TD N° 3

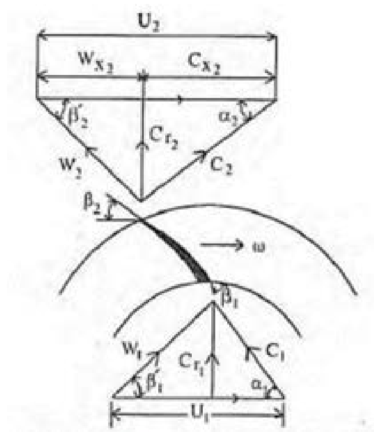
Exercice n° 1

Une pompe centrifuge délivre de l'eau avec un débit Q=3,5 m^3/min, une vitesse périphérique U=10 m / s, une vitesse radiale Cr_2=1,6 m / s et un angle $\beta_2 = 30^\circ$ par rapport à la tangente de la roue. En supposant que la vitesse Cu_1 à l'entrée est égale à zéro et le diamètre de la roue d'action D=1,3 m

(a) Tracer le triangle des vitesses
(b) Trouver le travail spécifique entre le rotor et le fluide d'après l'équation d'Euler.
(c) Trouver la puissance délivré par turbine
(d) calculer le couple délivré par la turbine.

Solution n° 1

a)Le triangle des vitesses



b) D'après l'équation d'EULER

$$w_e = (C_{2U}U_2 - C_{1U}U_1) = \Delta h_{os} = gH$$

$$w_e = gH$$

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (U_2C_{u2} - U_1C_{u1}) = gH$$

A l'entée $C_{u1} = 0$, $H = \dfrac{U_2C_{u2}}{g}$,

$C_{u2} = U_2 - w_{u2}$, $H = \dfrac{U_2(U_2 - w_{u2})}{g}$

Si $\beta_2 = 30°$ $w_{u2} = \dfrac{C_{r2}}{\tan\beta_2} = \dfrac{1,6}{\tan 30^\circ} = 2,771 m/s$

L'énergie fournie par la pompe est :

$$E = \frac{U_2(U_2 - w_{u2})}{g} = \frac{10(10 - 2,771)}{9,81} = 7,369 m \text{ ou } W/(N/s)$$

c) Le débit massique $\dot{m} = \rho Q = 1000.\dfrac{3,5}{60} = 58,33 kg/s$

La puissance délivrée $\dot{W} = \dot{m}gH = 58,33 \times 9,81 \times 7,36 = 4211,8 W$

d) La vitesse angulaire $U = r.\omega = \dfrac{D}{2}.\omega \Rightarrow \omega = \dfrac{2U}{D} = \dfrac{2.10}{1,3} = 15,384 rd/s$

Le couple nécessaire $M = \frac{\dot{W}}{\omega} = \frac{4211,8}{15,384} = 273,77 Nm$

Exercice n° 2

Une petite pompe centrifuge avec une roue à aubes de rayon r_1 = 2,8 cm et r_2 = 4,5 cm tourne à 3450 tr/min. les aubes de sortie sont courbées en arrière d'un angle $\beta_{2g} = -65°$.

La vitesse radiale à la sortie est $Cr_2 = Wr_2$ = 3,0 m / s.
L'écoulement à l'entrée est axiale avec une vitesse C_1 = *4,13* m / s.

(a) Trouver le travail spécifique entre le rotor et le fluide d'après l'équation d'Euler.
(b) Trouver la deuxième forme de l'équation d'Euler.
(c) Calculer la variation d'énergie cinétique de la vitesse relative, vitesse absolue, et celle associée à la variation de la vitesse périphérique et de calculer le travail spécifique effectué
d) Assurez-vous que les deux méthodes donnent la même réponse.

Solution 2

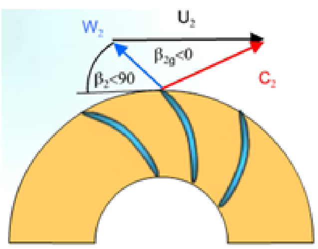
a) Le travail spécifique d'après l'équation d'Euler $w_e = (C_{2U}U_2 - C_{1U}U_1) = \Delta h_{os} = gH$

Vitesse des aubes à la sortie est $U_2 = r_2\omega = \frac{0,045.3450\ .2\pi}{60} = 16,26\ m/s$

Puisque $w_{r2} = Cr_2$, la composante tangentielle de la vitesse relative est

$$w_{u2} = C_{r2} \tan \beta_{2g} = 3,0\ \tan(-65°) = -6,43 m/s$$

Composante tangentielle de la vitesse absolue est $C_{u2} = U_2 + w_{u2} = 16,26 - 6,43 = 9,83\ m/s$



Comme le débit à l'entrée est axiale C_{1u} = 0, l'entrée ne contribue pas au travail effectué

$$w_e = U_2 C_{u2} = 16,26\ .9,83 = 159,7\ J/kg$$

b) Le travail spécifique d'après la deuxième forme l'équation d'Euler peut être trouvée à partir de la relation trigonométrique $w^2 = U^2 + C^2 - 2U.\underbrace{C.\cos\alpha}_{C_U}$

$$w_e = \frac{1}{2}\left(C^2 + U^2 - w^2\right) \quad w_e = \frac{1}{2}\left(C_2^2 - C_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(U_2^2 - U_1^2\right) - \frac{1}{2}\left(w_2^2 - w_1^2\right)$$

c) <u>Les changements d'énergie sont</u>

Amplitudes des vitesses relatives et absolues à la sortie sont données par

$$w_2 = \sqrt{w_{u2}^2 + w_{r2}^2} = \sqrt{6{,}43^2 + 3{,}0^2} = 7{,}10 \text{ m/s}$$

$$C_2 = \sqrt{C_{u2}^2 + C_{r2}^2} = \sqrt{9{,}83^2 + 3{,}0^2} = 10{,}27 \text{ m/s}$$

Puisque le flux axial à l'entrée. $C_{x1} = C_1 = 4{,}13$ m / s.

