République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d’Informatique

Chapitre 3

Méthodes d’AMCD basées sur la relation de surclassement

Année universitaire
2021/2022

Introduction

- Méthodes de la famille **ELECTRE** (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) développée par **Bernard Roy** pionnier de la recherche opérationnelle en France.
- **Relation de surclassement** (Outranking en anglais).
- Surclassement = préférence au sens strict + indifférence :

$$\boldsymbol{aSb\ si\ aPb\ ou\ si\ aIb.}$$

C'est-à-dire que a est au moins aussi bonne que b.

- Trois situations possibles:

$$aSb\ et\ bSa\ alors\ a\ I\ b$$

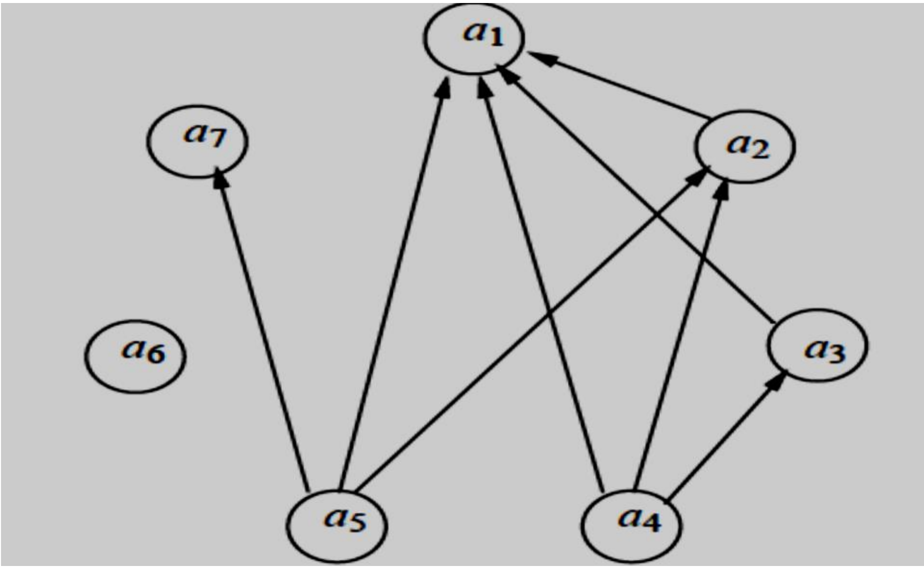
$$aSb\ et\ b\bar{S}a\ alors\ a\ P\ b$$

$$a\bar{S}b\ et\ b\bar{S}a\ alors\ a\ R\ b$$

Représentation graphique des relations de surclassement

Considérons sept aternatives tel que:

$$\{a_2Sa_1, a_3Sa_1, a_4Sa_1, a_5Sa_1, a_4Sa_2, a_4Sa_3, a_5Sa_2, a_5Sa_7\}$$



Le **noyau du graphe** est composé d'un ensemble de sommets tels que tous les sommets qui n'appartiennent pas au noyau sont surclassés par un sommet du noyau au moins et les sommets du noyau ne se surclassent pas entre eux.

Concordance avec l'hypothèse de surclassement

- Un critère *j* concorde avec l'hypothèse **« l'action a_i surclasse l'action a_k»** si l'action a_i est **au moins aussi bonne** que l'action a_k en ce qui concerne le critère j c'est-à-dire:

$$a_{ij} \geq a_{kj}$$

- Pour que la relation $a_i S\ a_k$ soit validée, il faut que:
  1. la majorité des critères soit en faveur de cette assertion **(concordance)**
  2. aucun critère dans la minorité ne doit être en forte opposition avec cette dernière **(non-discordance).**

Méthode ELECTRE I (B. Roy , 1968)

- Préconisée pour répondre à une **problématique de choix.**
- Cherche à partitionner un ensemble d'alternatives A en deux sous-ensemble N et A\N tel que :

$$\forall\, b \in A\backslash N\ \exists a \in N : aSb$$

$$\forall\, a, b \in N\!: \ aSb\ et\ bSa$$

Exemple d'application numérique: Soit la matrice des performances qui représente les moyennes (sur 20) des élèves dans trois matières. Appliquer ELECTRE I pour **sélectionner le meilleur** élève.

