

**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Mohamed Seddik BENYAHIA - Jijel**



**Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'électrotechnique**

Master 1

Machines Electriques et Electromécanique

Support du cours

Modélisation des Machines Electriques

Par

D^r. Lyes AOMAR

2021

Avant-Propos

Dans le cadre de la préparation de mon Habilitation Universitaire, je propose ce modeste support pédagogique, intitulé Modélisation des Machines Electriques, qui s'adresse aux étudiants du Master en Electrotechnique, en particulier en Machines Electriques.

L'objectif global de ce support est de développer les modèles mathématiques régissant le fonctionnement et le comportement dynamique des Machines Electriques (à courant continu, synchrone et asynchrone).

Cette modélisation est basée sur le calcul des interactions magnétiques entre les différents enroulements constitutifs de la machine étudiée.

D^r. Lyes AOMAR

Matière Modélisation des Machines Electriques.

Spécialité Machines Electriques et Electromécanique

Filière Electrotechnique et Electromécanique

Domaine Sciences et technologie

Table des matières

Chapitre I. — Procédés mathématiques de la modélisation des machines électriques

I.1. Description du système et hypothèses simplificatrices	1
I.2. Expression du flux	2
I.3. Energie magnétique emmagasinée	2
I.4. Force électromotrice	2
I.5. Travail des forces mécaniques	3
I.6. Couple électromagnétique	4
I.7. Equation mécanique	4

Chapitre II. — Modélisation des machines à courant continu

II.1. Généralités	5
II.1.1. Représentation schématique	5
II.1.2. Description	5
II.1.3. Machine à courant continu généralisée	6
II.2. Modèle des enroulements électriques (circuits électriques) de la MCC généralisée	7
II.2.1. Hypothèses simplificatrices	8
II.2.2. Modèle géométriques	9
II.3. Modèle mathématique de la MCC généralisée (Positions angulaires θ_1 et θ_2 quelconques)	9
II.3.1. Relation des flux	9
II.3.2. Expressions des forces électromotrices	10
0	
II.4. Modèle mathématique de la MCC généralisée (Positions normale des deux paires de balais)	11
II.4.1. Relation des flux	12
II.4.2. f.e.m de rotation	12
II.4.3. f.e.m de transformation	12
II.4.4. Equations électriques	13
II.4.5. Expressions de puissance et du couple	13
II.4.6. Equations mécanique	15

II.6. Modèle mathématique de la MCC multipolaire	15
II.7. Conclusion	16

Chapitre III. — Modélisation des machines synchrones

III.1. Généralités	17
III.1.1. Représentation schématique	17
III.1.2. Description	17
III.1.3. Principe de fonctionnement d'une machine synchrone	18
III.1.4. Définition des différents enroulements de la MS	18
III.2. Modèle des enroulements électriques (circuits électriques) de la MS	19
III.2.1. Hypothèses simplificatrices	19
III.2.2. Modèle géométriques	20
III.3. Modèle mathématique de la MS	20
III.3.1. Equations de tension en grandeurs de phase	20
III.3.2. Relation des flux	21
III.3.3. Transformation de Park appliquée à la machine synchrone	23
III.3.4. Equations électriques dans les axes d et q	24
III.3.5. Equations de flux dans les axes d et q	25
III.3.6. Puissance et couple	26
III.4. Modèle de la MS multipolaire	26

Chapitre IV. — Modélisation des machines asynchrones

IV.1. Généralités	27
IV.1.1. Représentation schématique	27
IV.1.2. Description	27
IV.1.3. Principe de fonctionnement d'une machine asynchrone	28
IV.2. Modèle des enroulements électriques (circuits électriques) de la MAS	29
IV.2.1. Hypothèses simplificatrices	29
IV.2.2. Modèle géométriques	29
IV.3. Modèle mathématique de la MAS	30
IV.3.1. Equations de tension en grandeurs de phase	30
IV.3.2. Relation des flux	31
IV.4. Transformation de Park appliquée à la machine asynchrone	32
IV.4.1. Equations électriques dans les axes d et q	34

IV.4.2. Choix de référentiel	35
IV.4.3. Equations de flux dans les axes d et q	36
IV.4.4. Puissance et couple	37
IV.5. Modèle de la MAS multipolaire	38
Références	39

Chapitre I. Procédés mathématiques de modélisation des machines électriques

I.1. Description du système et hypothèses simplificatrices

Soit un système composé de n circuits électriques C_1, C_2, \dots, C_n , figure I.1. Le calcul des interactions magnétiques entre les différents circuits électriques, en présence ou en absence des substances magnétiques, fait intervenir les inductances propres \mathcal{L}_i et les inductances mutuelles $\mathcal{M}_{i,j}$. [1][2][3]

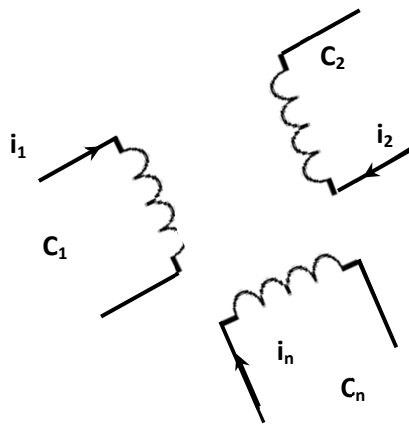


Figure I.1. Ensemble de n enroulements électriques

Hypothèses simplificatrices

Dans le but de simplifier notre étude, nous proposons les hypothèses suivantes adéquates aux cas des machines électriques: [1][4][5]

- Ces enroulements sont indéformables, c'est le cas pour les machines électriques car les enroulements sont logés dans des encoches. Ceci nous permet de supposer que les inductances propres \mathcal{L}_i et les inductances mutuelles $\mathcal{M}_{i,j}$ sont fonctions de leur position soit par rapport aux substances magnétiques (souvent ferromagnétiques) soit les uns par rapport aux autres.
- Les mouvements sont de rotation par rapport à un axe fixe, c'est le cas des machines électriques tournantes. Ceci nous permet de supposer que le mouvement est défini à l'aide de la seule variable angulaire θ , caractérisant la position des enroulements mobiles par rapport aux enroulements fixes.

I.2. Expression du flux

Le flux d'enroulement du circuit i est :[1]

$$\Psi_i = \mathfrak{L}_i i_i + \sum_{j \neq i}^n (\mathcal{M}_{i,j} i_j) \quad (\text{I.1})$$

I.3. Energie magnétique emmagasinée

L'énergie magnétique totale stockée est :[3][4]

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Psi_i i_i) \quad (\text{I.2})$$

I.4. Force électromotrice

La variation de flux magnétique, traversant le circuit C_i , donne naissance à une force électromotrice (f.e.m.) e_i aux bornes de ce circuit, telle que :[4]

$$\begin{aligned} e_i &= -\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{d \left(\mathfrak{L}_i i_i + \sum_{j \neq i}^n (\mathcal{M}_{i,j} i_j) \right)}{dt} \\ &= -\left(\mathfrak{L}_i \frac{di_i}{dt} + \sum_{j \neq i}^n \left(\mathcal{M}_{i,j} \frac{di_j}{dt} \right) \right) - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} i_i + \sum_{j \neq i}^n \left(\frac{\partial \mathcal{M}_{i,j}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} i_j \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

$e_i = e_{it} + e_{ir}$

L'équation (I.3) montre que la f.e.m. e_i est la somme de deux termes :

— Le premier terme correspond à la variation temporelle du flux magnétique traversant le circuit C_i ; Cette variation donne naissance à un f.e.m. de transformation aux bornes du circuit C_i (on l'appelle ainsi parce qu'elle est la seule à exister quand les circuits sont immobiles, le cas des transformateurs électriques).

On la note e_{it}

$$e_{it} = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \quad (\text{I.4})$$

— Le second terme correspond à la variation spatiale du flux magnétique traversant le circuit C_i ; Cette variation donne naissance à un f.e.m. de rotation aux bornes du circuit C_i (on l'appelle ainsi parce qu'elle existe à cause de la variation angulaire des inductances propres et mutuelles).

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

On la note e_{it}

$$e_{it} = - \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{I.5})$$

I.5. Travail des forces mécaniques

On suppose pendant un temps infiniment court $\Delta t \ll 0$:

Le système de n circuits couplés subisse une évolution caractérisée par des variations infiniment petites des courants et des inductances propres et mutuelles.[1][3]

L'accroissement de l'énergie magnétique emmagasinée dW , pendant ce temps infiniment court dt , s'écrit comme suit :

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d\Psi_i i_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Psi_i di_i) \quad (\text{I.6})$$

Si on néglige les résistances de ces n circuits, le travail électrique fourni au milieu extérieur $d\tau_e$ s'écrit :

$$d\tau_e = \sum_{i=1}^n (e_i i_i dt) \quad (\text{I.7})$$

Ou

$$d\tau_e = - \sum_{i=1}^n (i_i d\Psi_i) \quad (\text{I.8})$$

Dans $\Delta t \ll 0$, le système a fourni au milieu extérieur un travail mécanique $d\tau_m$

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie pour déduire l'expression de $d\tau_m$ telle que

$$d\tau_m + d\tau_e + dW = 0 \quad (\text{I.9})$$

D'où on déduit $d\tau_m$

$$d\tau_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i_i d\Psi_i - \Psi_i di_i) \quad (\text{I.10})$$

On peut démontrer à l'aide de (I.1) que (I.10) peut s'écrire:

$$d\tau_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i_i^2 d\mathcal{L}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (i_i i_j d\mathcal{M}_{i,j}) \quad (\text{I.11})$$

I.6. Couple électromagnétique

On sait, que le couple électromagnétique est la dérivée du travail mécanique par rapport à l'angle :

$$\Gamma_e = \frac{d\tau_m}{d\theta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(i_i^2 \frac{d\mathcal{L}_i}{d\theta} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(i_i i_j \frac{d\mathcal{M}_{i,j}}{d\theta} \right) \quad (\text{I.12})$$

I.7. Equation mécanique

D'après le premier principe de la dynamique :[5]

$$\Gamma_e - \Gamma_r = J \frac{dw_r}{dt} \quad (\text{I.13})$$

Γ_r : représente le couple résistant.

J : Moment d'inertie de la masse tournante.

Chapitre II. Modélisation des machines à courant continu

II.1. Généralités

II.1.1. Représentation schématique

Les symboles normalisés de la machine à courant continu MCC, susceptible de fonctionner en moteur ou en génératrice, sont donnés par la figure II.1.[8]



Figure II.1. Symbol de la MCC en fonctionnement a). Génératrice

II.1.2. Description

La machine à courant continu généralisée comporte : [5][9]

— Un stator (ou inducteur) composé d'un circuit magnétique comprenant une couronne annulaire massive ou feuilletée à laquelle sont fixés des pôles saillants. Ces pôles sont de deux 2 types, régulièrement alternés, figure II.2. :

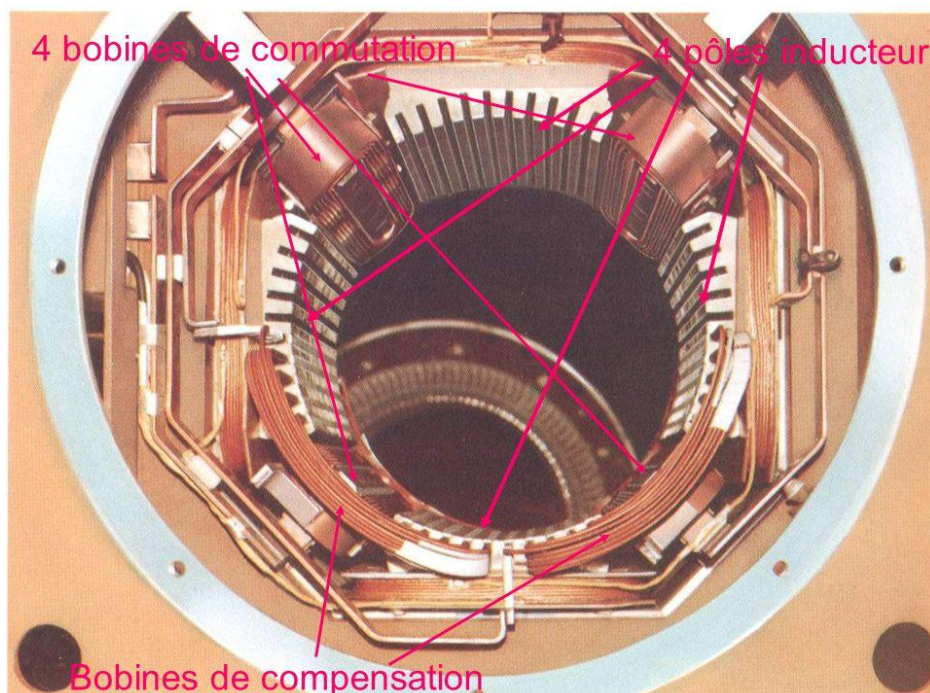


Figure II.2. Stator d'une MCC

*. Les pôles inducteurs généralement feuilletés portent un ou plusieurs enroulements d'excitation alimentés en DC courant.

