CHAPITRE 4

Méthodes Floues d'Aide MultiCritère à la Décision

1. Introduction

Pourquoi?

Dans la pratique, le décideur fournit souvent des « jugements **subjectifs** » concernant les poids et/ou les performances exprimés par des « **termes linguistiques** » comme par exemple: « ***Très élevé », « Bon », « Moyen »***, etc.

Contrairement aux valeurs numériques exactes, ces termes sont **imprécis** ou simplement **flous**.

Dans ce chapitre, nous allons voir des **extensions floues** de quelques méthodes d'AMCD déjà vues dans les chapitres précédents.

Ensemble Classique

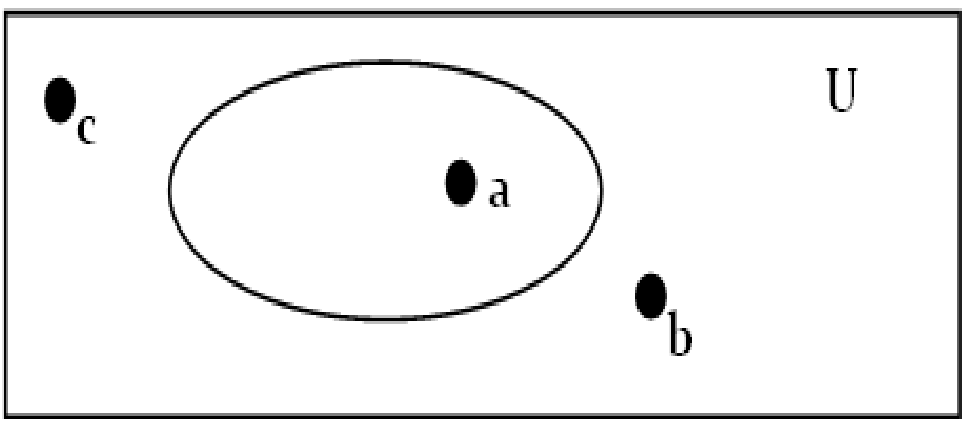
- U: univers de discours (*domaine de variation des variables*)
- Un ensemble classique peut être noté par:

$$A = \{x \in U | \mathbf{P(x)}\}$$

Les éléments x de A vérifient la propriété P.

- La fonction d'appartenance à A est définie ainsi:

$$\mu_A(x) : U \longrightarrow \{\mathbf{0, 1}\}.$$



Exemple

- $U = [0{,}50000]$ l'intervalle des prix des voitures.
- A_1 l'ensemble des prix des voitures économiques:

$$A_1 = \{x \in U | x \leq 20000\}.$$

- A_2 l'ensemble des prix des voitures chères

$$A_2 = \{x \in U | x \geq 30000\}.$$

- A_3 l'ensemble des prix des voitures très chères

$$A_3 = \{x \in U | x \geq 40000\}$$

- Une voiture qui coûte par exemple 25000 est :

« pas très économique, elle est plutôt un peu chère ».

- Une autre voiture qui coûte 39990 est :

« presque très chère ».

- De tels jugements peuvent être exprimés à l'aide des:

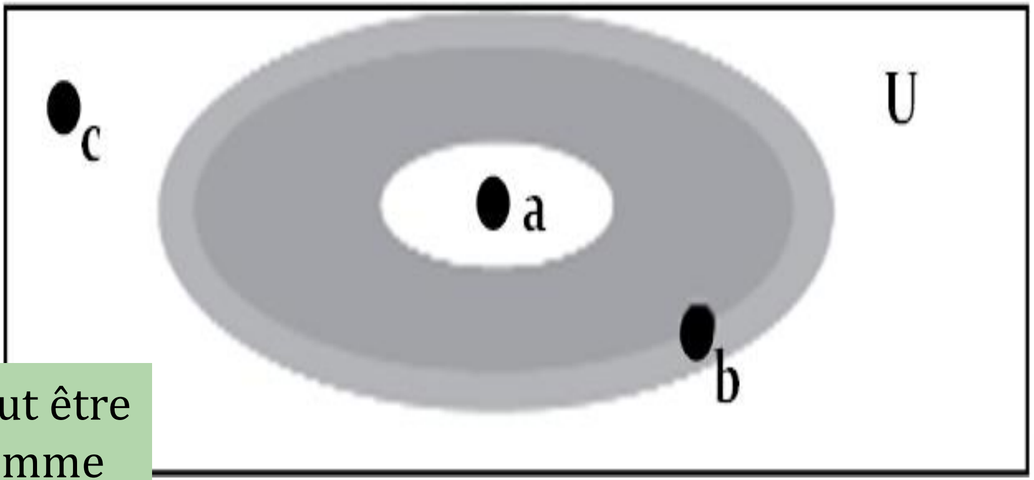
Ensembles flous

2. Notions Préliminaires

Ensemble Flou

Un ensemble flou A de U est caractérisé **par une fonction d'appartenance $\mu_A(.)$** qui associe à chaque point dans U un nombre réel dans **l'intervalle $[0, 1]$** où la valeur de $\mu_A(x)$ représente le degré d'appartenance de x à A:

$$\mu_A(x): \mathbf{U} \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$$



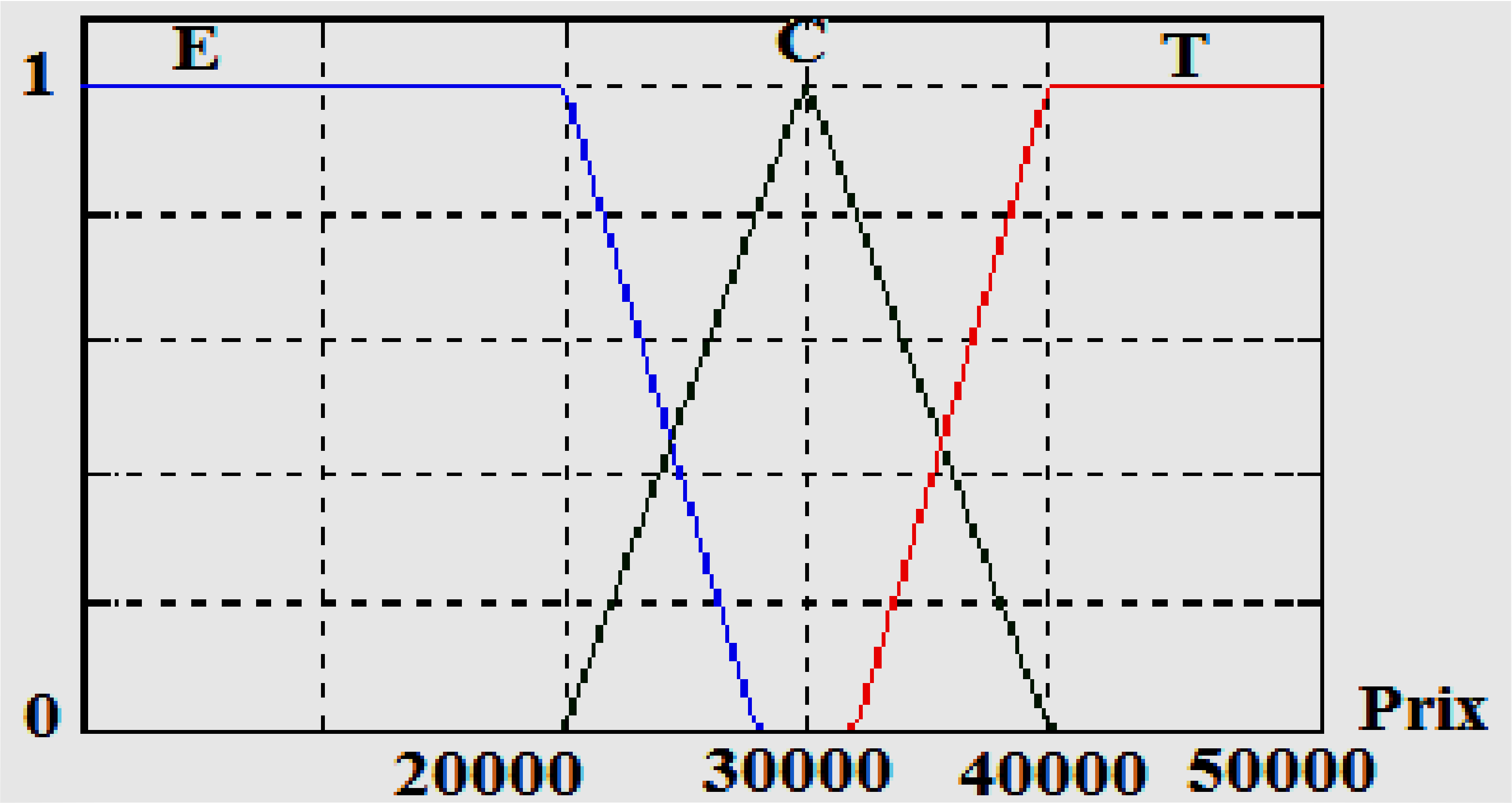
« Un ensemble flou peut être simplement défini comme un ensemble avec des frontières floues »

Exemple

- Ici l'ensemble des ***termes linguistiques*** utilisé est:

  $T(prix) = \{E, C, T\}$ ($E =$ "$Economique$", $C =$ "$Chère$", $T =$ "$Très\ chère$").

- On donne dans la figure ci-dessous la représentation graphique des fonctions d'appartenance aux ensembles flous E, C, T.