	C1	C2	C3
$\boldsymbol{a_1}$	0.87	0	16.08
$\boldsymbol{a_2}$	2.61	20	19.45
$\boldsymbol{a_3}$	0	0	0
$\boldsymbol{a_4}$	20	20	20
$\boldsymbol{a_5}$	0	20	17.9
ω_j	0.5	0.25	0.25

1. Effectuer des comparaisons sur toutes les paires d'actions pour chaque critère, ce qui permet de construire :

- ✓ L'ensemble de **concordance** :

$$J(a_i, a_k) = \{j \in F | a_{ij} \geq a_{kj}\}$$

- ✓ L'ensemble de **discordance** :

$$J^-(a_i, a_k) = \{j \in F | a_{ij} < a_{kj}\} :$$

2. Déterminer la somme des poids des critères appartenant à (J, J^-) :

$$P^+(a_i, a_k) = \sum_j P_j \text{ avec } j \in J(a_i, a_k)$$

$$P^-(a_i, a_k) = \sum_j P_j \text{ avec } j \in J^-(a_i, a_k)$$

Notons :

$$\mathrm{P}(a_i, a_k) = P^+(a_i, a_k) + P^-(a_i, a_k)$$

Si les poids sont normalisés la somme des poids sera 1.

3. Calculer **les Indices de Concordance** C_{ik}

$$C_{ik} = \frac{P^{+}(a_i, a_k)}{\mathrm{P}(a_i, a_k)} \qquad 0 \leq C_{ik} \leq 1$$

Cet indice exprime combien l'hypothèse de départ "a_i surclasse a_k" concorde avec la réalité représentée par les évaluations des alternatives.

4. Calculer **les Indices de Discordance** D_{ik}

$$D_{ik} = \begin{cases} 0 & si \quad J^{-}(a_i, a_k) = \emptyset \\ \frac{1}{\delta_j} . \max\limits_{j}\{a_{kj} - a_{ij}\} & j \in J^{-}(a_i, a_k) \end{cases}$$

δ_j est l'amplitude de l'échelle associée au critère j pour lequel existe le maximum de discordance.

5. Filtrer les alternatives: Il s'agit **d'établir la relation de surclassement** entre les alternatives :

$$a_i S a_k \leftrightarrow \begin{cases} C_{ik} \geq c \\ D_{ik} \leq d \end{cases}$$

- ✓ c (typiquement proche de 0 .7) représente le seuil de concordance (minimum de concordance requise pour admettre l'hypothèse $a_i S a_k$)
- ✓ d (Typiquement proche de 0.3) représente le seuil de discordance (maximum de discordance tolérée pour ne pas rejeter l'hypothèse de surclassement)

6. Etablir le **graphe de surclassement**

7. Dégager le **noyau** du graphe.

Méthode ELECTRE II

- ❑ Préconisée pour répondre à une Problématique de Rangement $\boldsymbol{P.\gamma}$.
- ❑ Cette méthode utilise deux relations :
  - ✓ Surclassement fort S^F
  - ✓ Surclassement faible S^f .
- ❑ Pour cela sont définis :

Des niveaux décroissants de concordance :

$$\mathbf{0 \leq c^- \leq c^0 \leq c^+ \leq 1}$$

Des niveaux décroissants de discordance :

$$\mathbf{0 \leq d_2 \leq d_1 \leq 1}$$

Surclassement fort

- **Cas 1** : relation de surclassement très fortement concordante et moyennement discordante .

$$C_{ik} \geq c^{+}$$

$$a_{kj} - a_{ij} \leq d_1 \; \forall \, j$$

$$\frac{P^{+}(a_i, a_k)}{P^{-}(a_i, a_k)} \geq 1$$

- **Cas 2:** relation de surclassement Moyennement concordante et faiblement discordante.

$$C_{ik} \geq c^{0}$$

$$a_{kj} - a_{ij} \leq d_2 \; \forall \, j$$

$$\frac{P^{+}(a_i, a_k)}{P^{-}(a_i, a_k)} \geq 1$$

Surclassement faible

- Relation de surclassement faiblement concordante et moyennement discordante:

$$C_{ik} \geq c^-$$

$$a_{kj} - a_{ij} \leq d_1 \ \forall j$$

$$\frac{P^+(a_i, a_k)}{P^-(a_i, a_k)} \geq 1$$

Exemple d'application

Supposons que les relations de surclassement faible et fort sont déjà établies entre les alternatives, **classer les** selon ELECTRE II.

$$S^F = \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_5, a_3), (a_5, a_6), (a_4, a_6), (a_4, a_3)\}$$

$$S^f = S^F + \{(a_3, a_1), (a_5, a_2), (a_6, a_3), \}$$

Construction du classement directe V_1

1. Les relations de surclassement fort S^F sont présentées par le graphe Y_l (l initialement par zéro)
2. Dans Y_l , tous les sommets qui ne sont pas surclassés fortement sont recensés ils forment l'ensemble D.
3. Les éléments de D qui sont reliés par S^f constituent l'ensemble U.
4. L'ensemble B contient tous les sommets de U qui ne sont pas surclassés faiblement par aucun autre sommet de U.
5. La *classe d'équivalence* des actions classées à l'étape l *(ayant le même rang),* est désignée par A_l

$$A_l := (D - U) \cup B$$

6, A toutes les actions classées à l'étape l est attribué le rang $l + 1$.

7, $Y_{l+1} := Y_l - A_l$.