*. Les pôles auxiliaires ou de commutation servent à compenser l'action magnétique de l'enroulement rotorique et à améliorer la commutation, feuilletés ou massifs disposés entre les pôles inducteurs selon les axes inter-polaires dits axes neutres, portent un enroulement connecté en série avec l'enroulement rotorique.

— Un rotor ou induit comporte un circuit magnétique feuilleté muni d'encoches régulièrement distribuées à la périphérie. Les conducteurs logés dans les encoches sont connectés en série et forment un enroulement fermé sur lui-même. (Réviser le cours de 3^{ème} année licence électrotechnique). L'enroulement d'induit est raccordé au milieu extérieur par des contacts glissants dont l'emplacement correspond à celui des balais, figure II.3.

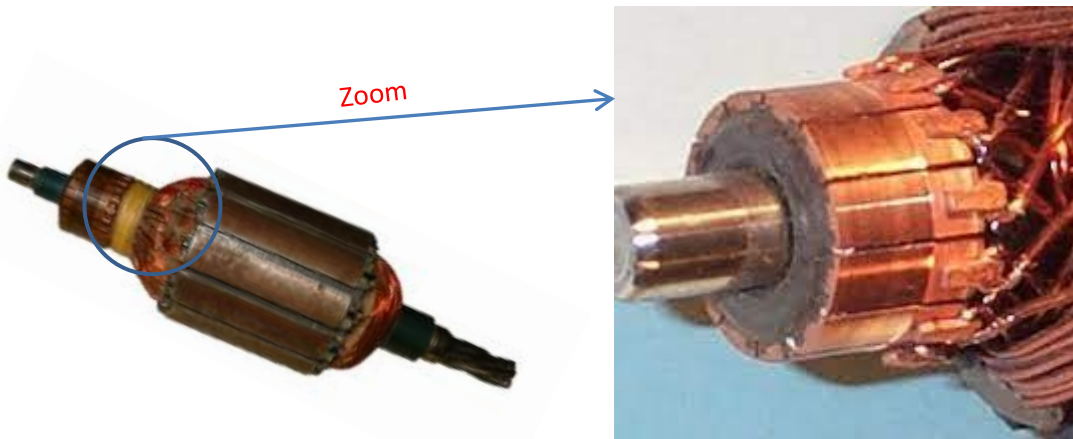


Figure II.3. Rotor d'une MCC

II.1.3. Machine à courant continu généralisée

Au cours de ce chapitre, dans l'objectif de faciliter la compréhension du modèle mathématique qu'on va développer, nous allons établir les équations décrivant le fonctionnement de la machine à courant continu dite généralisée en sa version bipolaire. Elle comporte :[1][12]

— Un rotor ou induit identique à l'induit de la machine à courant continu bipolaire, tournant à la vitesse $\frac{d\theta}{dt} = \omega_r$ comptée positivement dans le sens horaire. Nous considérons deux paires de balais diamétralement opposés et nous supposons aussi pour commencer occupés des positions angulaires θ_1 et θ_2 quelconques.

— Un stator composé seulement de deux paires de pôles inducteurs. Leurs axes magnétiques sont perpendiculaires, l'axe directe \vec{Od} pris comme axe origine des angles, et l'axe en quadrature \vec{Oq} en arrière de 90° par rapport à \vec{Od} .

Il est important de noter que la machine à courant continu à plus de deux balais (en version bipolaire) ne sont pratiquement plus utilisées à l'heure actuelle. Nous avons cependant choisi de développer le modèle mathématique avec la version généralisée, quitte à simplifier par la suite en supprimant deux balais.

II.2. Modèle des enroulements électriques (circuits électriques) de la MCC généralisée

II.2.1. Hypothèses simplificatrices

1. / Le modèle mathématique qui sera développé ne tient pas en compte des pôles auxiliaires ou de commutations, présentés à la section II.1.2.

2. / On suppose que le circuit magnétique est parfaitement feuilleté, ce qui permet de considérer que seuls les enroulements (induit et inducteur) sont parcourus par des courants.

3. / On suppose qu'on est en régime quasi stationnaire (absence de l'effet pelliculaire), condition nécessaire pour considérer le courant comme uniforme dans la section des conducteurs.

4. / On suppose que le circuit magnétique n'est pas saturé, c'est-à-dire le flux magnétique est une fonction linéaire des courants. Et on suppose aussi que l'inductance mutuelle entre deux enroulements i et j est fonction sinusoïdale de l'angle que font leurs axes magnétiques.

$$\psi_{i,j} = \mathcal{M}_{i,j} = M_{i,j} i_j \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (\text{II.1})$$

$M_{i,j}$ étant constante est positive.

II.2.2. Modèle géométriques

En vertu des hypothèses précédentes, la machine à courant continu généralisée peut être schématisée (du point de vue enroulements électriques) par la figure II.4, conventionnellement les enroulements du rotor sont représentés seulement côté positif de l'axe correspondant [1][10]

Les pôles inducteurs d'axe directe portent un enroulement d'indice f , parcouru par un courant i_f ; ceux d'axe en quadrature portent un enroulement d'indice g , parcouru par un courant i_g .

Les balais situés au droit de l'angle θ_1 sont appelés A_1 et B_1 et ceux situés au droit de l'angle θ_2 sont appelés A_2 et B_2 .

Entre les deux balais A_1 et B_1 l'induit se comporte comme une bobine d'axe magnétique $\overrightarrow{A_1 B_1}$, parcourue par un courant i_1 .

Entre les deux balais A_2 et B_2 l'induit se comporte comme une bobine d'axe magnétique $\overrightarrow{A_2 B_2}$, parcourue par un courant i_2 .

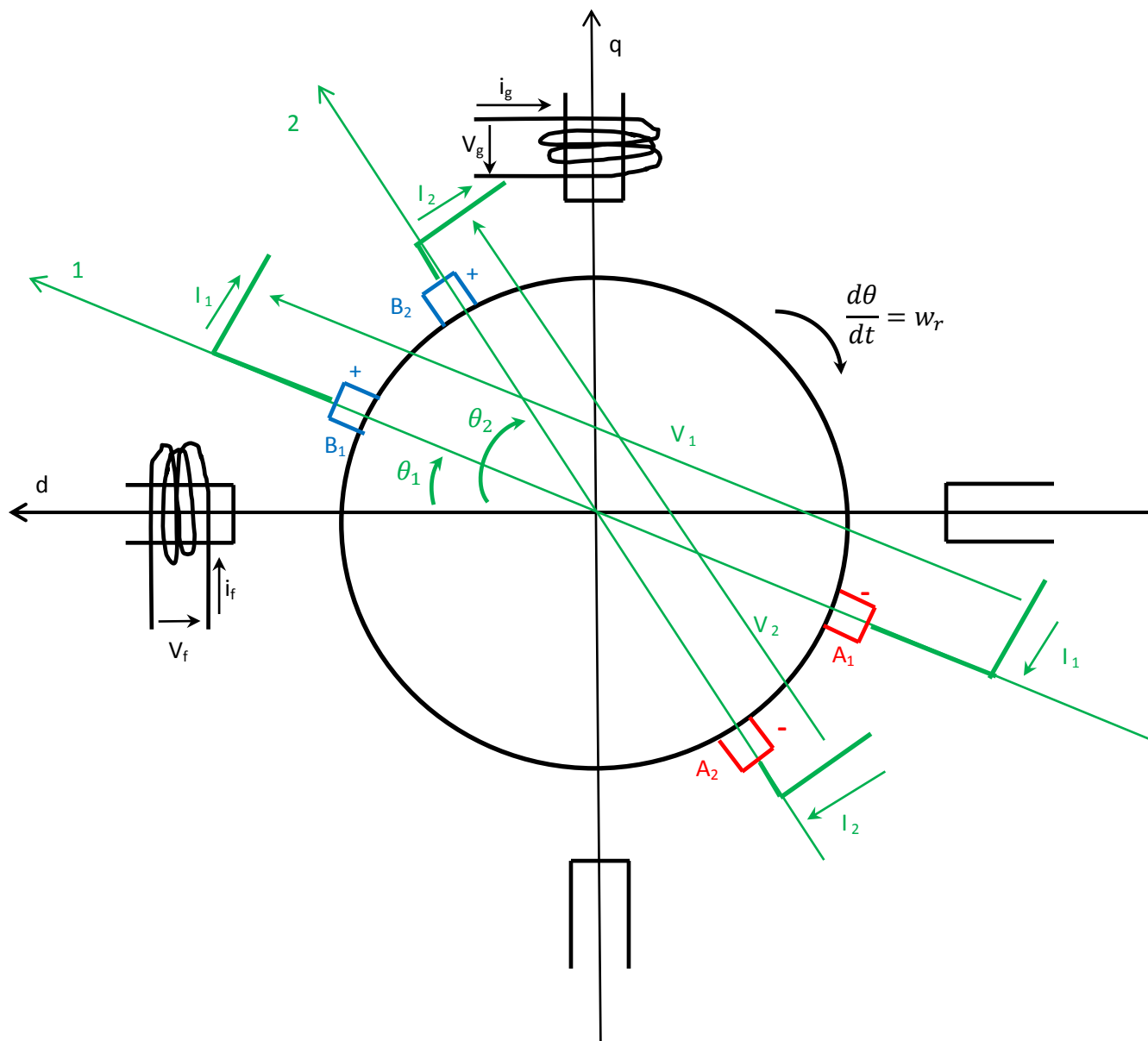


Figure II.4. Modèle des circuits électriques de la machine à courant

II.3. Modèle mathématique de la MCC généralisée (Positions angulaires θ_1 et θ_2 quelconques)

II.3.1. Relation des flux

Les relations entre les flux et les courants de différents circuits électriques constitutifs de la MCC généralisée peuvent s'écrire sous la forme matricielle:[13][14]

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f & \mathcal{M}_{fg} & \mathcal{M}_{f1} & \mathcal{M}_{f2} \\ \mathcal{M}_{gf} & \mathcal{L}_g & \mathcal{M}_{g1} & \mathcal{M}_{g2} \\ \mathcal{M}_{1f} & \mathcal{M}_{1g} & \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{2f} & \mathcal{M}_{2g} & \mathcal{M}_{21} & \mathcal{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

D'après nos hypothèses :

— Les inductances propres sont toutes des constantes $\mathcal{L}_f = L_f$ et $\mathcal{L}_g = L_g$, en plus les inductances propres de l'induit sont égales puisque les deux paires sont identiques

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = L.$$

— $\mathcal{M}_{gf} = \mathcal{M}_{fg} = 0$ les deux enroulements sont perpendiculaires

— $\begin{cases} \mathcal{M}_{f1} = M_{fd} \cos(\theta_f - \theta_1) \\ \mathcal{M}_{1f} = M_{fd} \cos(\theta_1 - \theta_f) \end{cases}$ Mathématiquement ces deux expressions sont égales

cependant, on a pris soin de ranger correctement les angles intervenant dans la fonction cosinus. Le premier angle est toujours celui de l'enroulement qui reçoit le flux, le deuxième celui de l'enroulement qui engendre le flux.