Ensemble flou normal

$$(A \text{ est } \textbf{normal}) \text{ SSI } (Sup\ \mu_A(x) = 1)$$

Ensemble floue convexe شكل محدب

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{A}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]:\ \boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{\lambda x_1} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x_2}) \geq \mathbf{min}(\boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{x_1}), \boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{x_2}))$$

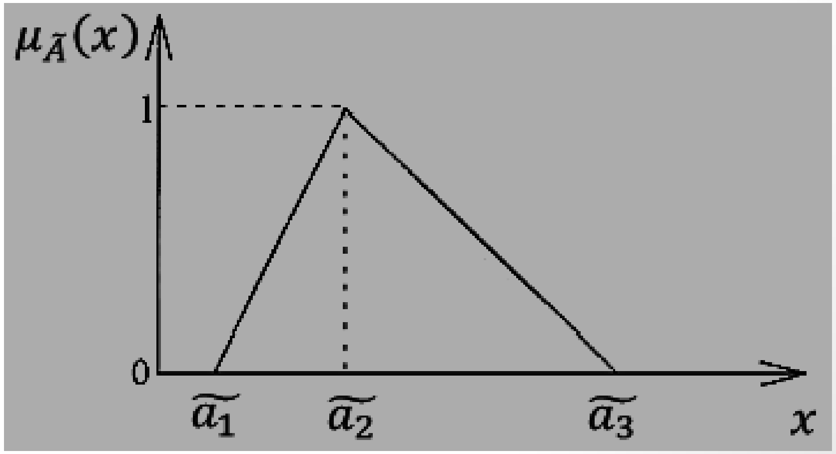
Nombre flou

(A est un **nombre flou**) SSI (A est Normal et A est convexe)

Nombres Triangulaires Flous (NTF)

La fonction d'appartenance d'un NTF $\tilde{A} = (\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3})$ se définit comme suit :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \widetilde{a_1}}{\widetilde{a_2} - \widetilde{a_1}} & si\ \widetilde{a_1} \leq x \leq \widetilde{a_2} \\ \dfrac{\widetilde{a_3} - x}{\widetilde{a_3} - \widetilde{a_2}} & si\ \widetilde{a_2} \leq x \leq \widetilde{a_3} \\ 0 & sinon \end{cases}$$



Arithmétique sur les NTFs

Soient $\tilde{A} = (\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3})$ et $\tilde{B} = (\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, \widetilde{b_3})$ deux NTFs :

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (\widetilde{a_1} + \widetilde{b_1}, \widetilde{a_2} + \widetilde{b_2}, \widetilde{a_3} + \widetilde{b_3})$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\widetilde{a_1} \times \widetilde{b_1}, \widetilde{a_2} \times \widetilde{b_2}, \widetilde{a_3} \times \widetilde{b_3})$$

$$\forall\, \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{\lambda}\tilde{A} = (\widetilde{\boldsymbol{\lambda} a_1}, \boldsymbol{\lambda}\widetilde{a_2}, \boldsymbol{\lambda}\widetilde{a_3})$$

$$\forall\, \boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{\lambda}\tilde{A} = (\widetilde{\boldsymbol{\lambda} a_3}, \boldsymbol{\lambda}\widetilde{a_2}, \boldsymbol{\lambda}\widetilde{a_1})$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (\widetilde{a_1} - \widetilde{b_3}, \widetilde{a_2} - \widetilde{b_2}, \widetilde{a_3} - \widetilde{b_1})$$

$$\tilde{A} \ominus \widetilde{B =} \tilde{A} \oplus (-\mathbf{1})\tilde{B}$$

$$\widetilde{(-\mathbf{1})B} = (\widetilde{-b_3}, -\widetilde{b_2}, -\widetilde{b_1})$$

$$\tilde{A} \oslash \tilde{B} = (\widetilde{a_1}/\widetilde{b_3}, \widetilde{a_2}/\widetilde{b_2}, \widetilde{a_3}/\widetilde{b_1})$$

$$\tilde{A} \oslash \tilde{B} = \tilde{A} \otimes (1 \oslash \tilde{B})$$

$$1 \oslash \tilde{B} = (1/\widetilde{b_3}, 1\,/\widetilde{b_2}, 1\,/\widetilde{b_1})$$

$$\tilde{A} = (1{,}3{,}4), \tilde{B} = (-1{,}1{,}2)$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (0{,}4{,}6)$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (-1{,}3{,}8)$$

$$\mathbf{2}\tilde{A} = (2{,}6{,}8)$$

$$-2\tilde{B} = (-4, -2, +2)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (1 - 2{,}3 - 1{,}4 + 1)$$

$$\tilde{A} \oslash \tilde{B} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{-1})$$

Mesure de distance

Une définition très utilisée pour les NTFs est la suivante :

$$d(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\widetilde{a_1}-\widetilde{b_1}\right)^2+\left(\widetilde{a_2}-\widetilde{b_2}\right)^2+\left(\widetilde{a_3}-\widetilde{b_3}\right)^2\right]}$$