8 Si $Y_{l+1} = \emptyset$ Alors arrêt Sinon continuer avec l'étape $l + 1$.

Construction du classement indirecte V_2

Pour ce faire, on effectue un classement directe mais en y apportant les modifications suivantes :

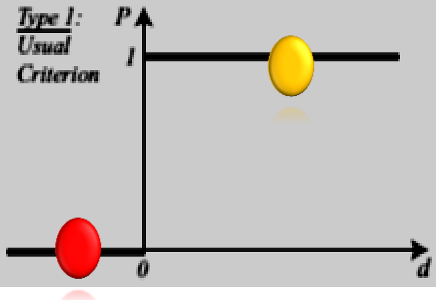
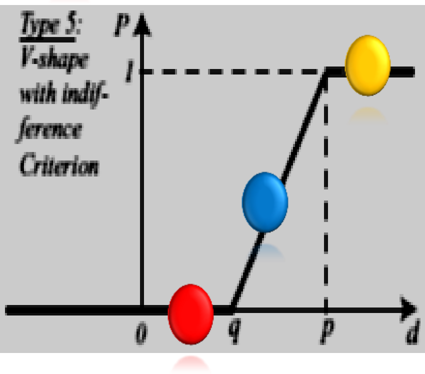
- ✓ **Inverser** la direction des arcs dans les graphes de surclassement fort et de surclassement faible.
- ✓ Une fois le rang obtenu de la même manière que dans la procédure précédente, inverser-le.

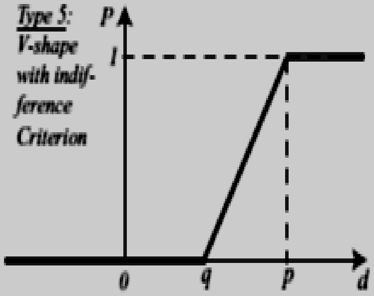
Classement final

Prendre **la moyenne** des classements direct et inverse comme classement final.

Méthode ELECTRE TRI

- Problématique de Tri : affectation des alternatives à des catégories prédéfinies.
- Structure de préférence de type (P,Q,I): utilisation de pseudo critères.

Generalized criterion	Definition	Parameters to fix
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 & d > 0 \end{cases}$	–
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q} & q < d \leq p \\ 1 & d > p \end{cases}$	p, q



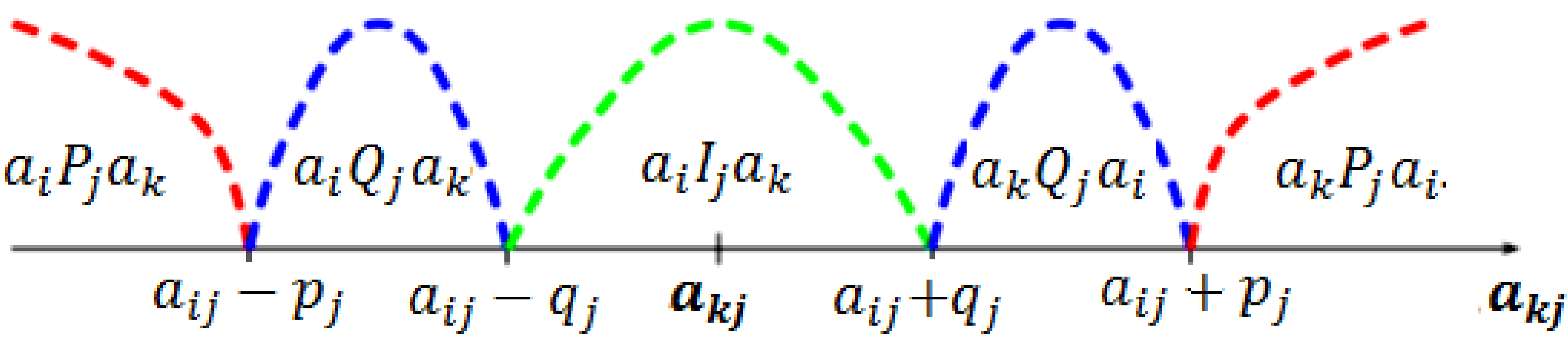
$$P(d) = \begin{cases} 0 & d \le q \\ \frac{d-q}{p-q} & q < d \le p \\ 1 & d > p \end{cases}$$

p, q

$d = a_{ij} - a_{kj}$

- $a_i \boldsymbol{P_j} a_k \leftrightarrow a_{ij} - a_{kj} > p_j \leftrightarrow \boldsymbol{a_{kj}} < a_{ij} - p_j$
- $a_i \mathbf{Q_j} a_k \leftrightarrow q_j < a_{ij} - a_{kj} \le p_j \leftrightarrow a_{ij} - \boldsymbol{p_j} \le \boldsymbol{a_{kj}} < a_{ij} - \boldsymbol{q_j}$
- $a_i \boldsymbol{I_j} a_k \leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} - a_{kj} \le q_j \\ a_{kj} - a_{ij} \le q_j \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} - q_j \le \boldsymbol{a_{kj}} \\ \boldsymbol{a_{kj}} \le a_{ij} + q_j \end{cases}$

Etant donné deux actions a_i et a_k on se trouve dans une des situations suivantes: $a_i P_j a_k$ ou $a_i Q_j a_k$ou $a_i I_j a_k$ ou $a_k Q_j a_i$ ou $a_k P_j a_i$.