M_{fd} Représente la valeur maximale de l'inductance mutuelle entre l'enroulement f et l'enroulement 1 ou l'enroulement 2, obtenue lorsque l'axe de l'enroulement 1 ou 2 est confondue avec \vec{Od}

On adopte le même raisonnement :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{f2} = M_{fd} \cos(\theta_f - \theta_2) \\ \mathcal{M}_{2f} = M_{fd} \cos(\theta_2 - \theta_f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{g1} = M_{gq} \cos(\theta_g - \theta_1) \\ \mathcal{M}_{1g} = M_{gq} \cos(\theta_1 - \theta_g) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{g2} = M_{gq} \cos(\theta_g - \theta_2) \\ \mathcal{M}_{2g} = M_{gq} \cos(\theta_2 - \theta_g) \end{cases}$$

M_{gq} Est la valeur maximale de l'inductance mutuelle entre l'enroulement g et l'enroulement 1 ou l'enroulement 2, obtenue lorsque l'axe de l'enroulement 1 ou 2 est confondue avec \vec{Oq}

L'équation des différents flux en fonction des courants vient donc :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & 0 & M_{fd}\cos(\theta_f - \theta_1) & M_{fd}\cos(\theta_f - \theta_2) \\ 0 & L_g & M_{gd}\cos(\theta_g - \theta_1) & M_{gd}\cos(\theta_g - \theta_2) \\ M_{fd}\cos(\theta_1 - \theta_f) & M_{gd}\cos(\theta_1 - \theta_g) & L & L\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ M_{fd}\cos(\theta_2 - \theta_f) & M_{gd}\cos(\theta_2 - \theta_g) & L\cos(\theta_2 - \theta_1) & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

II.3.2. Expressions des forces électromotrices

Appliquant donc l'expression générale des forces électromotrices de rotation et de transformation, données et discutées au chapitre I :[1]

— **f.e.m de transformation**

$$e_{i\ t} = - \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

i : indice qui représente les différents enroulements (les enroulements f, g, 1 et 2)

— **f.e.m de rotation**

$$e_{i\ r} = - \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

Finalement :

$$\begin{bmatrix} e_{fr} \\ e_{gr} \\ e_{1r} \\ e_{2r} \end{bmatrix} = w_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{fd}\sin(\theta_1 - \theta_f) & M_{gd}\sin(\theta_1 - \theta_g) & L & L\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ M_{fd}\sin(\theta_2 - \theta_f) & M_{gd}\sin(\theta_2 - \theta_g) & L\sin(\theta_2 - \theta_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

II.4. Modèle mathématique de la MCC généralisée (Positions normale des deux paires de balais)

Après le développement des expressions des f.e.m on peut maintenant placer les deux paires de balais de l'induit dans leur position normale (alignés avec les axes d et q), comme indiquer par la figure II.5.

A_1 et B_1 viennent dans la position A_d et B_d avec l'angle $\theta_1 = 0$

A_2 et B_2 viennent dans la position A_q et B_q avec l'angle $\theta_2 = 90^\circ$

Enfin nous remplaçons partout l'indice 1 par d, l'indice 2 par q, $\theta_f = 0$ et $\theta_g = 90^\circ$

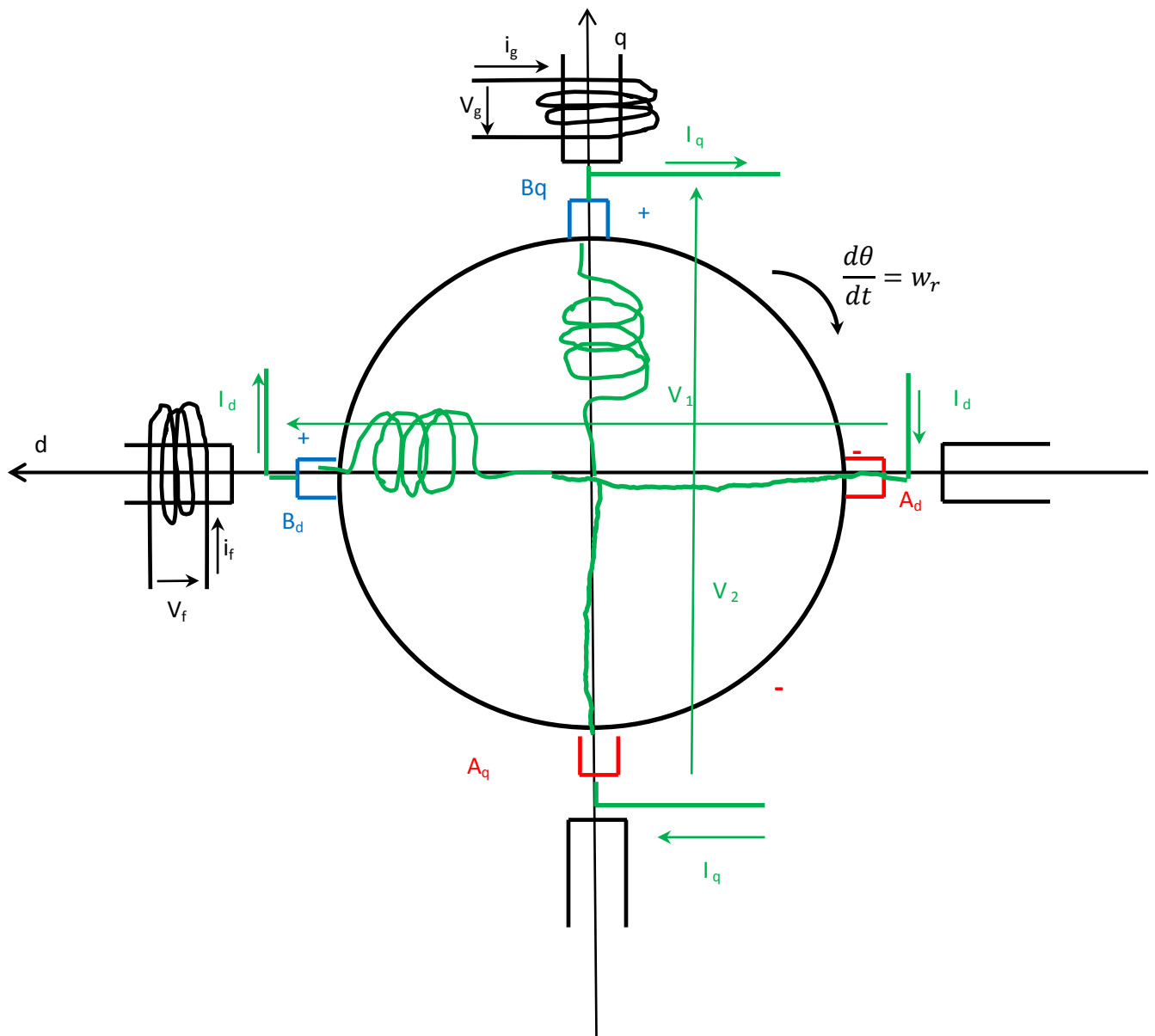


Figure II.5. Modèle des circuits électriques de la machine à courant continu, balais alignés avec les axes d et q

II.4.1. Relation des flux

Le système d'équation représentant les différents flux en fonction des courants, donné en II.3, devient donc : [1][12]

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & 0 & M_{fd} & 0 \\ 0 & L_g & 0 & M_{gq} \\ M_{fd} & 0 & L & 0 \\ 0 & M_{gq} & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

D'après la figure III.5, nous remarquons que les deux axes magnétiques directe et quadrature sont perpendiculaires, physiquement on peut dire que ces deux axes sont indépendants magnétiquement, c'est-à-dire on a aucune interaction magnétique entre les deux axes, ceci est même interprété mathématiquement, équation II.7, par l'indépendance entre les grandeurs magnétiques qui appartient à l'axe directe d ceux appartient à l'axe q.

Le système de l'équation III.7 d'ordre 4 se décompose en deux sous systèmes d'ordre 2, l'un caractérisant le couplage de l'enroulement d'axe d, l'autre caractérisant le couplage d'axe q.

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & M_{fd} \\ M_{fd} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_d \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{bmatrix} \psi_g \\ \psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_g & M_{gq} \\ M_{gq} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_g \\ i_q \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

II.4.2. f.e.m de rotation

Pour cette configuration en faisant le même changement des indices et de valeurs des angles θ_1 et θ_2 . L'expression de la f.e.m de rotation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} e_{fr} &= 0 \\ e_{gr} &= 0 \\ e_{dr} &= -w_r (M_{gq} i_g + L i_q) = -w_r \psi_q \\ e_{qr} &= w_r (M_{fd} i_f + L i_d) = w_r \psi_d \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

II.4.3. f.e.m de transformation

Comme on déjà démontré au chapitre précédent, l'expression de la f.e.m de transformation pour les différents enroulements de la MCC s'écrit :

$$\begin{aligned}
e_{ft} &= -\frac{d\psi_f}{dt} \\
e_{gt} &= -\frac{d\psi_g}{dt} \\
e_{dt} &= -\frac{d\psi_d}{dt} \\
e_{qt} &= -\frac{d\psi_q}{dt}
\end{aligned}
\tag{II.11}$$

II.4.4. Equations électriques

D'après la loi d'ohm et les équations des f.e.m (II.10 et II.11), on peut mettre les tensions aux bornes de chaque enroulement de la MCC en fonction des différents courants.

$$\begin{aligned}
V_f &= R_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \\
V_g &= R_g i_g + \frac{d\psi_g}{dt} \\
V_d &= R_r i_d + \frac{d\psi_d}{dt} + w_r \psi_q \\
V_q &= R_r i_q + \frac{d\psi_q}{dt} - w_r \psi_d
\end{aligned}
\tag{II.12}$$

II.4.5. Expressions de puissance et du couple

Au chapitre 1, on a démontré l'expression du couple engendré par l'ensemble de n circuits électriques :

$$C_e = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i^2 \frac{d\mathcal{L}_i}{d\theta_i} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n i_i i_j \frac{d\mathcal{M}_{ij}}{d\theta_i} \tag{II.13}$$

Les inductances propres et mutuelles sont celles de la matrice donnée au système II.3, et leur loi en fonction de l'angle est explicitée en II.4, lorsqu'on n'a pas encore donné à θ_1 et θ_2 leurs valeurs particuliers.

— Les inductances propres sont toutes des constantes, donc de dérivée nulle par rapport à l'angle. $\mathcal{L}_f = L_f$, $\mathcal{L}_g = L_g$ et $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = L$.

— $\mathcal{M}_{gf} = \mathcal{M}_{fg} = 0$ donc elle donne une contribution nulle au couple car elle est aussi de dérivée nulle.

— Les deux mutuelles $L \cos(\theta_1 - \theta_2)$ et $L \cos(\theta_2 - \theta_1)$ donnent une contribution nulle car leurs dérivés sont égales et de signes contraire selon qu'on considère l'action de 1 sur 2 ou l'action de 2 sur 1.

