v2} \rightarrow q_{m1} / \rho = q_{m2} / \rho$$

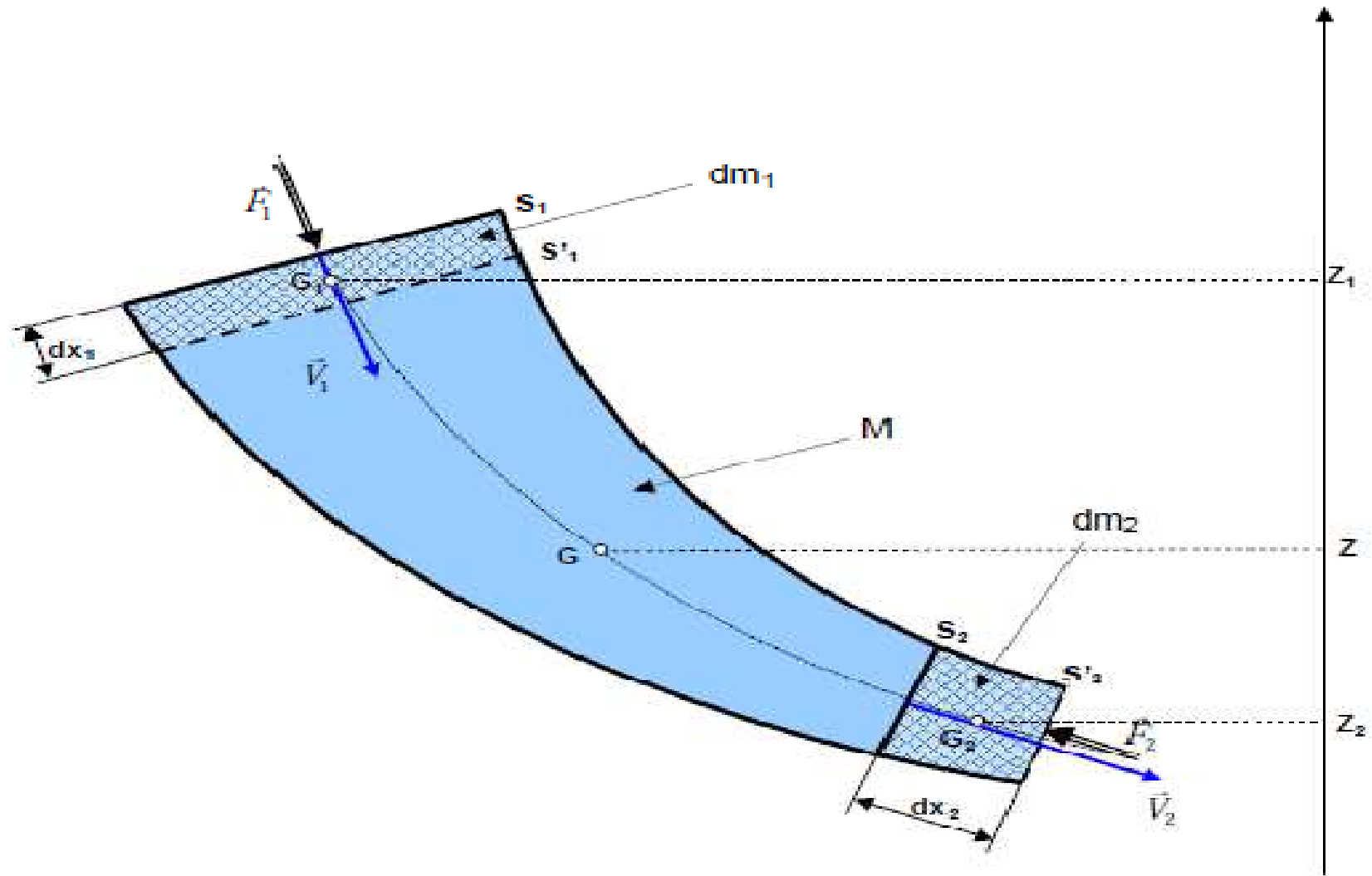
$$\mathbf{q_{m1} = q_{m2} \text{ (Conservation de la masse)}}$$