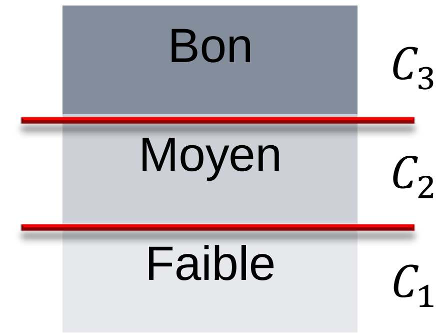
- Comme toutes les méthodes de la famille ELECTRE, ELECTRE –Tri utilise la relation de surclassement.
- $a\ \boldsymbol{S}\ b \ \rightarrow a\ P\ b\ \ OU\ aIb$ (i.e. a est au moins aussi bonne que b).
- On cherche à vérifier des relations de surclassement de type $a_i\ S\ b_h$ et $b_h S a_i$ tel que b_h dénote une action de référence définissant les catégories.

<u>Exemple</u>

On veut affecter des élèves à trois catégories : Faible, Moyen, Bon selon leurs notes en : Physique, Langue Arabe, Mathématique.

$\boldsymbol{b_2 = \{10, 15, 13\}}$

$\boldsymbol{b_1 = \{6, 11, 9\}}$

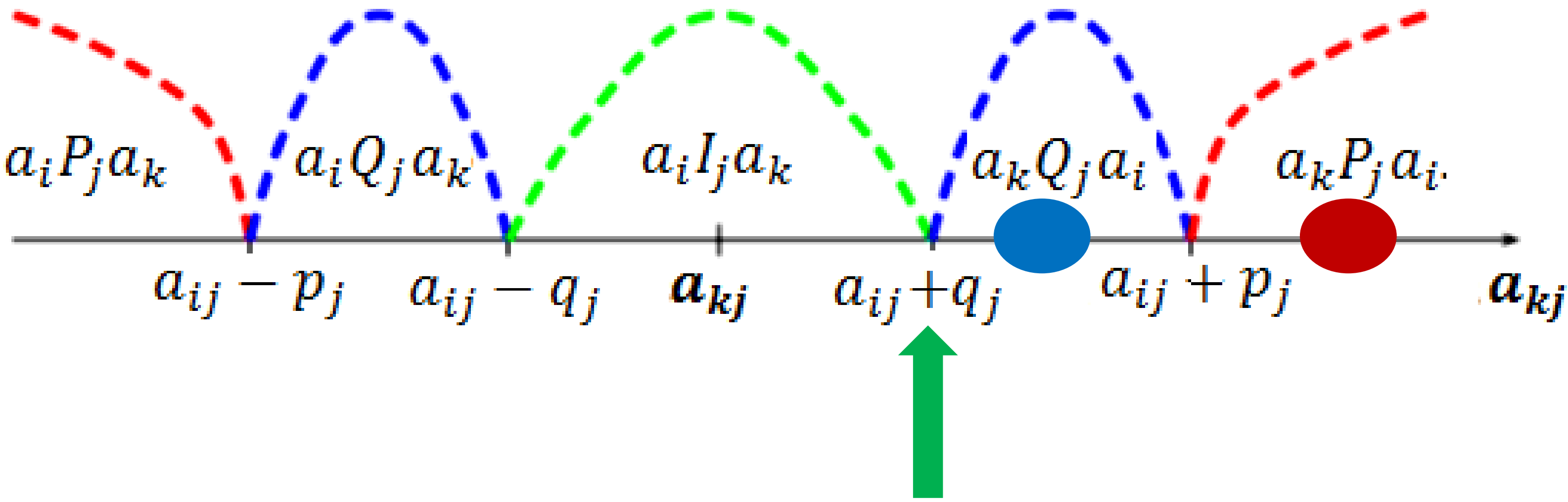


$$\boldsymbol{a_1\ S\ b_1\ ,\ \ b_1 S a_1, a_1\ S\ b_2\ ,\ \ b_2 S a_1} \qquad \textbf{?}$$

Étape1:

Evaluation des indices de concordance partiels

$$C_j(a_i, b_h) = \begin{cases} 0 \quad \boldsymbol{si} \quad b_{hj} \geq \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{p_j}\,(\mathrm{b_h}) \\ 1 \quad \boldsymbol{si} \quad b_{hj} \leq \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{q_j}(\mathrm{b_h}) \\ \dfrac{a_{ij} + p_j\,(b_h) - b_{hj}}{p_j(b_h) - q_j\,(b_h)} \qquad sinon \end{cases}$$