La vitesse de l'aube est $U_1 = r_1\omega = \dfrac{0{,}028.3450\ .\pi}{30} = 10{,}11\ m\ /\ s$

Composantes tangentielles de la vitesse relatives

$$w_{u1} = C_{u1} - U_1 = 0 - 10{,}11 = -10{,}11\ m / \text{s}$$

L'amplitude de la vitesse relative est

$$w_1 = \sqrt{w_{u1}^2 + w_{r1}^2} = \sqrt{10{,}11^2 + 14{,}13^2} = 10{,}92 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2}\left(C_2^2 - C_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(10{,}27^2 - 4{,}13^2\right) = 44{,}21 m^2\ /\ s^2 = 44{,}21 J\ /\ kg$$

$$\frac{1}{2}\left(U_2^2 - U_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(16{,}26^2 - 10{,}11^2\right) = 80{,}99 m^2\ /\ s^2 = 80{,}99 J\ /\ kg$$

$$\frac{1}{2}\left(w_1^2 - w_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(10{,}93^2 - 7{,}10^2\right) = 34{,}51 m^2\ /\ s^2 = 34{,}51 J\ /\ kg$$

d) <u>Leur somme vérifie par le calcul direct</u> du travail effectué.

Comme il n'ya pas de turbulence à l'entrée, $Cu_1 = 0$, le travail effectué est indépendante des conditions d'admission. Cela signifie que lorsque le travail est représenté en termes de changements d'énergie cinétique, des termes impliquant des vitesses d'entrée doit annuler. Triangle des vitesses à l'entrée est un triangle rectangle avec W_1 comme son hypoténuse, de sorte que $w_1^2 = C_1^2 + U_1^2$ Par conséquent, dans ce cas, $w_e = \dfrac{1}{2}\left(C_2^2 + U_2^2 - W_2^2\right)$ et en utilisant la loi des cosinus donne $W_e = U_2\ C_{u2}$

Exercice n° 3

Les données suivantes sont fournies pour une pompe à eau centrifuge commerciale : r_1 = 0,1016m,
r_2 = 0,1778m, β1g = 30 °, β2g = 20 °, vitesse n = 1440 tr / min.

Estimer

a) point de fonctionnement, le débit
b) la puissance hydraulique,
c) la hauteur si $b_1 = b_2$ = 0,04445m.

Solution n° 3

a) La vitesse angulaire ω=150,8 rad / s. Ainsi, les vitesses tangentielles sont $U_1 = \omega r_1$ = 15,33m/s et $u_2 = \omega r_2$ = 26,82m/s.

Du diagramme, Fig.1a, avec α_1 = 90° la vitesse radiale à l'entrée est :

$$c_{1m} = u_1 \tan 30° = 8{,}83 m/s$$

D'où le débit est

$$Q = 2\pi r_1 b_1 c_{1m} = 0{,}251 m^3/s$$ (La pompe réelle produit environ 251 L/s.)

La vitesse radiale de sortie découle de Q

$$c_{2r} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} = \frac{0{,}251 m^3/s}{2(3{,}14)(0{,}1778)(0{,}04445)} = 5{,}05 m/s$$

Cela nous permet de construire le diagramme de la vitesse de sortie comme dans la Fig. donnéα_2 =20°. La composante tangentielle est

$$c_{2u} = u_2 - c_{2r} \cot \beta_2 = 26.82 - 5.05 \cot 20° = 12.94 m/s$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \frac{5{,}05}{12{,}94} = 21.4°$$

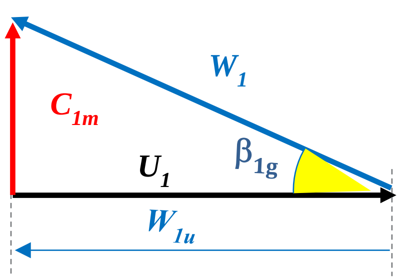


Fig.1a : Triangle de vitesse à l'entrée

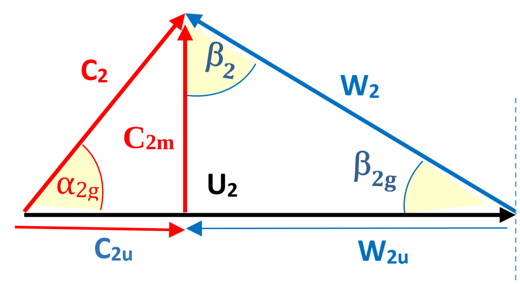


Fig.1b : Triangle de vitesse à la sortie

a) La puissance est ensuite calculée à partir de l'équation.

$$\dot{W} = M\omega = \rho Q(u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u})$$ Avec c_{1u} = 0 au point de conception

$$\dot{W} = \rho Q u_2 c_{2u} = 87{,}24 kW$$

(La pompe actuelle fournit environ 93,21kW, ce qui nécessite 109,61kW à 85% d'efficacité.)

b) Enfin, la hauteur est estimée à partir de l'équation.

$$H \approx \frac{\dot{W}}{\rho g Q} = 35,35m$$

La pompe proprement dite développe une hauteur d'environ 42,67m