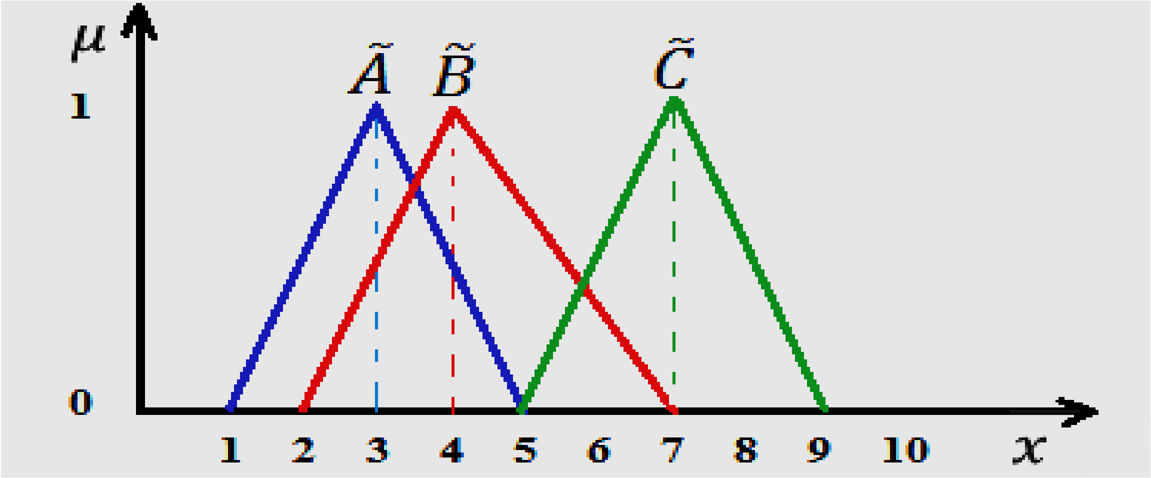
Exemple

Soit $\tilde{A}$=(1,3,5) $\tilde{B}$=(2,4,7) $\tilde{C}$=(5,7,9)

Montrer que B est plus proche de A que C

$$d(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{3}[(1-2)^2+(3-4)^2+(5-7)^2]} = \sqrt{2}$$

$$d(\tilde{A},\tilde{C}) = \sqrt{\frac{1}{3}[(1-5)^2+(3-7)^2+(5-9)^2]} = 4$$

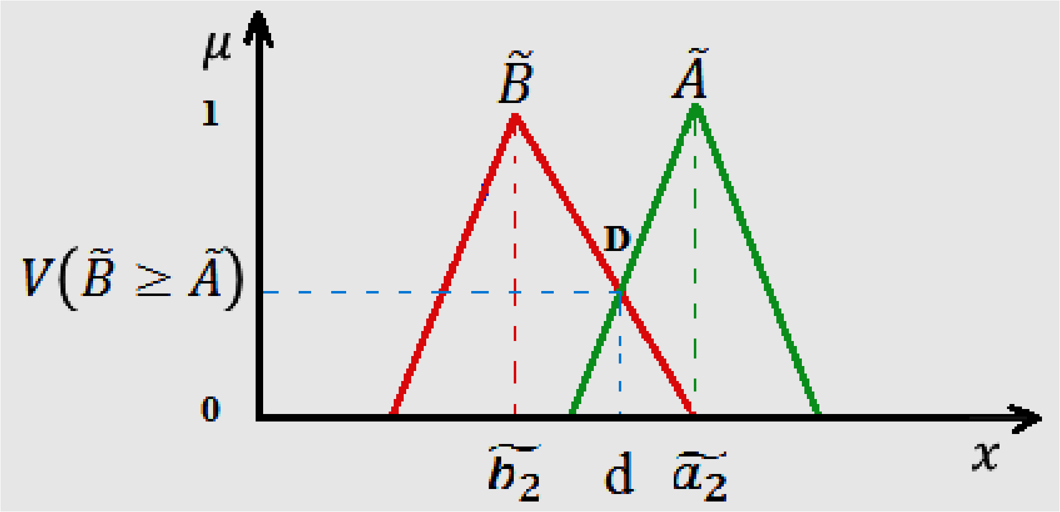


Classement des NTFs - Degré de possibilité

Soient $\tilde{A} = (\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3})$ et $\tilde{B} = (\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, \widetilde{b_3})$ deux NTFs :

$$(V(\tilde{A} \geq \tilde{B}) = 1) \quad SSI \quad (\widetilde{a_2} \geq \widetilde{b_2})$$

Et $V(\tilde{B} \geq \tilde{A}) = \frac{\widetilde{a_1} - \widetilde{b_3}}{(\widetilde{b_2} - \widetilde{b_3}) - (\widetilde{a_2} - \widetilde{a_1})}$



Le degré de possibilité que $\tilde{B}$ soit supérieur à k NTF est donné par :

$$V(\tilde{B} \geq \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_k) = \min_{i=1..k} V(\tilde{B} \geq \tilde{A}_i).$$

Exemple

$\tilde{A}_1 = (0{,}12,\ 0{,}19,\ 0{,}29)$
$\tilde{A}_2 = (0{,}22,\ 0{,}32,\ 0{,}48)$
$\tilde{A}_3 = (0{,}11,\ 0{,}15,\ 0{,}23)$
$\tilde{A}_4 = (0{,}21,\ 0{,}33,\ 0{,}49)$

$$V(\tilde{B} \geq \tilde{A}) = \frac{\widetilde{a_1} - \widetilde{b_3}}{(\widetilde{b_2} - \widetilde{b_3}) - (\widetilde{a_2} - \widetilde{a_1})}$$

$$V(\tilde{A}_1 \geq \tilde{A}_2) = \frac{0.22-0.29}{(0.19-0.29)-(0.32-0.22)}$$

	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3$	$\tilde{A}_4$
$\tilde{A}_1$	-	0.35	1	0.36
$\tilde{A}_2$	1	-	1	0.96
$\tilde{A}_3$	0.73	0.055	-	0.1
$\tilde{A}_4$	1	1	1	-