Exercice

$$C_j(a_i, b_h) = \begin{cases} 0 \quad \boldsymbol{si} \quad b_{hj} \geq \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{p_j}(\mathrm{b_h}) \\ 1 \quad \boldsymbol{si} \quad b_{hj} \leq \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{q_j}(\mathrm{b_h}) \\ \dfrac{a_{ij} + p_j(b_h) - b_{hj}}{p_j(b_h) - q_j(b_h)} \quad sinon \end{cases}$$

	J=1 (physique)	J=2 (Langue Arabe)	J=3 (Mathématique)
Notes de l'élève	10.5	7	11,5
$\boldsymbol{b_1}$	**6**	**11**	**9**
$q_j(b_1)$	0.25	0.75	0.5
$p_j(b_1)$	0.75	1.25	1
$v_j(b_1)$	6	8	7
$\boldsymbol{b_2}$	**10**	**15**	**13**
$q_j(b_2)$	1	1	1
$p_j(b_2)$	2	2	2
$v_j(b_2)$	7	10	9
$\boldsymbol{\omega_j}$	**0.3**	**0.45**	**0.25**

	J=1	J=2	J=3
$C_j(a_1, b_1)$	1	0	1
$C_j(a_1, b_2)$	1	0	0.5
$C_j(b_1, a_1)$	0	1	0
$C_j(b_2, a_1)$	1	1	1

$$= \frac{11.5 + 2 - 13}{2 - 1}$$

Étape2:
Calcul de l'indice de concordance global

$$C(a_i, b_h) = \frac{\sum_{j \in F} \omega_j C_j(a_i, b_h)}{\sum_{j \in F} \omega_j}$$

	J=1	J=2	J=3
$C_j(a_1, b_1)$	1	0	1
$C_j(a_1, b_2)$	1	0	0.5
$C_j(b_1, a_1)$	0	1	0
$C_j(b_2, a_1)$	1	1	1

$C(a_1, b_1)$= 0.3*1+0.25*1=0.55

$C(a_1, b_2)$= 0.3*1+0.25*0.5=0.425

$C(b_1, a_1)$= 0.45*1

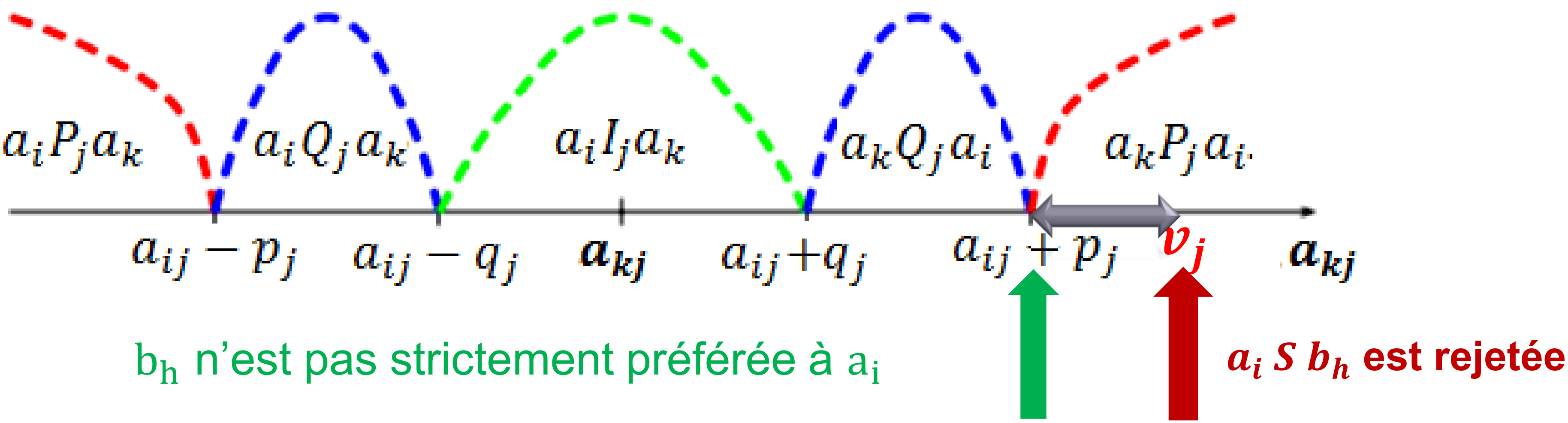
$C(b_2, a_1)$= 0.3*1+0.45*1+0.25*1=1

Étape 3:

Calcul de l’indice de discordance:

A chaque critère j et action de référence b_h est associé un seuil de véto $v_j(b_h)$ (à savoir $v_j > p_j$)

$$D_j(a_i, b_h) = \begin{cases} 0 & \textbf{si} \ b_{hj} < a_{ij} + p_j\,(b_h) \\ 1 & \textbf{si} \ b_{hj} > a_{ij} + v_j(b_h) \\ \dfrac{a_{ij} + p_j\,(b_h) - b_{hj}}{p_j(b_h) - v_j\,(b_h)} & \textbf{sinon} \end{cases}$$



$$D_j(\mathrm{a_i}, \mathrm{b_h}) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{si}}\ \mathrm{b_{hj}} < \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{p_j}(\mathrm{b_h}) \\ 1 & \textbf{\textit{si}}\ \mathrm{b_{hj}} > \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{v_j}(\mathrm{b_h}) \\ \dfrac{a_{ij} + p_j(b_h) - b_{hj}}{p_j(b_h) - v_j(b_h)} & \textbf{\textit{sinon}} \end{cases}$$

	J=1 (physique)	J=2 (Langue Arabe)	J=3 (Mathématique)
Notes de l'élève	10.5	7	11,5
$\boldsymbol{b_1}$	**6**	**11**	**9**
$q_j(b_1)$	0.25	0.75	0.5
$p_j(b_1)$	0.75	1.25	1
$v_j(b_1)$	6	8	7
$\boldsymbol{b_2}$	**10**	**15**	**13**
$q_j(b_2)$	1	1	1
$p_j(b_2)$	2	2	2
$v_j(b_2)$	7	10	9
$\boldsymbol{\omega_j}$	**0.3**	**0.45**	**0.25**

	J=1	J=2	J=3
$D_j(a_1, b_1)$	0	0.41	0
$D_j(a_1, b_2)$	0	0.75	0
$D_j(b_1, a_1)$	0.71	0	0.25
$D_j(b_2, a_1)$	0	0	0

$$\frac{7 + 1.25 - 11}{1.25 - 8}$$

$$\frac{7 + 2 - 15}{2 - 10}$$

$$\frac{6 + 0.75 - 10.5}{0.75 - 6}$$

$$\frac{9 + 1 - 11.5}{1 - 7}$$

Étape 4: **Calcul de l'indice de crédibilité**

$$\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{a_i}, \mathrm{b_h}) = \{j \in F: D_j(\mathrm{a_i}, \mathrm{b_h}) > C(a_i, b_h)\}$$

	J=1	J=2	J=3
$D_j(a_1, b_1)$	0	0.41	0
$D_j(a_1, b_2)$	0	0.75	0
$D_j(b_1, a_1)$	0.71	0	0.25
$D_j(b_2, a_1)$	0	0	0

$C(a_1, b_1)$= 0.55

$C(a_1, b_2)$= 0.425

$C(b_1, a_1)$= 0.45

$C(b_2, a_1)$= 1

- ❑ $\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{a_1}, \mathrm{b_1})$=∅
- ❑ $\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{a_1}, \mathrm{b_2})$={2}
- ❑ $\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{b_1}, \mathrm{a_1})$= {1}
- ❑ $\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{b_2}, \mathrm{a_1})$= ∅

$\bar{F}(a_1, b_1)=\emptyset$ $\bar{F}(a_1, b_2)=\{2\}$ $\bar{F}(b_1, a_1)=\{1\}$ $\bar{F}(b_2, a_1)= \emptyset$

Indice de crédibilité :

$$\sigma(a_i, b_h) = \begin{cases} C(a_i, b_h) & si\ \bar{F}(a_i, b_h) = \emptyset \\ C(a_i, b_h) \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - D_j(a_i, b_h)}{1 - C(a_i, b_h)} & Sinon \end{cases}$$

	J=1	J=2	J=3
$D_j(a_1, b_1)$	0	0.41	0
$D_j(a_1, b_2)$	0	0.75	0
$D_j(b_1, a_1)$	0.71	0	0.25
$D_j(b_2, a_1)$	0	0	0

$C(a_1, b_1)$= 0.55

$C(a_1, b_2)$= 0.425

$C(b_1, a_1)$= 0.45

$C(b_2, a_1)$= 1

$\sigma(a_1, b_1)$ =0.55 $\sigma(b_2, a_1)$=1

$\sigma(a_1, b_2)$ =0.425*$\frac{1-0.75}{1-0.425}$=0.18

$\sigma(b_1, a_1)$ =0.45*$\frac{1-0.71}{1-0.45}$=0.24

Étape 5: **Etablissement de la relation de surclassement**

La relation de sur-classement définie se base sur l'indice de crédibilité et l'indice de coupe $0.5 \leq \lambda \leq 1$ tel que :

$$\sigma(\mathrm{a_i}, \mathrm{b_h}) \geq \lambda \; et \sigma(\mathrm{b_h}, \mathrm{a_i}) \geq \lambda \; alors \; \mathrm{a_i} S \mathrm{b_h} et \; \mathrm{b_h} \mathrm{S} \, \mathrm{a_i} \rightarrow \mathrm{a_i} I \, \mathrm{b_h}$$