III.3. Théorème de Bernoulli

III.3.1. Cas d'écoulement sans échange de travail

Reprenons le même schéma de la canalisation :



z_1, z_2 et z_3 : les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

F_1 et F_2 : les forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

✓ A l'instant " t " le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2
Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot z_1 + M \cdot g \cdot z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} V^2 \cdot M$$

✓ A l'instant $t' = (t + dt)$ le fluide de masse $(M + dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (M \cdot g \cdot z + dm_2 \cdot g \cdot z_2) + \frac{1}{2} V^2 \cdot M + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2$$

La variation de l' $E_{\text{méc}}$ = somme des travaux des forces extérieures
entre t et t' :

$$E'_{\text{méc}} - E_{\text{méc}} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2$$

$$E'_{\text{méc}} - E_{\text{méc}} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2$$

$$dm_2 \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho \rightarrow$ **l'équation de Bernoulli** :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) = 0 \dots\dots\dots \text{(I)}.$$

a) Bilan énergétique : On peut écrire ce théorème en Joule/kg ; (Qté d'énergie / masse)

$$(I) \rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + g \cdot Z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho} + g \cdot Z_2$$

- le $\frac{1}{2} v^2$: Energie cinétique / kg de fluide [J/kg]

- le $g \cdot z$: Energie potentielle de pesanteur / kg de fluide [J/kg]

- le P/ρ : Energie de pression / kg de fluide [J/kg]

b) Bilan des pressions :

On peut écrire ce théorème en J/m³ c.à.d. en Pascal. (Qté d'énergie / volume).

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho \cdot g \cdot Z_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 + \rho \cdot g \cdot Z_2$$

$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2$: Pression dynamique

P : Pression statique (P que mesure un capteur qui se déplace à la même vitesse que le fluide).

$\rho \cdot g \cdot z$: Pression de pesanteur

c) Bilan des hauteurs : On peut écrire ce théorème en J/N c.à.d. en mètre. (Qté

d'énergie / force)

$$\frac{1}{2g}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{1}{2g}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$v^2/2g$: la hauteur cinétique.

$P/\rho.g$: la hauteur de pression.

Z : l'altitude.

NB :

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + P + \rho \cdot g \cdot z = \text{Cte}$$

*** Fluide au repos : vitesse = 0**

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 + p + \rho \cdot g \cdot h &= \text{Cte} \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot g \cdot h_1 \\ &= \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \rightarrow \mathbf{RFH} \end{aligned}$$

III.3.2. Cas d'écoulement avec échange de travail

Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'E sous forme de travail **W / t**. La puissance **P** échangée est : **P = W/t** en Watt (Joule/s).

- **P > 0** si l'énergie est reçue par le fluide (exemple : Pompe) ;
- **P < 0** si l'énergie est fournie par le fluide (exemple : Turbine).

$$(I) \rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P}{q_m}$$

Ou bien :

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{P}{q_v}$$

III.4. Applications de l'équation de Bernoulli

III.4.1. Tube de Pitot

Un fluide en écoulement dans une canalisation et 2 tubes plongés à la même hauteur ($z_B = z_A$).

* **Au point A**, en face au courant, les lignes de courant s'arrêtent le long de cet obstacle ($\mathbf{v}_A = 0$).

* **Au point B**, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}$ d'écoulement.

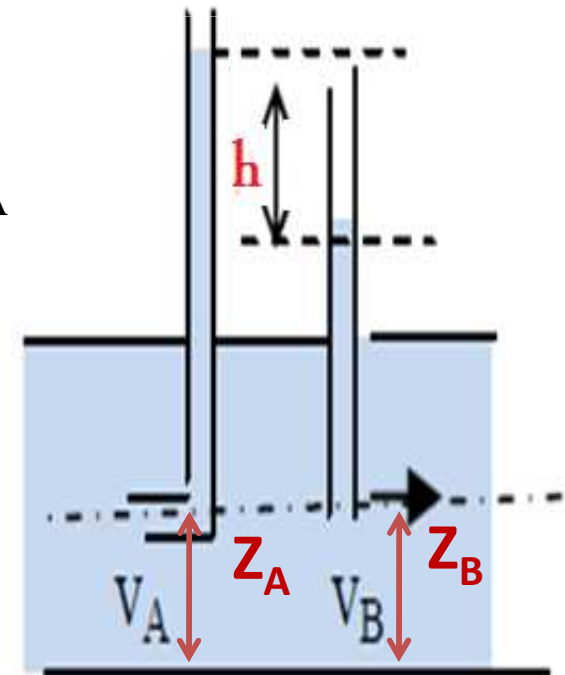
Nous avons :