$V(\tilde{A}_1 \geq \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4) = 0.35$
$V(\tilde{A}_2 \geq \tilde{A}_1, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4) = 0.96$
$V(\tilde{A}_3 \geq \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_4) = 0.05$
$V(\tilde{A}_4 \geq \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3) = 1$

Alors le classement final :

$$\tilde{A}_4\ \tilde{A}_2\ \tilde{A}_1\ \tilde{A}_3$$

3. Méthode de la somme pondérée floue

- La performance partielle d'une alternative a_i pour un critère j prend la forme d'un NTF :

$$\widetilde{a_{ij}} = (\widetilde{a_{i1}}, \widetilde{a_{i2}}, \widetilde{a_{i3}}).$$

- Le poids d'un critère j est un NTF:

$$\widetilde{\omega}_j = (\widetilde{\omega}_{j1}, \widetilde{\omega}_{j2}, \widetilde{\omega}_{j3})$$

$$\text{et} \quad \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\omega}_{j2} = 1$$

- La performance globale d'une alternative a_i est un NTF:

$$\tilde{g}(a_i) = \sum_j \widetilde{a_{ij}} \otimes \widetilde{\omega}_j.$$

- La meilleure alternative est celle avec $\tilde{g}$ maximal .

Exemple

	C1	C2	C3	C4
$\tilde{\mathbf{A}}_1$	(3,4,5)	(5,6,7)	(5,6,7)	(2,3,4)
$\tilde{\mathbf{A}}_2$	(6,7,8)	(5,6,7)	(0.5,1,2)	(4,5,6)
$\tilde{\mathbf{A}}_3$	(4,5,6)	(3,4,5)	(7,8,9)	(6,7,8)
Poids	(0.13,**0.2**,0.31)	(0.08,**0.15**,0.25)	(0.29,**0.4**,0.56)	(0.17,**0.25**,0.38)

$\tilde{g}(\tilde{A}_1)$=(3,4,5) $\otimes$ (0.13,**0.2**,0.31) $\oplus$ (5,6,7) $\otimes$ (0.08,**0.15**,0.25) $\oplus$

(5,6,7) $\otimes$ (0.29,**0.4**,0.56) $\oplus$ (2,3,4) $\otimes$ (0.17,**0.25**,0.38)

$\tilde{g}(\tilde{A}_1)$=(2.583,4.850,8.750)

$\tilde{g}(\tilde{A}_2)$=(1.979,3.950,7.625)

$\tilde{g}(\tilde{A}_3)$=(3.792,**6.550**,11.188)

$$V\left(\tilde{g}(\tilde{A}_3) \geq \tilde{g}(\tilde{A}_1), \tilde{g}(\tilde{A}_2)\right) = 1$$

$\tilde{A}_3$ est la meilleure alternative

4. Méthode AHP Floue

- On procède à la description du problème comme dans AHP.
- Pour l’échelle sémantique des préférences, des NTFs sont utilisés :

Préférence	Valeur scalaire	NTF
Nulle	1	(1,1,1)
Légère	3	(2,3,4)
Stricte	5	(4,5,6)
Forte	7	(6,7,8)
Très forte	9	(9,9,9)

- Dans la normalisation des matrices de comparaison de paires de critères , de Sous-critères, et d’alternatives , on applique de l’arithmétique floue (voir diapo. 11)
- La dernière étape de AHP Floue est une **somme pondérée floue** (voir diapo. 16/17).
- Enfin, on **classe** les alternatives selon leurs performances globales (voir diapo. 13/14).

Exemple

Étant donnée la matrice de comparaison des paires d'alternatives suivantes. Trouver les performances partielles correspondantes .

	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$
$\tilde{A}_1$	(1,1,1)	(2,3,4)	(4,5,6)
$\tilde{A}_2$		(1,1,1)	(2,3,4)
$\tilde{A}_3$			(1,1,1)

	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$
$\tilde{A}_1$	(1,1,1)	(2,3,4)	(4,5,6)
$\tilde{A}_2$	$(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$	(1,1,1)	(2,3,4)
$\tilde{A}_3$	$(\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$	(1,1,1)
Somme par colonne	(1.42,1.53,1.75)	(3.25,4.33,5.5)	(7,9,11)
Inverse de la Somme	(0.57,0.65,0.7)	(0.18,0.23,0.31)	(0.09,0.11,0.14)

	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$	Moyenne
$\tilde{A}_1$	(0.57,0.65,0.7)	(0.36,0.69,1.24)	(0.36,0.55,0.84)	(0.43,0.63,0.93)
$\tilde{A}_2$	(0.14,0.21,0.35)	(0.18,0.23,0.31)	(0.18,0.33,0.56)	?
$\tilde{A}_3$	(0.1,0.13,0.17)	(0.04,0.07,0.15)	(0.09,0.11,0.14)	?