$$\sigma(\mathrm{a_i}, \mathrm{b_h}) \geq \lambda \; et \sigma(\mathrm{b_h}, \mathrm{a_i}) < \lambda \; alors \; \mathrm{a_i} S \mathrm{b_h} et \; \mathrm{b_h} \bar{\mathrm{S}} \, \mathrm{a_i} \rightarrow \mathrm{a_i} S \, \mathrm{b_h}$$

$$\sigma(\mathrm{a_i}, \mathrm{b_h}) < \lambda \; et \sigma(\mathrm{b_h}, \mathrm{a_i}) \geq \lambda \; alors \; \mathrm{a_i} \bar{S} \mathrm{b_h} et \; \mathrm{b_h} \mathrm{S} \, \mathrm{a_i} \rightarrow \mathrm{b_h} S \mathrm{a_i}$$

$$\sigma(\mathrm{a_i}, \mathrm{b_h}) < \lambda \; et \sigma(\mathrm{b_h}, \mathrm{a_i}) < \lambda \; alors \; \mathrm{a_i} \bar{S} \mathrm{b_h} et \; \mathrm{b_h} \bar{\mathrm{S}} \, \mathrm{a_i} \rightarrow \mathrm{a_i} R \, \mathrm{b_h}$$

$\sigma(\mathrm{a_1}, \mathrm{b_1}) = \sigma(\mathrm{b_2}, \mathrm{a_1}) = 1$ $\quad$ $\sigma(\mathrm{a_1}, \mathrm{b_2}) = 0.18$ $\quad$ $\sigma(\mathrm{b_1}, \mathrm{a_1}) = 0.24$

$\sigma(\mathrm{a_1}, \mathrm{b_1}) > 0.5 \; et \; \sigma(\mathrm{b_1}, \mathrm{a_1}) < 0.5 \quad alors \quad \mathrm{a_1} S \mathrm{b_1}$

$\sigma(\mathrm{a_1}, \mathrm{b_2}) < 0.5 \; et \; \sigma(\mathrm{b_2}, \mathrm{a_1}) > 0.5 \quad alors \quad \mathrm{b_2} S \mathrm{a_1}$

Étape 6:procédures d'affectation

On peut procéder de deux manières différente:

- De haut en bas : Comparer successivement $\mathrm{a_i}$ à $\mathrm{b_h}$ et $h = p, p-1, \dots, 0$
  Si $\mathrm{a_i}\ S\ \mathrm{b_h}$ alors affecter $\mathrm{a_i}$ à la catégorie $\mathrm{C_{h+1}}$
- De bas en haut: Comparer successivement $\mathrm{a_i}$ à $\mathrm{b_h}$ tel que $h = 0,1, \dots, p$
  Si $\mathrm{b_h} S \mathrm{a_i}$ alors affecter $\mathrm{a_i}$ à la catégorie $\mathrm{C_h}$

$\mathrm{a_1} S \mathrm{b_1}$
$\mathrm{b_2} S \mathrm{a_1}$

Étape 6:procédures d'affectation

On peut procéder de deux manières différente:

- De haut en bas : Comparer successivement $\mathrm{a_i}$ à $\mathrm{b_h}$ et $h = p, p-1, \dots, 0$
  Si $\mathrm{a_i}\ S\ \mathrm{b_h}$ alors affecter $\mathrm{a_i}$ à la catégorie $\mathrm{C_{h+1}}$
- De bas en haut: Comparer successivement $\mathrm{a_i}$ à $\mathrm{b_h}$ tel que $h = 0,1, \dots, p$
  Si $\mathrm{b_h} S \mathrm{a_i}$ alors affecter $\mathrm{a_i}$ à la catégorie $\mathrm{C_h}$

procédure 1

$\mathrm{a_1} S \mathrm{b_2}$? Non

$\mathrm{a_1} S \mathrm{b_1}$? Oui

Alors Affecter $\mathrm{a_1}$ à $\mathrm{C_{2=1+1}}$

procédure 2

$\mathrm{b_1} S \mathrm{a_1}$? Non

$\mathrm{b_2} S \mathrm{a_1}$? Oui

Alors Affecter $\mathrm{a_1}$ à $\mathrm{C_2}$

Conclusion

Cet élève est moyen

Méthode PROMETHEE

- Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations
- Problématique de type P.γ.
- Introduction d'une fonction f_j qui exprime la préférence du décideur pour une action a_i par rapport à une autre action a_k. Cette fonction permet de construire des relations de surclassement valuées.
- Il existe plusieurs versions de cette méthode, mais les versions I et II restent les plus utilisées. Soulignons que le système de préférence est de type:
  - $\{I, P, R\}$ dans PROMETHEE I
  - $\{I, P\}$ dans PROMETHEE II

Calcul du degré de surclassement

Pour toute paire d'alternative, calculer:

1) $F_j(a_i, a_k) = f_j\left(a_{ij} - a_{kj}\right)$

$F_j(a_i, a_k)$, **intensité de préférence**, varie entre 0 et 1 et sa valeur s'incrémente avec l'augmentation de la différence : $a_{ij} - a_{kj}$.