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2 + P_B + \rho \cdot g \cdot z_B = \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 + P_A + \rho \cdot g \cdot z_A$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2, \text{ avec } P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\mathbf{v}_B = 2gh = \mathbf{v}$$

mesurant la dénivellation h , on peut déduire la \mathbf{v} d'écoulement.



III.4.2. Tube de Venturi

Une conduite en **A** subit un convergent en **B**.

Dans le convergent : La **v** du fluide augmente et sa **P** diminue :

$$v_B > v_A$$

L'équation de Bernoulli : $z_B = z_A$

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2 + P_B = \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 + P_A$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2)$$

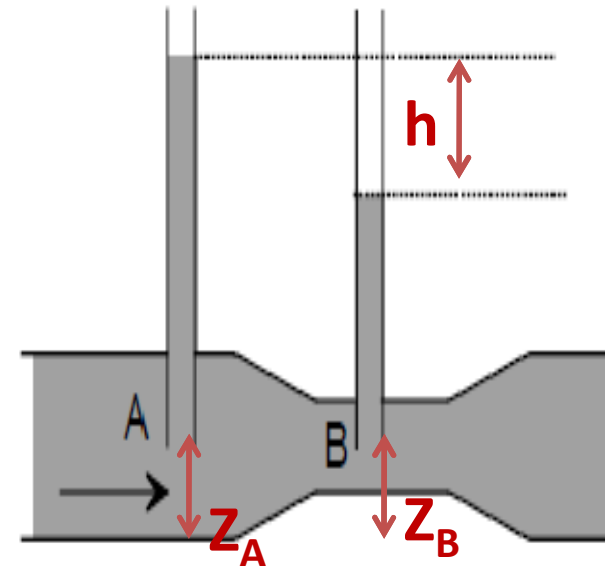
l'équation de continuité :

$$v_B \cdot S_B = v_A \cdot S_A = q_v \Rightarrow v_B = q_v / S_B \text{ et } v_A = q_v / S_A$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right) q_v^2$$

$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right) q_v^2$$

$$q_v =$$



III.4.3. Formule de Torricelli

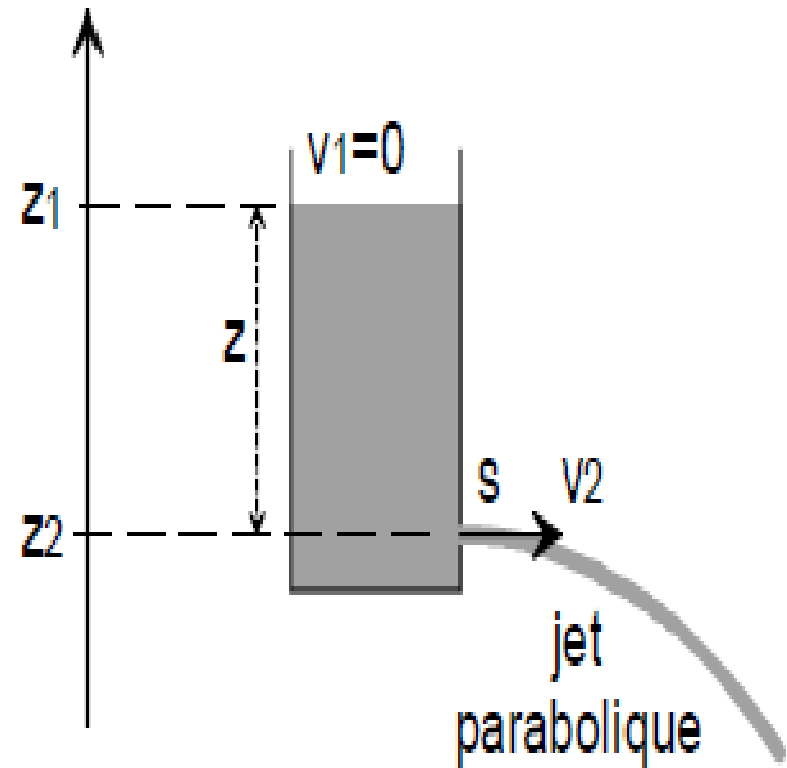
Un réservoir muni d'un petit orifice à sa base, de section **S**.