5. Extension Floue de la Méthode TOPSIS pour la Prise de Décision Collective

- On suppose qu'il existe **k décideurs**, et que chacun présente ses propres jugements de performances et de poids sous forme de ***variables linguistiques*** :

Poids des critères		**Performances partielles**	
Très faible	(0,0,0.1)	Très modeste	(0,0,1)
Faible	(0,0.1,0.3)	Modeste	(0,1,3)
Moyen faible	(0.1,0.3,0.5)	Moyen modeste	(1,3,5)
Moyen	(0.3,0.5,0.7)	Moyen	(3,5,7)
Moyen élevé	(0.5,0.7,0.9)	Moyen bien	(5,7,9)
Elevé	(0.7,0.9,1)	Bien	(7,9,10)
Très élevé	(0.9,1,1)	Très Bien	(9,10,10)

- On commence par le calcul de **la moyenne** des NTFs:

$$\widetilde{a_{ij}} = \frac{1}{k}[\widetilde{a_{ij}}^{\,1} \oplus \widetilde{a_{ij}}^{\,2} \oplus \cdots \oplus \widetilde{a_{ij}}^{\,k}]$$

$$\widetilde{\omega_j} = \frac{1}{k}[\widetilde{\omega_j}^{\,1} \oplus \widetilde{\omega_j}^{\,2} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\omega_j}^{\,k}]$$

Exercice 2 / TD 4

Une entreprise cherche à recruter un responsable Marketing. Une commission composée de **trois décideurs D1, D2, D3** ont fixé les cinq critères suivants pour choisir le meilleur candidat parmi ceux acceptés pour l'entretien.

- C1 : la motivation,
- C2 : la compétence en communication orale,
- C3 : l'expérience dans un poste similaire,
- C4 : la personnalité,
- C5 : la confiance en soi.

Chaque décideur a proposé son **évaluation linguistique** de l'importance de chaque critère et de la qualité de chaque alternative par rapport à chaque critère comme suit:

	D1	D2	D3
C1	Elevé	Très Elevé	Moyen Elevé
C2	Très Elevé	Très Elevé	Très Elevé
C3	Très Elevé	Elevé	Elevé
C4	Très Elevé	Très Elevé	Très Elevé
C5	Moyen	Moyen Elevé	Moyen Elevé

Critère	Candidat	D1	D2	D3
C1	**A1**	Moyen Bien	Bien	Moyen Bien
	A2	Bien	Bien	Moyen Bien
	A3	Très Bien	Bien	Bien
C2	**A1**	Bien	Moyen Bien	Moyen
	A2	Très Bien	Très Bien	Très Bien
	A3	Moyen Bien	Bien	Très Bien
C3	**A1**	Moyen	Bien	Bien
	A2	Très Bien	Très Bien	Bien
	A3	Bien	Moyen Bien	Très Bien
C4	**A1**	Très Bien	Bien	Très Bien
	A2	Très Bien	Très Bien	Très Bien
	A3	Bien	Très Bien	Moyen Bien
C5	**A1**	Moyen	Moyen	Moyen
	A2	Très Bien	Moyen Bien	Bien
	A3	Bien	Bien	Moyen Bien

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(5.7, 7.7, 9.3)	(5, 7, 9)	(5.7, 7.7, 9)	(8.33, 9.67, 10)	(3, 5, 7)
A_2	(6.3, 8.3, 9.7)	(9, 10, 10)	(8.3, 9.7, 10)	(9, 10, 10)	(7, 9, 10)
A_3	(6.3, 8, 9)	(7, 9, 10)	(7, 9, 10)	(7, 9, 10)	(6.3, 8.3, 9.7)
Weight	(0.7, 0.9, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.77, 0.93, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.43, 0.63, 0.83)

Calcul des Performances Normalisées

Si j est un critère bénéfice :

$$\widetilde{r_j}(\widetilde{a_i}) = \left(\frac{\widetilde{a_{1i}}}{a_3^+}, \frac{\widetilde{a_{2i}}}{a_3^+}, \frac{\widetilde{a_{3i}}}{a_3^+}\right) \text{ tel que } a_3^+ = \max_i a_{3i}$$

Si j est un critère coût :

$$\widetilde{r_j}(\widetilde{a_i}) = \left(\frac{a_1^-}{\widetilde{a_{3i}}}, \frac{a_1^-}{\widetilde{a_{2i}}}, \frac{a_1^-}{\widetilde{a_{1i}}}\right) \text{ tel que } a_1^- = \min_i a_{1i}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(5.7, 7.7, 9.3)	(5, 7, 9)	(5.7, 7.7, 9)	(8.33, 9.67, 10)	(3, 5, 7)
A_2	(6.3, 8.3, 9.7)	(9, 10, 10)	(8.3, 9.7, 10)	(9, 10, 10)	(7, 9, 10)
A_3	(6.3, 8, 9)	(7, 9, 10)	(7, 9, 10)	(7, 9, 10)	(6.3, 8.3, 9.7)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(0.59, 0.79, 0.96)	(0.5, 0.7, 0.9)	(0.57, 0.77, 0.9)	(0.83, 0.97, 1)	(0.3, 0.5, 0.7)
A_2	(0.65, 0.86, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.83, 0.97, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.7, 0.9, 1)
A_3	(0.65, 0.82, 0.93)	(0.7, 0.9, 1)	(0.7, 0.9, 1)	(0.7, 0.9, 1)	(0.63, 0.83, 0.97)