Le couple devient :

$$C_e = M_{fd} \sin(\theta_1 - \theta_f) i_f i_1 + M_{gq} \sin(\theta_1 - \theta_g) i_g i_1 + M_{fd} \sin(\theta_2 - \theta_f) i_f i_2 + M_{gq} \sin(\theta_2 - \theta_g) i_g i_2 \quad (\text{II.14})$$

Maintenant, on peut donner aux angles θ_1 et θ_2 leurs vraies valeurs correspondant à la figure II.5.

En adaptant le même raisonnement de changement d'indices et de valeur de θ_1 et θ_2 à l'équation II.14, on trouve

$$C_e = M_{fd} i_f i_q - M_{gq} i_g i_d \quad (\text{II.15})$$

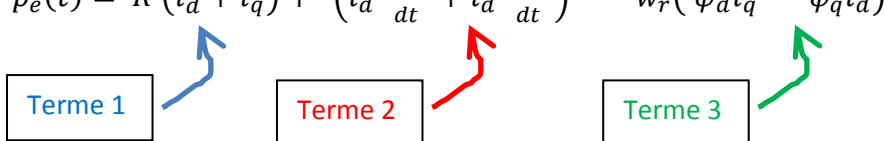
En utilisant II.8 et II.9 on trouve la fameuse expression du couple électromagnétique engendré par la MCC

$$C_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (\text{II.16})$$

La puissance électrique instantanée sortant de l'induit s'écrit :

$$p_e(t) = V_d(t) i_d(t) + V_q(t) i_q(t) \quad (\text{II.17})$$

En utilisant II.9

$$p_e(t) = R(i_d^2 + i_q^2) + \left(i_d \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \frac{d\psi_q}{dt} \right) - w_r(\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (\text{II.18})$$


Nous remarquons que cette expression de la puissance électrique instantanée se compose de trois termes :[8]

- Le 1^{er} terme correspond aux pertes Joule.
- Le 2^e terme correspond à la variation d'énergie magnétique emmagasinée, dû à la variation temporelle des courants.
- Le 3^e terme correspond à la puissance mécanique

II.4.6. Equations mécanique

D'après le premier principe de la dynamique [3][18]

$$C_e - C_r = J \frac{dw_r}{dt} \quad (\text{II.19})$$

C_e Couple électromagnétique engendrée par la MCC.

C_r Représente le couple de charge ou le couple résistant.

J Moment d'inertie du Rotor de la MCC

Ω la vitesse angulaire de la machine.

II.6. Modèle mathématique de la MCC multipolaire

Dans la machine à courant continu bipolaire, la vitesse angulaire du rotor est caractérisée par w_r , telle que:

$$w_r = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{II.20})$$

Avec θ est la position angulaire.

Dans une machine à courant continu multipolaire, la vitesse de angulaire du rotor sera caractérisée par Ω_r , telle que :

$$\Omega_r = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{II.21})$$

Avec θ est la position angulaire.

On introduit l'angle électrique tel que

$$\theta = P \Theta \quad (\text{II.22})$$

P ; Nombre de pair de pôles

La vitesse angulaire électrique w_r , telle que:

$$w_r = P \Omega \quad (\text{II.23})$$

Les seules équations concernées par ce changement sont :

L'équation du couple, telle que

$$C_e = \frac{3}{2} P (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (\text{II.24})$$

L'équation du mouvement, telle que

$$C_e - C_r = \frac{J}{P} \frac{dw_r}{dt} \quad (\text{II.25})$$

II.7. Conclusion

Le développement du modèle mathématique de la MCC, ou la mise en équation, va nous permettre de prévoir le comportement et le fonctionnement de la machine.

La simulation du modèle développé fera l'objet de TP 2 intitulé Simulation la MCC pour les différents types d'excitation de la machine. Nous examinerons par la simulation le fonctionnement à vide, en charge et le changement brusque de la charge de la MCC.

Chapitre III. Modélisation des machines synchrones

III.1. Généralités

III.1.1. Représentation schématique

Les symboles normalisés de la machine synchrone MS, susceptible de fonctionner en moteur ou en génératrice (Alternateur), sont donnés par la figure III.1.[8]

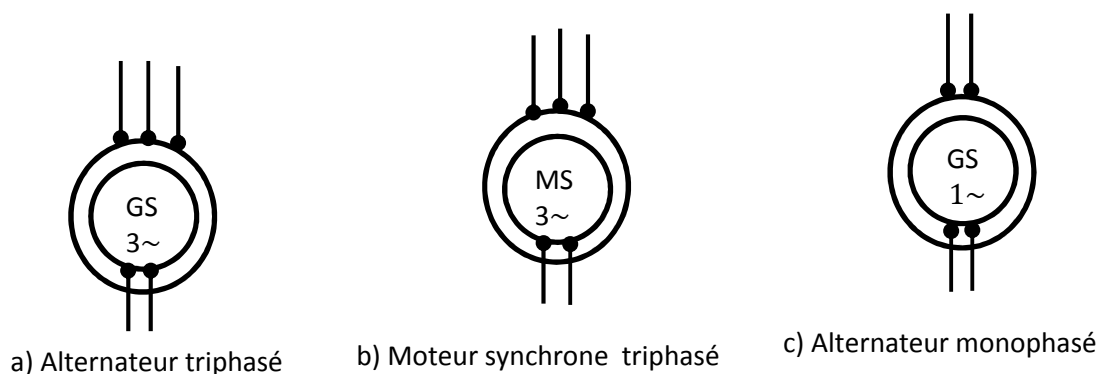


Figure III.1. Symboles normalisés de la machine synchrone

III.1.2. Description

La machine synchrone comporte :[5][8][12]

- Un stator dont l'empilage est constitué de tôles à faible pertes.
- Des encoches poinçonnées régulièrement à la périphérie de l'alésage reçoivent conducteurs d'un enroulement mono ou triphasé.
- Un rotor, muni d'un enroulement monophasé excité en courant continu, se présente sous deux formes distinctes définissant deux types de machines synchrones, à savoir :

- *Les machines à rotor cylindrique* dites aussi turbo-alternateurs ou turbomoteurs : des machines rapides à 2 ou 4 pôles accouplées à des turbines à vapeur ou à gaz ou à des compresseurs centrifuges. Du fait de la grande vitesse de rotation le rotor est réalisé sous forme d'un cylindre en acier forgé à haute résistance mécanique.

- *Les machines à pôles saillants* le nombre de pôles minimal est 4. Elles sont utilisées dans les centrales hydro-électriques, accouplé à des turbines Pelton, Francis ou Kalpan.

III.1.3. Principe de fonctionnement d'une machine synchrone

Le stator alimenté par un système de tensions triphasé crée un champ tournant dans l'entrefer. Ce champ magnétique tourne à la vitesse de f/p (tours/seconde).[5]

Avec

f : Fréquence d'alimentation des bobinages statoriques.

P : Nombre de paires de pôles.

Le rotor alimenté un courant fixe crée un champ magnétique fixe va alors s'aligner avec le champ tournant. Le rotor tourne ainsi à la même que le champ tournant. La vitesse de rotation du rotor est donc :

$$\Omega = w/p \quad (III.1)$$

III.1.4. Définition des différents enroulements de la MS

La machine synchrone dont nous allons étudier est composée des enroulements suivants, voir la figure III.2 :

— Enroulements statoriques : comporte trois phases identiques, d'indices a, b et c, décalées entre elles dans l'espace d'un angle électrique égale à $2\pi/3$.

— Enroulement rotorique ou d'excitation continu, d'indice f, distribué suivant les axes polaires successifs.

— Enroulement amortisseur placé au voisinage de l'entrefer, constitué soit par des barres de cuivre nu court-circuitées par des anneaux, soit par les pièces en acier massif.

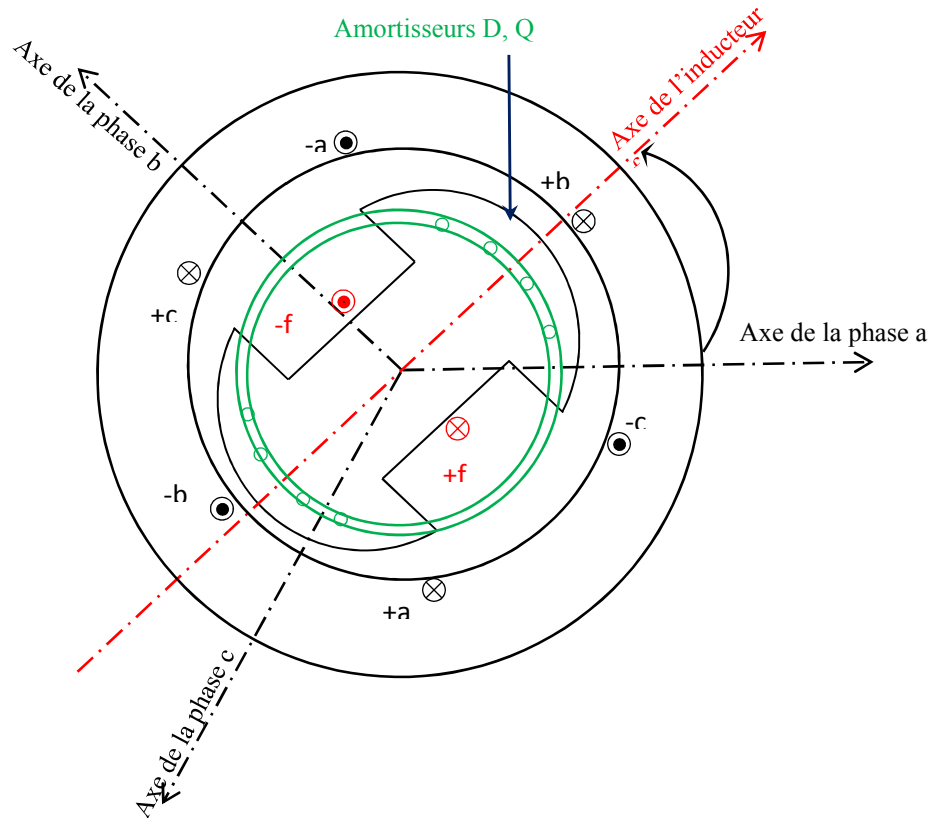


Figure III.2. Différents enroulements de la machine synchrone

III.2. Modèle des enroulements électriques (circuits électriques) de la MS

III.2.1. Hypothèses simplificatrices

1/. On suppose que le circuit magnétique n'est pas saturé, c'est-à-dire le flux magnétique est une fonction linéaire des courants.

2/. On suppose que le circuit magnétique est parfaitement feuilleté, ce qui permet de considérer que seuls les enroulements (induit et inducteur) sont parcourus par des courants.

3/. l'enroulement amortisseur peut être représenté par deux enroulements fermés en court-circuit sur eux-mêmes, l'un dit amortisseur d'axe directe d'indice D, d'axe magnétique dirigé selon \vec{Od} , l'autre dit amortisseur d'axe en quadrature, d'indice Q, d'axe magnétique dirigé selon \vec{Oq} .