Théorème de Bernoulli entre (1) et (2) :

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2$$

$$p_1 = p_2 = P_{atm}$$

$$\text{Et } v_1 \ll v_2 \text{ d'où } v_2 = \sqrt{2gz}$$



III. 5. Théorème d'Euler

Ce théorème permet de déterminer les forces exercées par le fluide en mouvement sur les objets.

Lorsqu'un jet d'un écoulement de débit q_m de \mathbf{v}_1 , en direction parallèle à l'axe \mathbf{X} , percute un obstacle, le fluide quitte ce dernier à une \mathbf{v}_2 de direction faisant un angle β par rapport à l'axe \mathbf{X} .

La quantité de mouvement du fluide est :

à l'entrée de l'obstacle : $q_m \cdot \mathbf{v}_1$.

à la sortie de l'obstacle est : $q_m \cdot \mathbf{v}_2$

La force \mathbf{F} exercée sur l'obstacle = à la variation de la quantité de mouvement :

$$\vec{F} = q_m \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} F_x = q_m \cdot \|\vec{V}_1\| \cdot (1 - \cos \beta) \\ F_y = -q_m \cdot \|\vec{V}_1\| \cdot \sin \beta \end{array} \right]$$

Chapitre 4: Dynamique des fluides incompressibles réels

Introduction

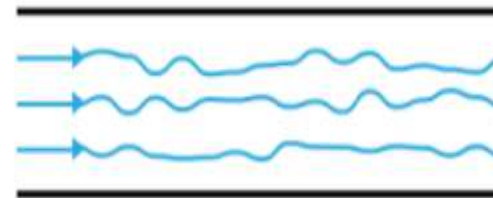
- ✓ on fait appel à des résultats expérimentaux de Reynolds,
- ✓ le calcul des pertes de charge est indispensable pour la construction des diverses installations hydrauliques

IV. 1. Régimes d'écoulement

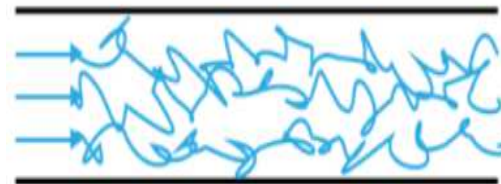
• **Régime laminaire** : écoulement rectiligne, le fluide s'écoule en filets parallèles à l'axe de la conduite.



• **Régime transitoire** : avec un peu de mélange (petits tourbillons).



• **Régime turbulent** : l'écoulement se fait avec de grands tourbillons.



IV. 2. Expérience de Reynolds

- En utilisant des fluides divers (viscosité différente),
 - En faisant varier le débit et le diamètre de la conduite,
- Le paramètre qui permet de déterminer le régime d'écoulement est un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds** :

$$Re = \frac{V \cdot d}{\nu}$$

- **v** : Vitesse d'écoulement (m/s)
- **d** : Diamètre de la conduite (m).
- **ν** : Viscosité cinématique du fluide (m²/s).

Re < 2000 : le régime est laminaire

2000 < Re < 3000 : le régime est transitoire

Re > 3000 : le régime est turbulent $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{3000 < Re < 10^5} : \text{turbulent lisse.} \\ \mathbf{Re > 10^5} : \text{turbulent rugueux.} \end{array} \right.$

IV. 3. Pertes de charge (ΔP)

IV. 3. 1. Phénomène

Observations

La pression d'un liquide réel diminue :

- au long d'une canalisation uniforme
- après le passage à travers un coude ou un rétrécissement.