Multiplication par les poids

$$\tilde{v}_j(\tilde{a}_i) = \tilde{\omega}_j \otimes \tilde{r}_j(\tilde{a}_i)$$

Weight	(0.7, 0.9, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.77, 0.93, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.43, 0.63, 0.83)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(0.59, 0.79, 0.96)	(0.5, 0.7, 0.9)	(0.57, 0.77, 0.9)	(0.83, 0.97, 1)	(0.3, 0.5, 0.7)
A_2	(0.65, 0.86, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.83, 0.97, 1)	(0.9, 1, 1)	(0.7, 0.9, 1)
A_3	(0.65, 0.82, 0.93)	(0.7, 0.9, 1)	(0.7, 0.9, 1)	(0.7, 0.9, 1)	(0.63, 0.83, 0.97)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(0.41, 0.71, 0.96)	(0.45, 0.7, 0.9)	(0.44, 0.72, 0.9)	(0.75, 0.97, 1)	(0.13, 0.32, 0.58)
A_2	(0.46, 0.77, 1)	(0.81, 1, 1)	(0.64, 0.9, 1)	(0.81, 1, 1)	(0.3, 0.57, 0.83)
A_3	(0.46, 0.74, 0.93)	(0.63, 0.9, 1)	(0.54, 0.84, 1)	(0.63, 0.9, 1)	(0.27, 0.52, 0.81)

- Pour chaque critère j, on pose:

$$v_j^* = (1,1,1)\ (PIS)$$

$$v_{j*} = (0,0,0)\ (\text{NIS})$$

- Calcul des distances:

$$d(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(\widetilde{a_1}-\widetilde{b_1})^2 + (\widetilde{a_2}-\widetilde{b_2})^2 + (\widetilde{a_3}-\widetilde{b_3})^2\right]}$$

$$d_i^* = \sum_j d(\widetilde{v_{ij}}, v_j^*)$$

$$d_{*i} = \sum_j d(\widetilde{v_{ij}}, v_{j*})$$

$$A^* = [(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1)],$$

$$A^- = [(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0)].$$

	A^*	A^-
A_1	2.10	3.45
A_2	1.24	4.13
A_3	1.59	3.85

- Calcul des indices de similarités

$$C_i = \frac{d_{*i}}{d_{*i} + d_i^*}$$

- Ordonner les alternatives par l'ordre décroissant des C_i

	A^*	A^-
A_1	2.10	3.45
A_2	1.24	4.13
A_3	1.59	3.85

$C_1 = \frac{3.45}{3.45+2.10} = 0.62$

$C_2 = \frac{4.13}{4.13+1.24} = \mathbf{0.77}$

$C_3 = \frac{3.85}{3.85+1.59} = 0.71$

L'ordre des alternatives est: A2, A3, A1

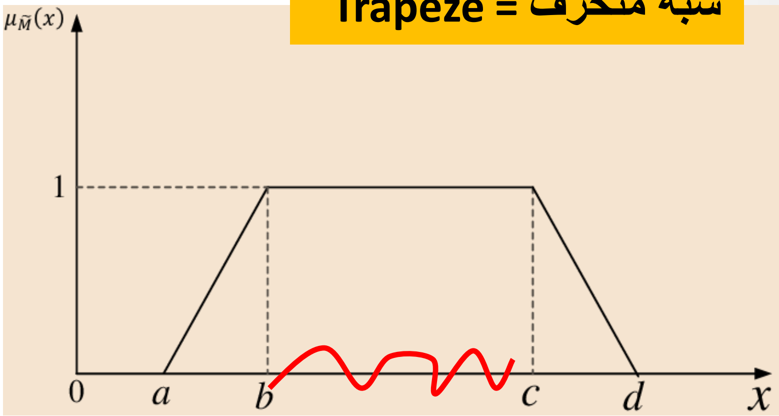
6. Extension Floue de la Méthode PROMETHEE

En utilisant les Nombres Trapézoïdaux Flous

Un NTrF (**N**ombre **Tr**apézoïdal **F**lou) $\widetilde{M} = [a, b, c, d]$ est caractérisé par la fonction d'appartenance ci-dessous :

$$\mu_{\widetilde{M}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & si\ c \leq x \leq d \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Trapèze = شبه منحرف



- **Soit $\widetilde{M} = [-3, 1, 2, 4]$**

$$\mu_{\widetilde{M}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{4} & si\quad -3 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & si\ 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Dans certaine référence un NTrF est écrit plutôt $\widetilde{M} = [m_l, m_u, \alpha, \beta]$ tel que :

$$m_l = b\ ;\ \ m_u = c\ ;\ \alpha = b - a;\ \beta = d - c$$

- **$\widetilde{M} = [1, 2, 4, 2]$**

Arithmétique sur les NTrFs

Soient $\widetilde{M} = [a_1, b_1, c_1, d_1]$ et $\widetilde{N} = [a_2, b_2, c_2, d_2]$ deux NTrFs :

$$\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$\widetilde{M} \ominus \widetilde{N} = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2)$$

$$\widetilde{M} \otimes \widetilde{N} = (a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2, d_1 * d_2)$$

$$\forall\, \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{\lambda}\widetilde{M} = (\boldsymbol{\lambda} a_1, \boldsymbol{\lambda} b_1, \boldsymbol{\lambda} c_1, \boldsymbol{\lambda} d_1)$$

$$\forall\, \boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R},, \qquad \boldsymbol{\lambda}\widetilde{M} = (\boldsymbol{\lambda} d_1, \boldsymbol{\lambda} c_1, \boldsymbol{\lambda} b_1, \boldsymbol{\lambda} a_1)$$