III.2.2. Modèle géométriques

En vertu des hypothèses précédentes, la machine synchrone peut être schématisée (du point de vu enroulements électriques) par la figure III.3, conventionnellement les enroulements sont représentés seulement côté positif de l'axe correspondant [8][15]

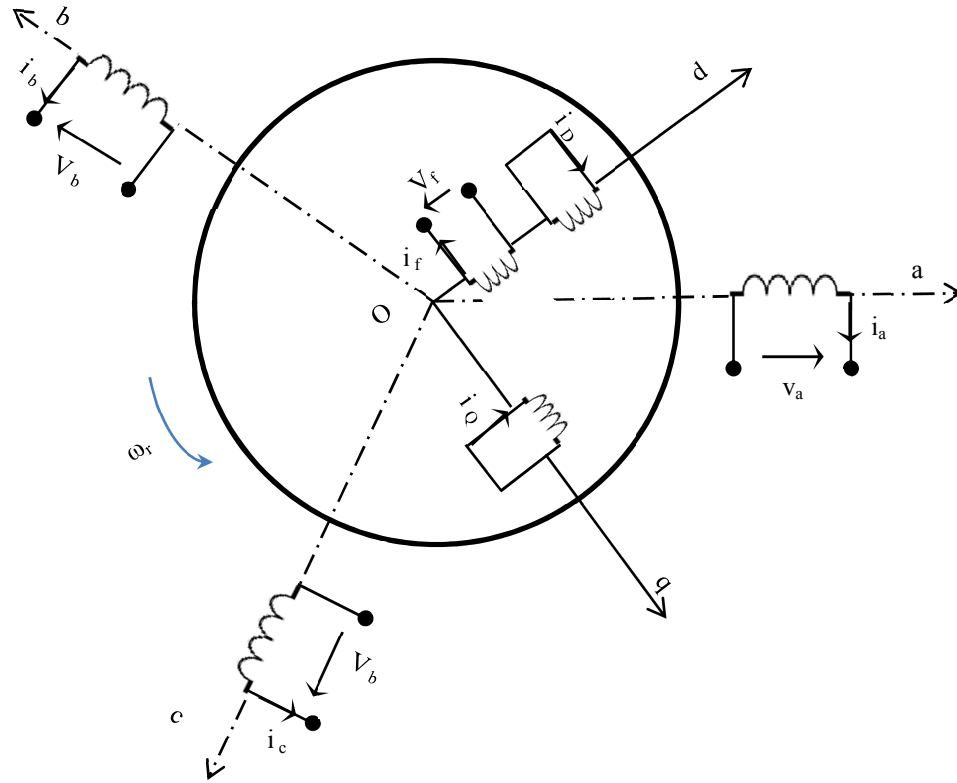


Figure III.3. Modèle de différents circuits de la machine synchrone

III.3. Modèle mathématique de la MS

III.3.1. Equations de tension en grandeurs de phase

Le système d'équation de tension de la machine synchrone est obtenu par l'application de la loi d'ohm généralisée aux différents circuits :[8]

$$V_a = R_s i_a + \frac{d\varphi_a}{dt} \quad (\text{III.2})$$

$$V_b = R_s i_b + \frac{d\varphi_b}{dt} \quad (\text{III.3})$$

$$V_c = R_s i_c + \frac{d\varphi_c}{dt} \quad (\text{III.4})$$

$$V_f = R_f i_f + \frac{d\varphi_f}{dt} \quad (\text{III.5})$$

$$0 = R_D i_D + \frac{d\varphi_D}{dt} \quad (\text{III.6})$$

$$0 = R_Q i_Q + \frac{d\varphi_Q}{dt} \quad (\text{III.7})$$

III.3.2. Relation des flux

Les relations entre les flux et les courants de différents circuits électriques constitutifs de la MS peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \varphi_f \\ \varphi_D \\ \varphi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_a & \mathcal{M}_{a,b} & \mathcal{M}_{a,c} & \mathcal{M}_{a,f} & \mathcal{M}_{a,D} & \mathcal{M}_{a,Q} \\ \mathcal{M}_{a,b} & \mathcal{L}_b & \mathcal{M}_{b,c} & \mathcal{M}_{b,f} & \mathcal{M}_{b,D} & \mathcal{M}_{b,Q} \\ \mathcal{M}_{a,c} & \mathcal{M}_{b,c} & \mathcal{L}_c & \mathcal{M}_{c,f} & \mathcal{M}_{c,D} & \mathcal{M}_{c,Q} \\ \mathcal{M}_{a,f} & \mathcal{M}_{b,f} & \mathcal{M}_{c,f} & \mathcal{L}_f & \mathcal{M}_{f,D} & \mathcal{M}_{f,Q} \\ \mathcal{M}_{a,D} & \mathcal{M}_{b,D} & \mathcal{M}_{c,D} & \mathcal{M}_{f,D} & \mathcal{L}_D & \mathcal{M}_{D,Q} \\ \mathcal{M}_{a,Q} & \mathcal{M}_{b,Q} & \mathcal{M}_{c,Q} & \mathcal{M}_{f,Q} & \mathcal{M}_{D,Q} & \mathcal{L}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_f \\ I_D \\ I_Q \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

— *Inductances propres rotoriques:*

En faisant abstraction des perturbations locales dans la distribution du champ d'entrefer provoquées par les encoches, le circuit magnétique de la machine apparaît isotrope vu du rotor. Les inductances propres \mathcal{L}_f , \mathcal{L}_D et \mathcal{L}_Q sont donc constantes.

— *Inductances mutuelles des enroulements du rotor:*

Dans l'axe direct on a :

$$\mathcal{M}_{f,D} = \mathcal{M}_{D,f} = cte \quad (\text{III.9})$$

Etant donné que les axes d et q sont en quadrature, il s'ensuit:

$$\mathcal{M}_{f,Q} = \mathcal{M}_{Q,f} = \mathcal{M}_{D,Q} = \mathcal{M}_{Q,D} = 0 \quad (\text{III.10})$$

Les inductances entre les enroulements statoriques et rotoriques sont fonction de l'angle électrique θ entre l'axe de la phase a pris comme référence et l'axe d :

$$\mathcal{M}_{f,a}(\theta) = \mathcal{M}_{a,f}(\theta) = M_{f,a} \cos(\theta) \quad (\text{III.11})$$

$$\mathcal{M}_{f,b}(\theta) = \mathcal{M}_{b,f}(\theta) = M_{f,a} \cos(\theta - 2\pi/3) \quad (\text{III.12})$$

$$\mathcal{M}_{f,c}(\theta) = \mathcal{M}_{c,f}(\theta) = M_{f,a} \cos(\theta + 2\pi/3) \quad (\text{III.13})$$

$$\mathcal{M}_{a,D}(\theta) = \mathcal{M}_{D,a}(\theta) = M_{a,D} \cos(\theta) \quad (\text{III.14})$$

$$\mathcal{M}_{b,D}(\theta) = \mathcal{M}_{D,b}(\theta) = M_{a,D} \cos(\theta - 2\pi/3) \quad (\text{III.15})$$

$$\mathcal{M}_{c,D}(\theta) = \mathcal{M}_{D,c}(\theta) = M_{a,D} \cos(\theta + 2\pi/3) \quad (\text{III.16})$$

$$\mathcal{M}_{a,Q}(\theta) = \mathcal{M}_{Q,a}(\theta) = M_{a,Q} \sin(\theta) \quad (\text{III.17})$$

$$\mathcal{M}_{b,Q}(\theta) = \mathcal{M}_{Q,b}(\theta) = M_{a,Q} \sin(\theta - 2\pi/3) \quad (\text{III.18})$$

$$\mathcal{M}_{c,Q}(\theta) = \mathcal{M}_{Q,c}(\theta) = M_{a,Q} \sin(\theta + 2\pi/3) \quad (\text{III.19})$$

— Inductances propres statoriques:

* **Dans une machine synchrone à rotor cylindrique**, abstraction faite de la faible variation de perméance du circuit magnétique rotorique selon les axes d et q due à l'absence d'encoches dans le centre des pôles.

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_b = \mathcal{L}_c = L_{h\sim} + L_{\sigma s} = cte \quad (\text{III.20})$$

$L_{h\sim}$: Harmonique d'ordre 1 de l'inductance propre de la phase a.

$L_{\sigma s}$: Inductance de fuite.

* **Dans une machine à pôles saillants**, par contre, la perméance du circuit magnétique est maximale selon l'axe d et minimal selon l'axe q.

L'inductance propre d'une phase inclut l'inductance de fuite $L_{\sigma s}$, de sorte que :

$$\mathcal{L}_a(\theta) = L_{h\sim} + L_{\sigma s} + L_{h2} \cos(2\theta) = L + L_{h2} \cos(2\theta) \quad (\text{III.21})$$

$$\mathcal{L}_b(\theta) = L_{h\sim} + L_{\sigma s} + L_{h2} \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = L + L_{h2} \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{III.22})$$

$$\mathcal{L}_c(\theta) = L_{h\sim} + L_{\sigma s} + L_{h2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = L + L_{h2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{III.23})$$

— Inductances mutuelles entre phases statoriques:

* **Dans une machine synchrone à rotor cylindrique**

$$\mathcal{M}_{a,b} = \mathcal{M}_{b,a} = \mathcal{M}_{b,c} = \mathcal{M}_{c,b} = \mathcal{M}_{c,a} = \mathcal{M}_{a,c} = M_s \quad (\text{III.24})$$

* **Dans une machine synchrone à rotor cylindrique**

$$\mathcal{M}_{a,b} = \mathcal{M}_{b,a} = -0.5 L_{h\sim} + L_{h2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = M_{a,b} + L_{h2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{III.25})$$

$$\mathcal{M}_{b,c} = \mathcal{M}_{c,b} = -0.5 L_{h\sim} + L_{h2} \cos(2\theta) = M_{a,b} + L_{h2} \cos(2\theta) \quad (\text{III.26})$$

$$\mathcal{M}_{c,a} = \mathcal{M}_{a,c} = -0.5 L_{h\sim} + L_{h2} \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = M_{a,b} + L_{h2} \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{III.27})$$

Finalement, les flux totalisés s'expriment sous forme matricielle comme :

$$[\varphi_{abc}] = [L_s][i_{abc}] + [L_{sr}][i_{fDQ}] \quad (\text{III.28})$$

$$[\varphi_{fDQ}] = [L_{sr}]^t[i_{abc}] + [L_r][i_{fDQ}] \quad (\text{III.29})$$

Avec

$[L_s]$

$$= \begin{bmatrix} L + L_{h2} \cos(2\theta) & M_{a,b} + L_{h2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{a,b} + L_{h2} \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{a,b} + L_{h2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L + L_{h2} \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{a,b} + L_{h2} \cos(2\theta) \\ M_{a,b} + L_{h2} \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{a,b} + L_{h2} \cos(2\theta) & L + L_{h2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

$$[L_{sr}] = \begin{bmatrix} M_{f,a} \cos(\theta) & M_{a,D} \cos(\theta) & M_{a,Q} \sin(\theta) \\ M_{f,a} \cos(\theta - 2\pi/3) & M_{a,D} \cos(\theta - 2\pi/3) & M_{a,Q} \sin(\theta - 2\pi/3) \\ M_{f,a} \cos(\theta + 2\pi/3) & M_{a,D} \cos(\theta + 2\pi/3) & M_{a,Q} \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_f & M_{f,D} & 0 \\ M_{f,D} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

III.3.3. Transformation de Park appliquée à la machine synchrone

Pour supprimer la non-linéarité, on transforme les enroulements statoriques en enroulements orthogonaux en utilisant la transformation de Park définie comme suit :

$$A = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta - \frac{2\pi}{3} & \cos \theta + \frac{2\pi}{3} \\ \sin \theta & \sin \theta - \frac{2\pi}{3} & \sin \theta + \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

La matrice inverse a pour valeur

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ \cos \theta - \frac{2\pi}{3} & \sin \theta - \frac{2\pi}{3} & 1 \\ \cos \theta + \frac{2\pi}{3} & \sin \theta + \frac{2\pi}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Pour une grandeur G , telle que la tension, courant, flux, a trois phases

$$\begin{bmatrix} G_d \\ G_q \\ G_o \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} G_d \\ G_q \\ G_o \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