Conclusion

- Un fluide réel en mouvement, subit des pertes de charge " ΔP "
(**pertes d'énergie en Pascal = Joule/Kg**).

Si ' ΔP ' dues aux frottements sur :

- ✓ les parois de la canalisation (**pertes de charge linéaires : J_L**).
- ✓ les "accidents" de parcours (**pertes de charge singulières J_S**).

IV. 3.2. Pertes de charge linéaires (J_L)

Les pertes de charge linéaires sont dues aux frottements sur les parois de la conduite.

$$\boxed{J_L = -\lambda \cdot \frac{V^2}{2} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)} : \text{ en Joule / Kg}$$

$J_L \cdot \rho$: en Pascal.

V : vitesse d'écoulement (**m/s**).

L : longueur de la conduite (**m**).

d : diamètre de la conduite (**m**).

λ : coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend du régime d'écoulement.

Dans un régime **laminaire** :

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{R_e}} \text{ (Formule de Poiseuille)}$$

Dans un régime **transitoire et turbulent lisse** :

$$\boxed{\lambda = 0,316.R_e^{-0,25}} \text{ (Formule de Blasius)}$$

Dans un régime **turbulent rugueux** :

$$\boxed{\lambda = 0,79.\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}} \text{ (Formule de Blench)}$$

avec :

- ε : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)
- d : diamètre intérieur de la conduite (mm)

IV. 3.3. Pertes de charge singulières (J_s)

Quand la conduite subit de brusque variation de section ou de direction "accidents de parcours", il se produit des pertes de charges dites singulières.

$$J_s = -K_s \cdot \frac{V^2}{2} \quad : \text{ en Joule / Kg}$$

$J_s \cdot \rho$: en Pascal.

K_s : Coefficient de pertes de charge (sans unité). Il dépend de la géométrie de l'accident de parcours.

Remarques :

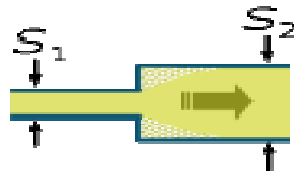
- * Les valeurs de K_s sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

- * pour réduire les J_s , on doit éviter les angles vifs et les changements brusques des sections.

* Quelques géométries typiques avec les coefficients **Ks** associés

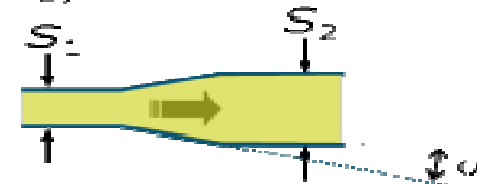
Elargissement brusque

$$K = (1 - S_1/S_2)^2$$



Divergent

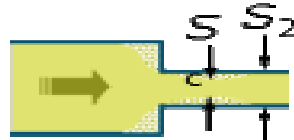
$$K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$$



Rétrécissement brusque

$$K = (1/\mu - 1)^2$$

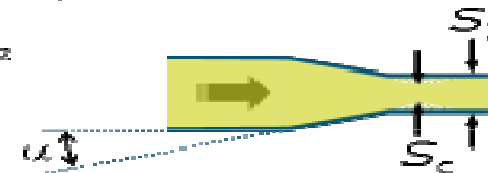
$$\mu = S_c/S_2$$



Convergent

$$K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$$

$$\mu = S_c/S_2$$



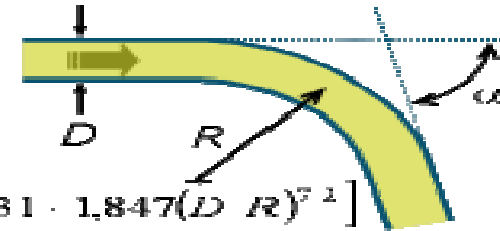
Coude brusque

$$K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$$



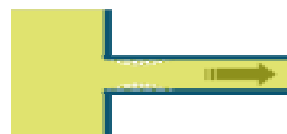
Coude arrondi

$$K = \frac{\alpha}{\pi} \left[0,131 + 1,847 \left(\frac{D}{R} \right)^{1/2} \right]$$