The distance between two trapezoidal fuzzy numbers can be calculated by using Euclidean distance as [10]:

$$d_v(\tilde{m}, \tilde{n}) = \sqrt{\frac{(m_1 - n_1)^2 + 2(m_2 - n_2)^2 + 2(m_3 - n_3)^2 + (m_4 - n_4)}{6}} \qquad (5)$$

1 .Calcul de l'intensité de préférence

Pour chaque paire d'alternatives $\widetilde{a_i}$ et $\widetilde{a_k}$ ayant les performances partielles :

$$\widetilde{a_{ij}} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$$
$$\widetilde{a_{kj}} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$$

Calculer :

$$\begin{aligned}\widetilde{F_j}(a_i, a_k) &= f_j(\widetilde{a_{ij}} - \widetilde{a_{kj}}) \\ &= f_j((a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2)) \\ &= (f_j(a_1 - d_2), f_j(b_1 - c_2), f_j(c_1 - b_2), f_j(d_1 - a_2))\end{aligned}$$

Exemple

$\widetilde{a_{ij}} = (-2,0,3,5)$

$\widetilde{a_{kj}} = (-3,1,2,4)$

$$f_j(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 1 \\ \dfrac{d-1}{2} & 1 < d \leq 3 \\ 1 & d > 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{F_j}(a_i, a_k) &= f_j(\widetilde{a_{ij}} - \widetilde{a_{kj}}) = f_j((-2-4, 0-2, 3-1, 5+3)) = f_j((-6,-2,2,8)) \\ &= (f_j(-6), f_j(-2), f_j(2), f_j(8)) = (0,0,\tfrac{2-1}{2},1) = (0,0,0.5,1)\end{aligned}$$

2. Calcul du degré de surclassement

$$\tilde{\pi}(a_i, a_k) = \sum_j \widetilde{\omega}_j \otimes \widetilde{F}_j(a_i, a_k)$$

3. Calcul du flux positif

$$\widetilde{\Phi^+}(a_i) = \frac{1}{\boldsymbol{N}-1} \otimes \sum_{a_k \in A} \tilde{\pi}(a_i, \boldsymbol{a_k})$$

4. Calcul du flux négatif

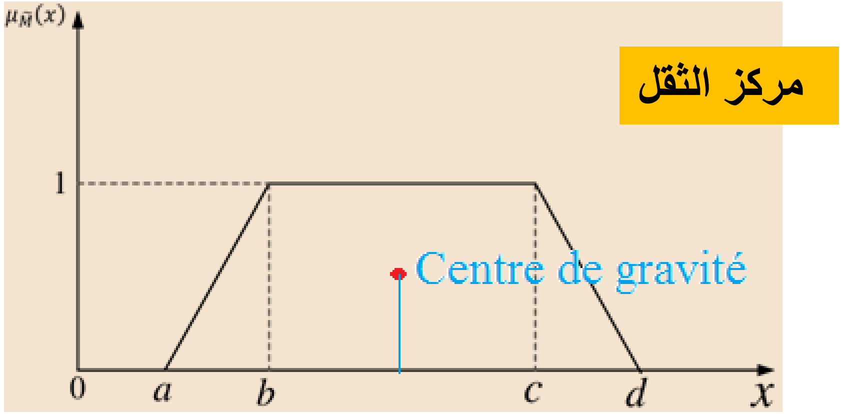
$$\widetilde{\Phi^-}(a_i) = \frac{1}{N-1} \otimes \sum_{a_k \in A} \tilde{\pi}(a_k, a_i)$$

N: est le nombre des alternatives.

5. Defuzzification des flux positif /négatif par la méthode du centre de gravité

Soit $\widetilde{M} = [m_l, m_u, \alpha, \beta]$, l'**abscisse** (فاصلة)du centre de gravité se calcule comme suit :

$$\frac{m_u^2 - m_l^2 + \alpha m_l + \beta m_u + \frac{1}{3}(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha + \beta + 2m_u - 2m_l}$$



Exemple

$\widetilde{\Phi^+}(a_i) = (0.5,0.6,0.7,0.9)$

$\widetilde{\Phi^+}(a_i) = (0.6, 0.7,0.1,0.2)$

$$x_i = \frac{0.7^2-0.6^2+0.1\times0.6+0.2\times0.7+\frac{1}{3}(0.2^2-0.1^2)}{0.1+0.2+2\times0.7-2\times0.6} = 0.6798$$

Une fois des valeurs numériques sont obtenues, on continu comme dans PROMETHEE I ou PROMETHEE II.

Fin CHAPITRE 4.