On peut interpréter la transformation de Park comme la substitution, aux enroulements de phases a, b, et c dont les conducteurs et les axes magnétiques sont immobiles par rapport au stator, de deux enroulements d et q, dont les axes magnétiques sont solidaires au rotor et tournent avec lui. La représentation schématique de la machine par la figure III.3 devient alors celle de la figure III.4. [12] [16]

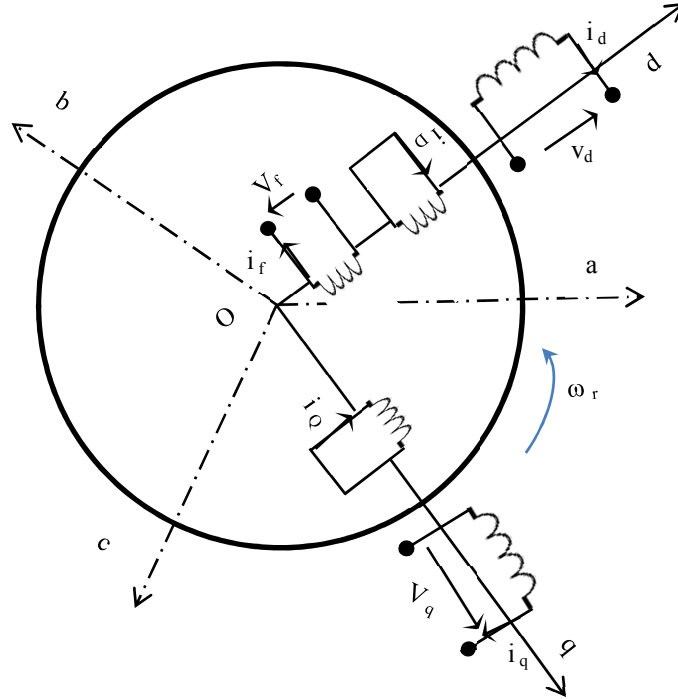


Figure III.4. Modèle de Park de la machine synchrone

III.3.4. Equations électriques dans les axes d et q

Nous multiplions les équations de tension des trois phases statoriques données en III.1 comme suit :

$$\begin{aligned} [V_{d,q,o}] &= [A][V_{a,b,c}] \\ &= [R_s][A][i_{a,b,c}] + [A] \left[\frac{d \varphi_{a,b,c}}{dt} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Après intégration par partie on trouve :

$$V_d = R_s i_d + \frac{d\varphi_d}{dt} - \omega_r \varphi_q \quad (\text{III.37})$$

$$V_q = R_s i_q + \frac{d\varphi_q}{dt} + \omega_r \varphi_d \quad (\text{III.38})$$

$$V_o = R_s i_o + \frac{d\varphi_o}{dt} \quad (\text{III.39})$$

III.3.5. Equations de flux dans les axes d et q

En appliquant la transformation de Park à la matrice des flux statoriques, on obtient :

$$[A][\varphi_{abc}] = [A][L_s][i_{abc}] + [A][L_{sr}][i_{fDQ}] \quad (\text{III.40})$$

$$[\varphi_{dq0}] = [A][L_s][i_{abc}] + [A][L_{sr}][i_{fDQ}] \quad (\text{III.41})$$

En introduisant les expressions des inductances développées dans la section III.3, on trouve :

$$\begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_q \\ \varphi_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{af} & M_{aD} & 0 \\ 0 & 0 & M_{aQ} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

L_d : représente l'inductance synchrone longitudinale:

$$L_d = L_{\sigma s} + \frac{3}{2}(L_{h\sim} + L_{h2}) = L_{\sigma s} + M_{ad}$$

L_q : représente l'inductance synchrone transversale:

$$L_q = L_{\sigma s} + \frac{3}{2}(L_{h\sim} - L_{h2}) = L_{\sigma s} + M_{aq}$$

L_o : représente l'inductance homopolaire:

$$L_o = L_{\sigma s}$$

Pour les flux rotoriques, on trouve:

$$\begin{bmatrix} \varphi_f \\ \varphi_D \\ \varphi_Q \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} M_{af} & 0 & 0 \\ M_{aD} & 0 & 0 \\ 0 & M_{aQ} & L_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

Les deux systèmes de flux en fonction des courants peuvent se décomposer en trois systèmes indépendants :

$$\begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_f \\ \varphi_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & M_{af} & M_{aD} \\ \frac{3}{2}M_{af} & L_f & M_{fD} \\ \frac{3}{2}M_{aD} & M_{fD} & L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_q \\ \varphi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_q & M_{aQ} \\ \frac{3}{2}M_{aQ} & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

$$\varphi_o = L_o i_o \quad (\text{III.46})$$

III.3.6. Puissance et couple

La puissance électrique instantanée de la machine vaut :

$$\begin{aligned} p(t) &= v_a(t) i_a(t) + v_b(t) i_b(t) + v_c(t) i_c(t) \\ &= \frac{3}{2} (v_d(t) i_d(t) + v_q(t) i_q(t)) + 3v_o(t) i_o(t) + v_f(t) i_f(t) \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Exprimons cette puissance en fonction des flux et des courants en utilisant les équations de Park :

$$\begin{aligned} p(t) &= \\ &= -\frac{3}{2} \left(i_d(t) \frac{d\varphi_d(t)}{dt} + i_q(t) \frac{d\varphi_q(t)}{dt} + 2 i_o(t) \frac{d\varphi_o(t)}{dt} \right) + \frac{3}{2} (\varphi_d(t) i_d(t) - \varphi_q(t) i_q(t)) \omega_r \\ &\quad - \frac{3}{2} R_a (i_d(t)^2 + i_q(t)^2 + 2 i_o(t)^2) \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

La première parenthèse représente la variation par unité de temps de l'énergie magnétique emmagasinée.

La deuxième représente la puissance mécanique transformée en puissance électrique à l'intérieur de la machine.

La troisième parenthèse représente les pertes Joule dans l'induit.

L'expression du couple est :

$$\Gamma_e = \frac{3}{2} (\varphi_d i_q - \varphi_q i_d) \quad (\text{III.49})$$

D'après le premier principe de la dynamique :

$$\Gamma_e - \Gamma_r = J \frac{d\omega_r}{dt} \quad (\text{III.50})$$

Γ_r : représente le couple résistant.

III.4. Modèle de la MS multipolaire

Les équations électriques et ceux des flux en fonction des courants sont inchangées, seules les équations du couple et du mouvement deviennent

L'expression du couple est :

$$\Gamma_e = \frac{3}{2} P (\varphi_d i_q - \varphi_q i_d)$$

D'après le premier principe de la dynamique :

$$\Gamma_e - \Gamma_r = \frac{J}{P} \frac{d\omega_r}{dt}$$

Γ_r : représente le couple résistant.

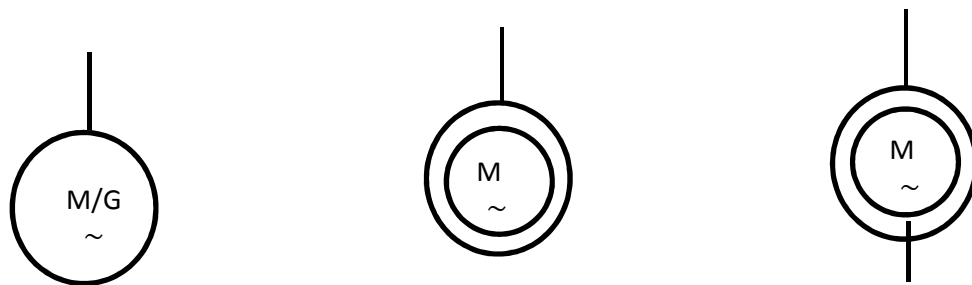
P nombre de paires de pôles.

Chapitre IV. Modélisation des machines asynchrones

IV.1. Généralités

IV.1.1. Représentation schématique

Les symboles normalisés de la machine asynchrone MAS, figure IV.1, sont donnés pour la MAS générale, moteur à cage et moteur à bagues.[8]



a) Symbole générale d'une MAS b) Moteur asynchrone à cage c) Moteur asynchrone à bagues

Figure IV.1. Symboles normalisés de la machine asynchrone

IV.1.2. Description

La machine asynchrone dont nous allons étudier est composée des enroulements suivants :[18]

— Enroulements statoriques: comporte trois phases identiques, figure IV.2.a, d'indices a, b et c, décalées entre elles dans l'espace d'un angle électrique égale à $2\pi/3$. Il doit être constitué de façon à permettre d'utiliser au mieux la circonférence du stator, d'obtenir le flux maximum pour une dépense minimum de la force magnéto motrice et d'atteindre autant que possible une répartition sinusoïdale du champ magnétique suivant la circonférence du stator.

— Enroulements rotoriques: on distingue un rotor en court-circuit et un rotor à bague. Le premier type est constitué par une cage cylindrique dite cage d'écureuil, formée de barres de cuivre ou de cuivre d'aluminium et court-circuitées à leurs extrémités par deux anneaux, figure IV.2.b. Le second est appelé également rotor bobiné, et se compose d'un enroulement à conducteurs isolés, généralement triphasé et monté en étoile, figure IV.2.c.

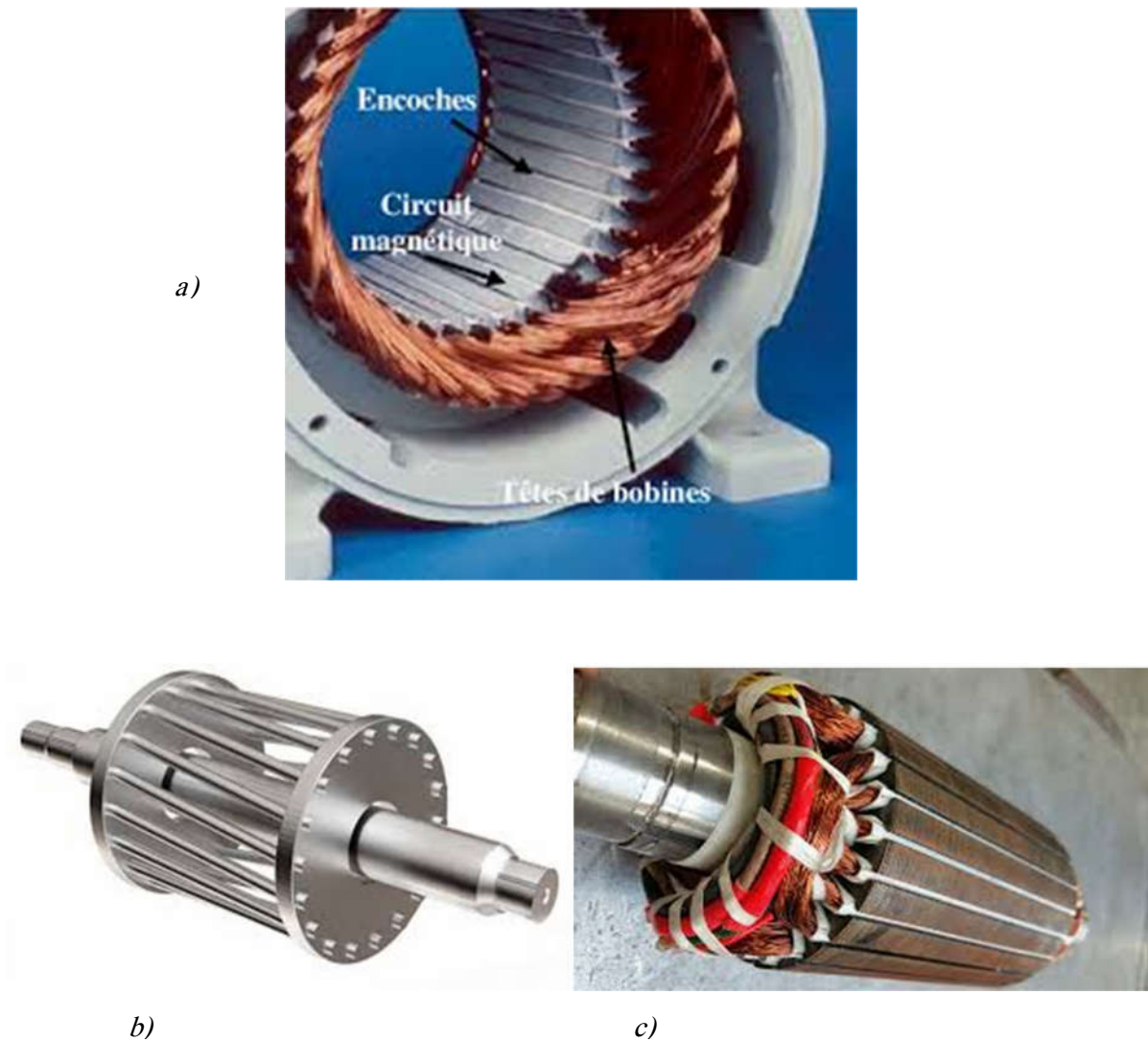


Figure IV.2. Différents enroulements de la machine asynchrone
a) Stator, b) Rotor à cage, c) Rotor bobiné

IV.1.3. Principe de fonctionnement d'une machine asynchrone

L'enroulement statorique, alimenté par un système de courants symétriques, génère une onde de tension magnétique tournant à $\Omega_s = \frac{\omega_s}{p}$ par rapport au stator.