Entrée de canalisation brusque

$$K = 0,5$$



Entrée de canalisation progressive

$$K = 0,04$$

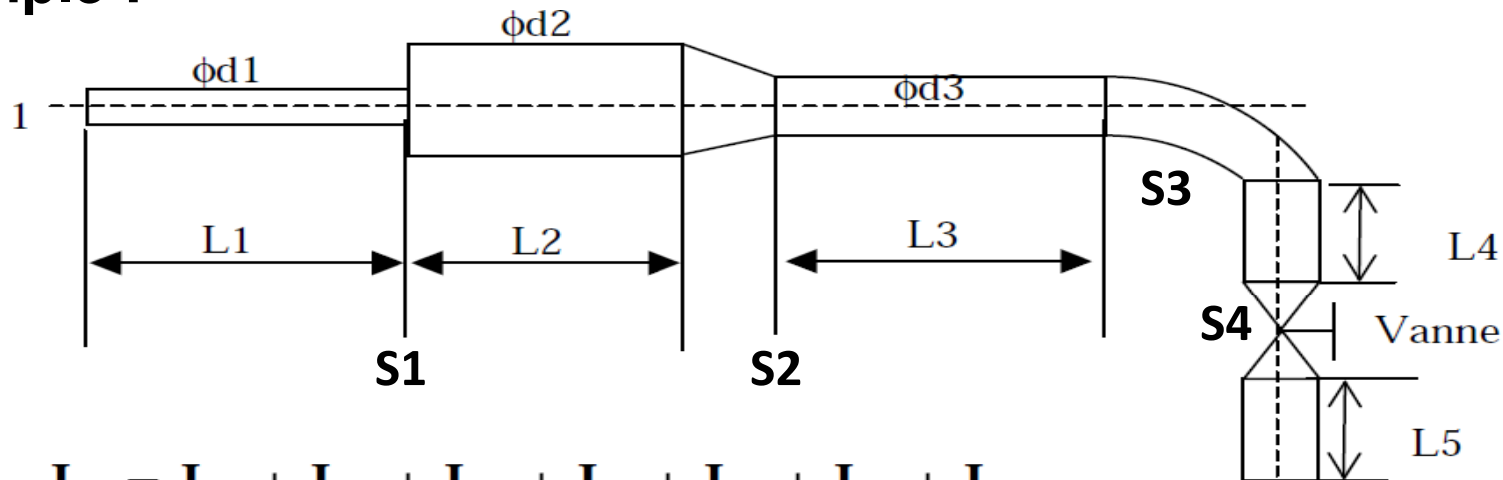


IV. 4. Perte de charge totale “ J_{totale} ”

La perte de charge totale entre deux points d'un circuit est :

$$J_{\text{Totale}} = \sum (J_L + J_S)$$

Exemple :



$$J_{12} = J_{L1} + J_{L2} + J_{L3} + J_{S1} + J_{S2} + J_{S3} + J_{S4}$$

Avec :

J_{L1} : Perte linéaire dans la conduite de $\phi d1$ et de longueur $L1$

J_{L2} : Perte linéaire dans la conduite de $\phi d2$ et de longueur $L2$

J_{L3} : Perte linéaire dans la conduite de $\phi d3$ et de longueur $L3 + L4 + L5$

J_{S1} : Perte singulière élargissement

J_{S2} : Perte singulière rétrécissement progressif

J_{S3} : Perte singulière coude

J_{S4} : Perte singulière vanne

IV. 5. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite.

*** Cas d'un écoulement sans échange de travail :**

$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho} \cdot (P_2 - P_1) + g \cdot (Z_2 - Z_1) = J_{12}$$

$J_{12} = J_{\text{Tot}} = \Sigma$ de toutes les pertes de charge, J_L et J_S dans la conduite