2) $\pi(a_i, a_k) = \dfrac{1}{\omega} \sum_j \omega_j F_j\,(a_i, a_k)$

$\boldsymbol{Tel\ que}$ $\quad \omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j$

Exercice

	J=1	J=2	J=3
a_1	4	6	2
a_2	8	4	4
a_3	4	10	12
a_4	6	4	4
a_5	2	4	8
Poids	0.5	0.25	0.25

Supposons que pour tous les critères est définie la fonction de préférence suivante:

$$f_j(a,b) = \begin{cases} 0 & si \quad a < b \\ 1 & si\ a - b > 4 \\ \dfrac{a-b}{4} & Sinon \end{cases}$$

$F_1(a,b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	0	0	0	0.5
a_2	1	0	1	0.5	1
a_3	0	0	0	0	0.5
a_4	0.5	0	0.5	0	1
a_5	0	0	0	0	0

$F_2(a,b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	0.5	0	0.5	0.5
a_2	0	0	0	0	0
a_3	1	1	0	1	1
a_4	0	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0

$$\pi(a_i, a_k) = \frac{1}{\omega} \sum_j \omega_j F_j\,(a_i, a_k)$$

$F_3(a,b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	0	0	0	0
a_2	0.5	0	0	0	0
a_3	1	1	0	1	1
a_4	0.5	0	0	0	0
a_5	1	1	0	1	0

$\pi(a, b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	0,125	0	0,125	0,375
a_2	0,625	0	0.5	0,25	0,5
a_3	0,5	0,5	0	0,5	0,75
a_4	0,375	0	0,25	0	0,5
a_5	0,25	0,25	0	0,25	0

Calcul des flux sortant: Ce flux positif exprime la force d'une action (plus important est Φ^+ plus l'action est bonne)

$$\Phi^+(a_i) = \sum_{a_k \in A} \pi(a_i, a_k)$$

Calcul des flux entrant: Ce flux négatif exprime la faiblesse d'une action (plus faible est Φ^- plus l'action est bonne)

$$\Phi^-(a_i) = \sum_{a_k \in A} \pi(a_k, a_i)$$

$\pi(a,b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\Phi^+(a_i)$
a_1	0	0,125	0	0,125	0,375	0.625
a_2	0,625	0	0.5	0,25	0,5	1.875
a_3	0,5	0,5	0	0,5	0,75	2.25
a_4	0,375	0	0,25	0	0,5	1.125
a_5	0,25	0,25	0	0,25	0	0.75
$\Phi^-(a_i)$	1.75	0.875	0.75	1.125	2.125	

PROMETHEE I

- $a_i\ \mathbf{P}\ a_k$ SSI $\Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_k)\ et\ \Phi^-(a_i) < \Phi^-(a_k)$

  Ou $\Phi^+(a_i) = \Phi^+(a_k)\ et\ \Phi^-(a_i) < \Phi^-(a_k)$

  Ou $\Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_k)\ et\ \Phi^-(a_i) = \Phi^-(a_k)$

- $a_i\ \mathbf{I}\ a_k$ SSI $\Phi^+(a_i) = \Phi^+(a_k)\ et\ \Phi^-(a_i) = \Phi^-(a_k)$
- $a_i\ \mathbf{R}\ a_k$ SSI $\Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_k)\ et\ \Phi^-(a_i) > \Phi^-(a_k)$

  Ou $\Phi^+(a_i) < \Phi^+(a_k)\ et\ \Phi^-(a_i) < \Phi^-(a_k)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\Phi^+(a)$	0.625	1.875	2.25	1.125	0.75
$\Phi^-(a)$	1.75	0.875	0.75	1.125	2.125

a3 P a2
a2 P a4
a4 P a5
a4 P a1
a1 R a5

PROMETHEE II

Dans PROMETHEE II, on obtient un **préordre total**. On fait ordonner les actions selon le flux net Φ :

$$\Phi(a_i) = \Phi^+(a_i) - \Phi^-(a_i)$$

- a_i **P** a_k SSI $\Phi(a_i) > \Phi(a_k)$
- a_i **I** a_k SSI $\Phi(a_i) = \Phi(a_k)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\Phi^+(a)$	0.625	1.875	2.25	1.125	0.75
$\Phi^-(a)$	1.75	0.875	0.75	1.125	2.125
$\Phi(a_i)$	-1.125	1	1.5	0	-1.375

Ce qui donne l'ordre totale suivant : **a3, a2, a4, a1, a5**

Fin chapitre 3.