Les enroulements rotoriques sont fermés en court-circuit sur eux-mêmes et tournent à la vitesse Ω_m du rotor.

La vitesse relative du champ tournant statorique par rapport au rotor vaut :

$$\Omega_s' = \Omega_s - \Omega_m \quad (\text{IV.1})$$

Les conducteurs rotoriques balayés par cette onde tournante sont le siège d'une force électromotrice induite de pulsation :

$$\omega_r = P \Omega_s' = \omega_s - \omega_m \quad (IV.2)$$

ω_s et ω_r Désignent respectivement les pulsations des courants statorique et rotorique.

ω_m Correspond à la pulsation mécanique $P \Omega_m$

Les enroulements rotoriques, étant en court-circuit, sont parcourus par des courants induits de pulsation ω_r qui génèrent une onde de tension magnétique tournant par rapport au rotor à $\Omega_r = \omega_r / P$

La vitesse relative de l'onde rotorique par rapport au stator est donnée par :

$$\Omega_r' = \Omega_r + \Omega_m = \Omega_s \quad (IV.3)$$

Les ondes statoriques et rotoriques étant synchrones, la machine asynchrone est susceptible de délivrer un couple à n'importe quelle vitesse de rotation, sauf pour $\Omega_m = \Omega_s$ pour laquelle le phénomène d'induction au rotor disparaît.

Dans la machine asynchrone, la condition suivante, équation IV.4, est satisfaite :

$$\omega_s = \omega_m + \omega_r \quad (IV.4)$$

IV.2. Modèle des enroulements électriques (circuits électriques) de la MAS

IV.2.1. Hypothèses simplificatrices

Pour faire la modélisation de la MAS, on suppose que :

- 1/. Le circuit magnétique n'est pas saturé, c'est-à-dire le flux magnétique est une fonction linéaire des courants.
- 2/. Le circuit magnétique est parfaitement feuilleté, ce qui permet de considérer que seuls les enroulements (induit et inducteur) sont parcourus par des courants.
- 3/. Le stator est considéré comme lisse et l'entrefer constant (l'effet des encoches est négligé) et par conséquent les tensions et les courants sont sinusoïdaux.
- 4/. La cage rotorique est assimilée à un système triphasé dont les phases sont en court-circuit.
- 5/. L'effet d'extrémité des têtes des bobines est négligé.

IV.2.2. Modèle géométriques

En vertu des hypothèses précédentes, la machine asynchrone peut être schématisée (du point de vue enroulements électriques) par la figure IV.3, conventionnellement les enroulements sont représentés seulement côté positif de l'axe correspondant [1][8][12]

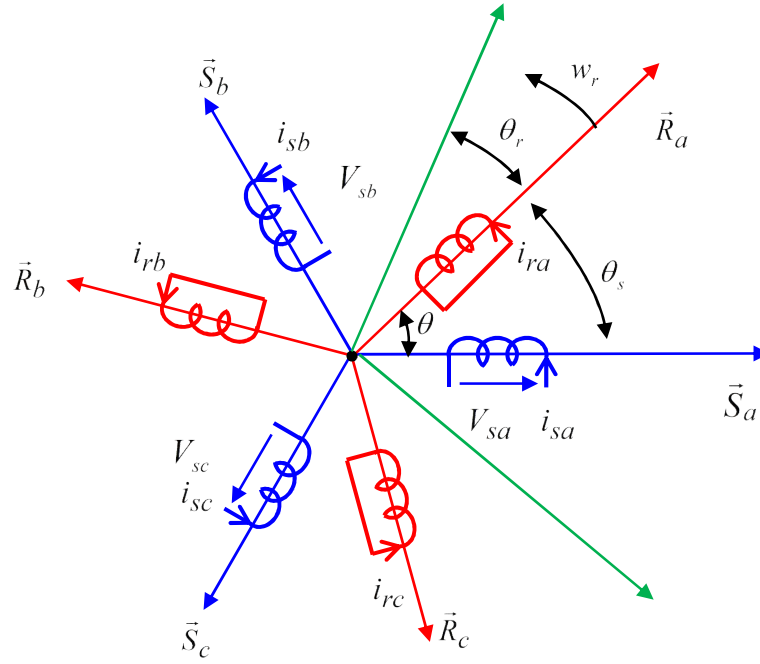


Figure VI.3. Représentation schématique de différents enroulements de la machine asynchrone

On aura donc les définitions angulaires suivantes, dans le sens trigonométrique :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{Oa_s}, \overrightarrow{Od} \right) = \theta_s \\ \left(\overrightarrow{Ob_s}, \overrightarrow{Od} \right) = \theta_s - 2\pi/3 \\ \left(\overrightarrow{Oc_s}, \overrightarrow{Od} \right) = \theta_s - 2\pi/3 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\overrightarrow{Oa_r}, \overrightarrow{Od} \right) = \theta_r \\ \left(\overrightarrow{Ob_r}, \overrightarrow{Od} \right) = \theta_r - 2\pi/3 \\ \left(\overrightarrow{Oc_r}, \overrightarrow{Od} \right) = \theta_r - 2\pi/3 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\overrightarrow{Oa_s}, \overrightarrow{Oa_r} \right) = \theta_s - \theta_r \\ \left(\overrightarrow{Oq}, \overrightarrow{Od} \right) = \pi/2 \end{cases}$$

Notons que θ caractérise la position angulaire du rotor par rapport au stator, d'où la vitesse angulaire (en bipolaire) :

$$w_r = \frac{d\theta_s}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \quad (IV.5)$$

IV.3. Modèle mathématique de la MAS

IV.3.1. Equations de tension en grandeurs de phase

Le système d'équation de tension de la machine asynchrone est obtenu par l'application de la loi d'ohm généralisée aux différents circuits : [8][13]

$$\begin{cases} [V_{sabc}] = [R_s][i_{sabc}] + \frac{d}{dt}[\Phi_{sabc}] \\ [V_{rabc}] = [R_r][i_{rabc}] + \frac{d}{dt}[\Phi_{rabc}] \end{cases} \quad (IV.6)$$

Avec

$$[V_{sabc}] = [V_{sa} \quad V_{sb} \quad V_{sc}]^T$$

Vecteur des tensions appliquées aux trois phases statoriques

$$[i_{sabc}] = [i_{sa} \quad i_{sb} \quad i_{sc}]^T$$

Vecteur des courants parcourant les trois phases statoriques.

$$[V_{rabc}] = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Vecteur des tensions nulles du rotor (étant en court-circuit).

$$[i_{rabc}] = [i_{ra} \quad i_{rb} \quad i_{rc}]^T$$

Vecteur des courants rotoriques traversant les phases du rotor.

$$[\Phi_{sabc}] = [\Phi_{sa} \quad \Phi_{sb} \quad \Phi_{sc}]^T$$

Vecteur des flux traversant les trois phases statoriques

$$[\Phi_{rabc}] = [\Phi_{ra} \quad \Phi_{rb} \quad \Phi_{rc}]^T$$

Vecteur des flux traversant les trois phases rotoriques

$[R_s]$ et $[R_r]$ représentent respectivement les matrices des résistances statoriques et rotoriques.

$$[R_s] = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{pmatrix}; \quad [R_r] = \begin{pmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{pmatrix};$$

IV.3.2. Relation des flux

Les relations entre les flux et les courants de différents circuits électriques constitutifs de la MS peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} [\Phi_{sabc}] = [L_s][i_{sabc}] + [M_{sr}][i_{rabc}] \\ [\Phi_{rabc}] = [L_r][i_{rabc}] + [M_{rs}][i_{sabc}] \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

$[L_s]$ et $[L_r]$ sont les matrices des inductances statoriques et rotoriques respectivement

Avec

$$[L_s] = \begin{pmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{pmatrix}; [L_r] = \begin{pmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{pmatrix}$$

Quand a la matrice des inductances mutuelles $[M_{sr}]$ elle est définie comme suit :

$$[M_{sr}] = m_{sr} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta \end{pmatrix}$$

m_{sr} : La valeur maximale des mutuelles stator-rotor.

IV.4. Transformation de Park appliquée à la machine asynchrone

Dans ce modèle, les enroulements des phases a, b et c de la machine sont considérés comme des enroulements équivalents disposés selon deux axes "d" et "q" soit direct et en quadrature respectivement, si l'on considère la composante homopolaire nulle, figure IV.4.

Cette transformation a comme hypothèse de base, la distribution sinusoïdale des enroulements statoriques et rotoriques. Ce modèle est largement utilisé, car il permet une diminution du nombre des équations qui régit le moteur, ainsi que la disparition de l'interdépendance entre les équations statorique et rotorique localisée au niveau de la matrice des inductances mutuelles.

La matrice de transformation $[A]$, déjà donnée au chapitre III, sera appliquée aux courants, aux tensions, ainsi qu'aux flux du modèle triphasé/triphasé de la machine asynchrone. [15]

$$[A(\theta)] = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (IV.8)$$

θ : prendra les valeurs de « θ_s » et « θ_r » pour définir la transformation au niveau des grandeurs statoriques et rotoriques respectivement.