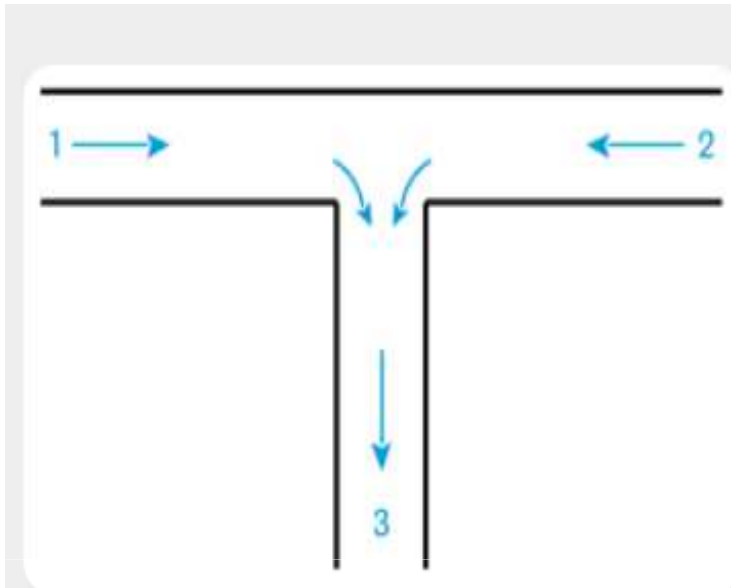
*** Cas d'un écoulement avec échange de travail :**

On suppose éventuellement, qu'il existe entre (1) et (2) des machines hydrauliques.

$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho} \cdot (P_2 - P_1) + g \cdot (Z_2 - Z_1) = J_{12} + \frac{P_n}{q_m}$$

P_n : Puissance mécanique échangé entre le fluide et les machines placées entre (1) et (2).

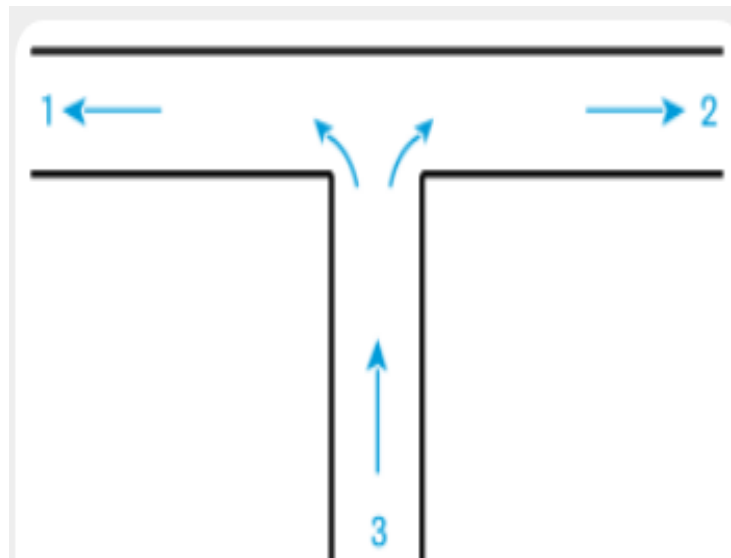
IV. 6. Jonctions de conduites



Pour une jonction à confluent symétrique, les coefficients de singularité sont :

$$k_{13} = 2 + 3 \cdot \left[\left(\frac{Q_{v1}}{Q_{v3}} \right)^2 - \frac{Q_{v1}}{Q_{v3}} \right]$$

$$k_{23} = 2 + 3 \cdot \left[\left(\frac{Q_{v2}}{Q_{v3}} \right)^2 - \frac{Q_{v2}}{Q_{v3}} \right]$$



Pour une jonction à séparation symétrique, les coefficients de singularité sont :

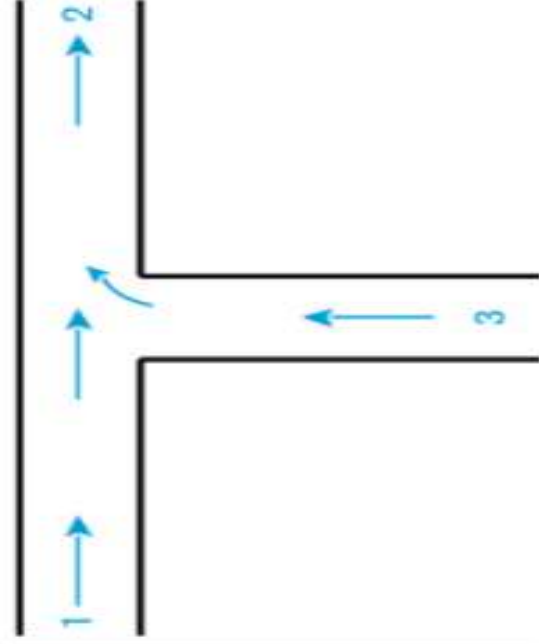
$$k_{31} = 1 + 0,3 \cdot \left(\frac{Q_{v1}}{Q_{v3}} \right)^2$$

$$k_{32} = 1 + 0,3 \cdot \left(\frac{Q_{v2}}{Q_{v3}} \right)^2$$

Pour une jonction à confluent latéral, les coefficients de singularité sont :

$$k_{12} = 2 \cdot \frac{Q_{v3}}{Q_{v2}} - \left(\frac{Q_{v3}}{Q_{v2}} \right)^2$$

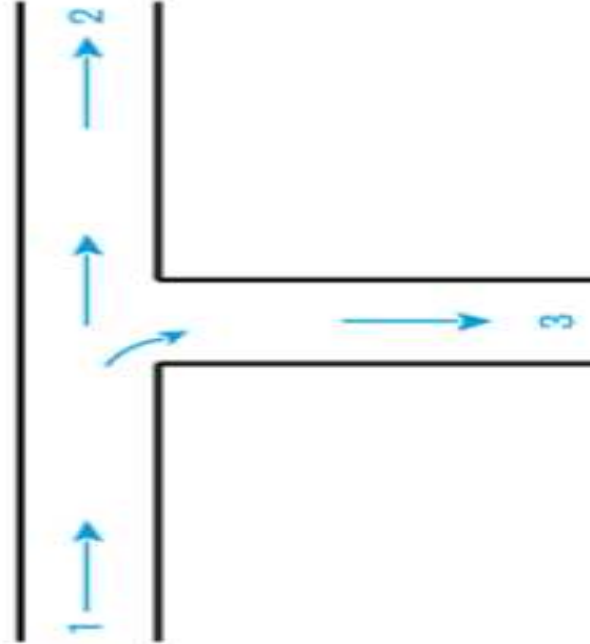
$$k_{32} = 0,6 \cdot \left[-1 + 5 \cdot \frac{Q_{v3}}{Q_{v2}} - 2 \cdot \left(\frac{Q_{v3}}{Q_{v2}} \right)^2 \right]$$



Pour une jonction à séparation latérale, les coefficients de singularité sont :

$$k_{13} = 1 + \left(\frac{Q_{v3}}{Q_{v1}} \right)^2$$

$$k_{12} = 0,4 \cdot \left(\frac{Q_{v3}}{Q_{v2}} \right)^2$$



IV. 7. Fluide réel traversant une machine hydraulique

IV. 7. 1. Conservation de l'énergie :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + J_{12} \pm E$$

$E = P_{\text{hyd}} / q_v$: en Joule / m³

P_{hyd} : en Watt (Joule / s)

q_v : en m³ / s

- E pour récepteur (pour turbine)

+ E pour un générateur (pour pompe).

IV. 7. 2. Puissance mise en jeu

1) Cas d'une pompe

*** Puissance hydraulique :**

$$\boxed{P_{\text{hyd}} = E \times Q_v}$$

(w) (Pa) (m³/s)

*** Puissance mécanique :**

$$\boxed{P_{\text{mec}} = P_{\text{hyd}} / \eta_p} \quad (\text{w})$$

*** Puissance électrique :**

$$\boxed{P_{\text{elec}} = P_{\text{mec}} / \eta_m = P_{\text{hyd}} / (\eta_p \cdot \eta_m) = E \cdot Q / (\eta_p \cdot \eta_m)} \quad (\text{w})$$

η_m : rendement du moteur électrique.

η_p : rendement du moteur de la pompe.

2) Cas d'une turbine

$$P_{\text{méca}} = P_{\text{hyd}} \cdot \eta_T \quad (w)$$

η_T : Rendement de la turbine