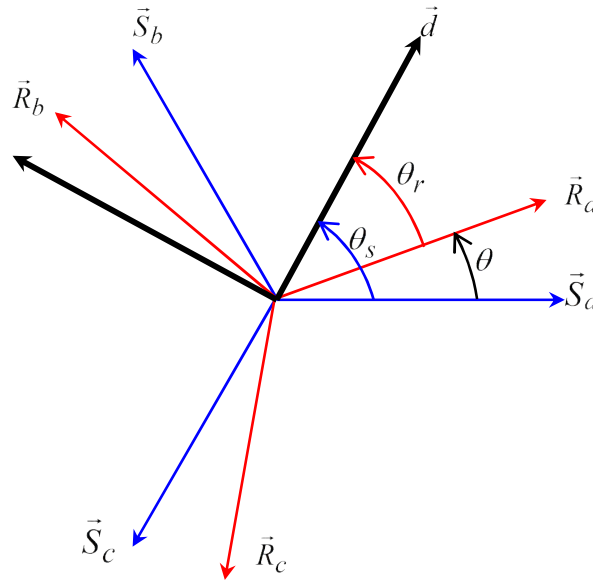


Figure IV.4.: Représentation du modèle de Park

La transformation des grandeurs statoriques est définie par :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_{s\,dq0} \end{bmatrix} = [A(\theta_s)] \cdot \begin{bmatrix} V_{s\,abc} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i_{s\,dq0} \end{bmatrix} = [A(\theta_s)] \cdot \begin{bmatrix} i_{s\,abc} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Phi_{s\,dq0} \end{bmatrix} = [A(\theta_s)] \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{s\,abc} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_{s\,dq0} \end{bmatrix} = [A(\theta_s)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} V_{s\,abc} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i_{s\,dq0} \end{bmatrix} = [A(\theta_s)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} i_{s\,abc} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Phi_{s\,dq0} \end{bmatrix} = [A(\theta_s)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{s\,abc} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Avec :

$$[A(\theta)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

IV.4.1. Equations électriques dans les axes d et q

Nous multiplions les équations de tension des trois phases statoriques, données par l'équation IV.6, par $[A(\theta_s)]$, il vient :

$$[A(\theta_s)][V_{s abc}] = [R_s][A(\theta_s)][i_{s abc}] + [A(\theta_s)] \frac{d [\Phi_{s abc}]}{dt} \quad (\text{IV.12})$$

A partir de l'intégrale par partie on trouve :

$$[A(\theta_s)] \frac{d [\Phi_{s abc}]}{dt} = \frac{d ([A(\theta_s)][\Phi_{s abc}])}{dt} - \frac{d ([A(\theta_s)])}{dt} [\Phi_{s abc}] \quad (\text{IV.13})$$

Avec

$$-\frac{d ([A(\theta_s)])}{dt} [\Phi_{s abc}] = \frac{2}{3} \frac{d \theta_s}{dt} \begin{bmatrix} \sin \theta_s & \sin \left(\theta_s - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_s + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \theta_s & \cos \left(\theta_s - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta_s + \frac{2\pi}{3} \right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{sa} \\ \phi_{sb} \\ \phi_c \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

Sachant que :

$$w_a = \frac{d \theta_s}{dt} \quad (\text{IV.15})$$

En remplaçant le calcul de l'intégrale en équation IV.12, par les équations IV.13 et IV.14, on trouve les trois composantes (directe, en quadrature et homopolaire) des tensions statorique :

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d \phi_{sd}}{dt} - w_a \phi_{sq} \quad (\text{IV.16})$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d \phi_{sq}}{dt} + w_a \phi_{sd} \quad (\text{IV.17})$$

$$V_{so} = R_s i_{so} + \frac{d \phi_{so}}{dt} \quad (\text{IV.18})$$

De façon analogue, la transformation des trois tensions de phases rotoriques conduit au système :

$$V_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} - (w_a - w_m)\phi_{rq} \quad (\text{IV.19})$$

$$V_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} + (w_a - w_m)\phi_{rd} \quad (\text{IV.20})$$

$$V_{ro} = R_r i_{ro} + \frac{d\phi_{ro}}{dt} \quad (\text{IV.21})$$

IV.4.2. Choix de référentiel

Selon le choix d'emplacement de l'observateur, on distingue trois types de référentiel intéressants en pratique, le choix se faisant en fonction du problème étudié.

— **Référentiel lié au stator** on a $w_a=0$

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} \quad (\text{IV.22})$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} \quad (\text{IV.23})$$

$$V_{so} = R_s i_{so} + \frac{d\phi_{so}}{dt} \quad (\text{IV.24})$$

$$V_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} + w_m \phi_{rq} \quad (\text{IV.25})$$

$$V_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} - w_m \phi_{rd} \quad (\text{IV.26})$$

$$V_{ro} = R_r i_{ro} + \frac{d\phi_{ro}}{dt} \quad (\text{IV.27})$$

— **Référentiel lié au rotor** on a : $w_a=w_m$.

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} - w_m \phi_{sq} \quad (\text{IV.28})$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} + w_m \phi_{sd} \quad (\text{IV.29})$$

$$V_{so} = R_s i_{so} + \frac{d\phi_{so}}{dt} \quad (\text{IV.30})$$

$$V_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (\text{IV.31})$$

$$V_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \quad (\text{IV.32})$$

$$V_{ro} = R_r i_{ro} + \frac{d\phi_{ro}}{dt} \quad (\text{IV.33})$$

— **Référentiel lié au rotor** on a : $\omega_a = \omega_s$.

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} - \omega_s \phi_{sq} \quad (\text{IV.34})$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} + \omega_s \phi_{sd} \quad (\text{IV.35})$$

$$V_{so} = R_s i_{so} + \frac{d\phi_{so}}{dt} \quad (\text{IV.36})$$

$$V_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} - (\omega_s - \omega_m) \phi_{rq} \quad (\text{IV.37})$$

$$V_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} + (\omega_s - \omega_m) \phi_{rd} \quad (\text{IV.38})$$

$$V_{ro} = R_r i_{ro} + \frac{d\phi_{ro}}{dt} \quad (\text{IV.39})$$

IV.4.3. Equations de flux dans les axes d et q

En appliquant la transformation de Park à la matrice des flux donnée par l'équation IV.7, on obtient : [1][8]

$$[A(\theta_s)] [\Phi_{sodq}] = [A(\theta_s)] [L_s] [i_{sabc}] + [A(\theta_s)] [M_{sr}] [i_{rabc}] \quad (\text{IV.40})$$

Après développement, le premier terme de l'équation IV.40, devient :

$$[A(\theta_s)] [L_s] [i_{sabc}] = \begin{bmatrix} (l_s - m_s) i_{sd} \\ (l_s - m_s) i_{sq} \\ (l_s - m_s) i_{so} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.41})$$

Le second terme, de l'équation IV.40, devient :

$$[A(\theta_s)] [M_{sr}] [i_{rabc}] = \frac{3}{2} m_{sr} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{ro} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

On procède de la même façon avec les trois flux rotoriques.

Avec :

$L_s = l_s - m_s$ et $L_r = l_r - m_r$ sont les inductances cycliques propre du stator et du rotor respectivement.

$L_{so} = l_s + 2m_s$ et $L_{ro} = l_r + 2m_r$ les inductances cycliques homopolaire du stator et du rotor respectivement.

$M_{sr} = \frac{3}{2} m_{sr}$: Qui est la mutuelle inductance cyclique stator-rotor.

Ainsi de manière globale, nous aurons le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} \phi_{sd} = L_s i_{sd} + M_{sr} i_{rd} \\ \phi_{rd} = L_r i_{rd} + M_{sr} i_{sd} \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

$$\begin{cases} \phi_{sq} = L_s i_{sq} + M_{sr} i_{rq} \\ \phi_{rq} = L_r i_{rq} + M_{sr} i_{sq} \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

IV.4.4. Puissance et couple

La puissance électrique instantanée de la machine vaut :

$$\begin{aligned} p(t) &= v_{sa}(t) i_{sa}(t) + v_{sb}(t) i_{sb}(t) + v_{sc}(t) i_{sc}(t) \\ &= \frac{3}{2} (v_{sd}(t) i_{sd}(t) + v_{sq}(t) i_{sq}(t)) + 3v_{so}(t) i_{so}(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

Exprimons cette puissance en fonction des flux et des courants en utilisant les équations de Park :

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{3}{2} R_s (i_{sd}(t)^2 + i_{sq}(t)^2 + 2 i_{so}(t)^2) \\ &\quad + \frac{3}{2} \left(i_{sd}(t) \frac{d\phi_{sd}(t)}{dt} + i_{sq}(t) \frac{d\phi_{sq}(t)}{dt} + 2 i_{so}(t) \frac{d\phi_{so}(t)}{dt} \right) \\ &\quad + \frac{3}{2} (\phi_{sd}(t) i_{sd}(t) - \phi_{sq}(t) i_{sq}(t)) \omega_r \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

— La première parenthèse représente les pertes Joule dans l'induit.

— La deuxième représente la variation par unité de temps de l'énergie magnétique emmagasinée.

— La troisième parenthèse représente la puissance mécanique transformée en puissance électrique à l'intérieur de la machine.

L'expression du couple est :

$$\Gamma_e = \frac{3}{2}(\varphi_d i_q - \varphi_q i_d) \quad (\text{IV.47})$$

D'après le premier principe de la dynamique :

$$\Gamma_e - \Gamma_r = J \frac{dw_r}{dt} \quad (\text{IV.48})$$

Γ_r : représente le couple résistant.

IV.5. Modèle de la MAS multipolaire

Les équations électriques et ceux des flux en fonction des courants sont inchangés, seules les équations du couple et du mouvement deviennent

L'expression du couple est :

$$\Gamma_e = \frac{3}{2}P(\varphi_d i_q - \varphi_q i_d) \quad (\text{IV.49})$$

D'après le premier principe de la dynamique :

$$\Gamma_e - \Gamma_r = \frac{J}{P} \frac{dw_r}{dt} \quad (\text{IV.50})$$

Γ_r : représente le couple résistant.

P nombre de pair de pôle.

Références

- [1]. PHILIP BARRET, “Régimes transitoires des machines tournantes électriques ”, 1987, France.
- [2]. THEODORE WILD, GILBERT SYBILLE, “ELECTROTECHNIQUE”, De Boeck édition, 2015.
- [3]. PIERRE MAYE, “AIDE-MEMOIRE ELECTROTECHNIQUE”, DUNOD, 2006.
- [4]. RACHID ABDESSEMED, “Electrotechnique - Modélisation et simulation des machines électriques”,
- [5]. M. KOSTENKO, L. PIOTROVSKI, “Machines électriques”, 1969, Mir, Moscou.
- [6]. JEAN-PAUL LOUIS, “Modélisation des machines électriques en vue de leur commande”, 2004, France.
- [7]. D. P. SEN GUPTA, J. W. LYNN, “Electrical Machine Dynamics”, 1980, Macmillan, London.
- [8]. JEAN CHATELAIN, “Machines Electriques ”, 1983, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse.
- [9]. MICHAEL LIWSCHITZ-GARIK, CLYDE C. WHIPPLE, E. E., “Direct current machines”, 1956, USA.
- [10]. R. RAMANUJAM, “Modeling and Analysis of Electrical Machine”, 2019, Kindle Edition.
- [11]. RICHARD T. SMITH, “Analysis of Electrical Machines”, 1982, Pergamon Press.
- [12]. I. P. KOPYLOV, “Mathematical models of electric machines”, 1984, Mir, Moscou.
- [13]. N. N. HANCOCK, “Matrix Analysis of Electrical Machinery”, 1974, Pergamon Press.
- [14]. PAUL C. KRAUSE, OLEG WASYNCHUK, SCOTT D. SUDHOFF, STEVEN PEKAREK, “Analysis of Electric Machinery and Drive Systems”, 2013, Wiley-Blackwell.
- [15]. DR P S BIMBHRA, “Electrical Machinery”, 2013, Khanna Publishers.
- [16]. K. Hamer, R. Belmans, “Numerical Modelling and Design of Electrical Machines and Devices (Advances in Electrical and Electronic Engineering) (Advances in Electrical and Electronic Engineering, V. 1)”, 1999, WIT Press.
- [17]. GREG C. STONE, EDWARD A. BOULTER, IAN CULBERT, HUSSEIN DHIRANI, “Electrical Insulation for Rotating Machines”, 2004, IEEE Press.

[18]. QIANG YU, XUESONG WANG, YUHU CHENG, LISI TIAN, “ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELS OF CANNED ELECTRICAL MACHINE DRIVES”, 2009, Springer PRESS.